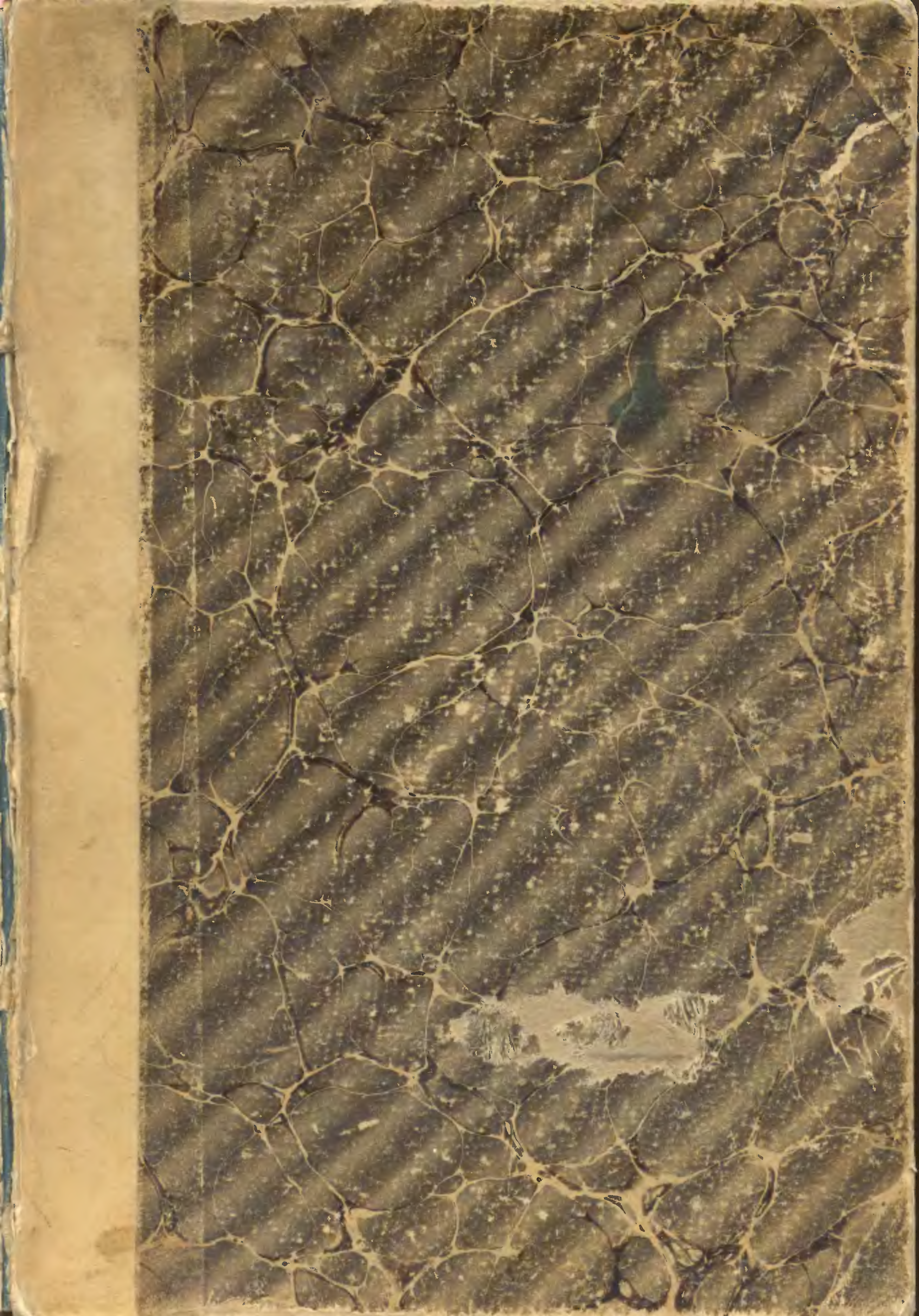


H. Weber
ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА
ВЪ СТРАССБУРГѢ.

и

J. Wellstein
ПРОФЕССОРЪ УНИВЕРСИТЕТА
ВЪ ГИССЕНѢ.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ элементарной математики.

РУКОВОДСТВО

для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику.

ВЪ ТРЕХЪ ТОМАХЪ.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей и съ примѣчаніями

В. КАГАНА

приватъ-доцента Императорскаго Новороссійскаго Университета.

ТОМЪ I.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИЗЪ.



ОДЕССА.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, ул. Новосельскаго, 66.
1906.

ЭНЦИКЛОПЕДІЯ

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ АЛГЕБРЫ

и

АНАЛИЗА.

Составилъ

Г. Веберъ.

Предисловіе къ русскому изданію.

Сочиненія по элементарной математикѣ рѣзко дѣлятся на два типа Одни представляютъ собой учебники въ собственномъ смыслѣ этого слова, по которымъ можно систематически изучать предметъ безъ предварительной подготовки; другія представляютъ собою трактаты, содержащіе научное изложеніе дисциплины и разсчитанные на подготовленнаго читателя. Въ то время, какъ новые учебники появляются очень часто, цѣнныя сочиненія второго рода появляются разъ въ четверть вѣка и даже рѣже. Появленіе новаго трактата такого рода всегда указываетъ на то, что въ изложеніи и въ разработкѣ дисциплины установились новыя теченія, новые взгляды; они какъ бы подводятъ итогъ работамъ цѣлаго научнаго поколѣнія. Такое значеніе въ концѣ шестидесятыхъ и въ семидесятыхъ годахъ имѣли: „Элементы математики“ Бальцера [1]) и „Алгебра“ Жозефа Бертрана [2]). Но въ послѣднюю четверть вѣка основы элементарной математики подверглись тщательному пересмотру. Глубокій анализъ, которому посвятили много труда наиболѣе выдающіеся ученые, пролилъ совершенно новый свѣтъ на элементы ариѳметики и геометріи. Научное изложеніе этихъ дисциплинъ значительно уклонилось отъ той системы, которую мы находимъ въ элементарныхъ учебникахъ. Когда г. Билибинъ предпринялъ изданіе „Алгебры“ Бертрана въ русскомъ переводѣ, онъ вынужденъ былъ уже существенно переработать и дополнить текстъ оригинала.

Дать научное и современное изложеніе основъ элементарной математики составляетъ задачу „Энциклопедіи элементарной математики“ профессоровъ Вебера и Вельштейна. Первый томъ этого сочиненія „Энциклопедія элементарной алгебры“ принадлежитъ профессору Страсбургскаго университета Г. Веберу, автору обширнаго трактата по высшей алгебрѣ. [3]) Книга содержитъ, на нашъ взглядъ, мастерское изложеніе элементовъ ариѳметики, алгебры и анализа. Обоснованіе началъ ариѳметики все еще не можетъ считаться законченнымъ; поэтому нѣкоторые пункты въ I, II и IV главѣ могутъ и здѣсь не вполнѣ удовлетворить вдумчиваго читателя; но

[1]) *R. Baltzer*. „Elemente der Mathematik“. Leipzig. 1865.

[2]) *J. Bertrand*. „Traité d'Algèbre“. Paris. 1862.

[3]) *H. Weber*. „Lehrbuch der Algebra.“ Braunschweig. I Bd 1893, II Bd. 1895.

онъ найдетъ въ этомъ сочиненіи оригинальную систему изложенія основъ ариѳметики, отражающую всѣ изслѣдованія послѣдняго времени по этому вопросу. Очень обстоятельно и, главное, строго научно изложены и остальные отдѣлы; особенный же интересъ представляетъ XIX глава, содержащая, можно сказать, первую попытку дать элементарное изложеніе сложныхъ доказательствъ невозможности рѣшенія общаго уравненія 5-ой степени въ радикалахъ, неприводимости формулы Кардана и т. п. Общая теорія рядовъ и разложеніе наиболѣе важныхъ функцій изложены столь же строго, какъ и доступно. Очень удачно переработаны также авторомъ доказательства трансцендентности чиселъ e и π.

Авторъ сопровождаетъ многія предложенія историческими указаніями, свѣдѣніями объ ихъ авторахъ. Впрочемъ, свѣдѣнія эти по причинамъ, указаннымъ въ предисловіи автора, довольно скудны. Но въ декабрѣ 1905 г. появилось второе изданіе I-го тома, въ которомъ историческія свѣдѣнія и литературныя указанія значительно расширены. Тѣ добавленія, которыя мы не успѣли внести въ текстъ настоящаго перевода, будутъ приложены къ концу книги.

Наконецъ, чтобы сдѣлать книгу доступной возможно болѣе широкому кругу читателей, мы сочли полезнымъ присоединить разъясняющія примѣчанія въ тѣхъ мѣстахъ, которыя изложены авторомъ слишкомъ сжато. Всѣ подстрочныя примѣчанія, въ которыхъ выноски отмѣчены цифрами, принадлежатъ намъ; тѣ же примѣчанія, въ которыхъ выноски отмѣчены звѣздочками, принадлежатъ автору. Мы полагаемъ, что съ этими дополненіями книга будетъ доступна даже хорошо подготовленному ученику старшаго класса. Первыя главы, по своей отвлеченности, труднѣе другихъ; мы полагаемъ, однако, что это не остановитъ читателя, который съ интересомъ къ дѣлу приступитъ къ чтенію этого сочиненія. Можно даже при первомъ чтеніи опустить первую главу и возвратиться къ ней по прочтеніи всей книги.

В. Каганъ.

Предисловіе автора [1]).

Сочиненіе, первый томъ котораго мы въ настоящее время выпускаемъ въ свѣтъ, не должно представлять собой учебника въ собственномъ смыслѣ слова. Читателями, которыхъ мы имѣемъ въ виду, являются, во первыхъ, учителя, которые, мы надѣемся, найдутъ въ немъ полезныя указанія для выбора учебнаго матеріала, особенно для старшихъ классовъ; во вторыхъ, лица, изучающія уже математику спеціально и серьезно, которыя желаютъ пріобрѣсти для этого твердую почву путемъ освѣженія и дополненія пріобрѣтенныхъ раньше элементарныхъ знаній.

Нерѣдко уже разбирался вопросъ, что слѣдуетъ понимать подъ элементарной математикой и какъ установить границы этой области. Единственный научный принципъ, который могъ бы служить для рѣшенія этого вопроса, состоитъ въ томъ, что изъ области элементарной математики исключаютъ понятія о безконечности и о предѣлѣ; элементарная математика противопоставляется поэтому анализу безконечнаго. Съ этой точки зрѣнія къ элементарной математикѣ надо отнести все, что получается при посредствѣ извѣстныхъ простыхъ логическихъ пріемовъ; послѣдніе же даютъ при дальнѣйшемъ развитіи всю теорію чиселъ, включая труднѣйшія ея части, вообще все, что, по мнѣнію Кронекера (Kronecker), имѣетъ въ математикѣ право на существованіе; при этомъ, однако, возникаютъ затрудненія въ самомъ примѣненіи этихъ простыхъ логическихъ пріемовъ, для устраненія чего и созданъ высшій анализъ. Уже такія понятія, какъ ирраціональное число, квадратный корень, логариѳмъ, не относились бы, если стать на эту точку зрѣнія, къ элементарной математикѣ.

Въ геометріи къ элементамъ относятъ то, что выводится изъ понятій о прямой и о кругѣ и (въ пространствѣ) изъ понятій о плоскости и о шарѣ. Но уже соединеніе геометріи въ плоскости и въ пространствѣ приводитъ къ понятію о конусѣ, а отсюда къ его сѣченіямъ плоскостью, къ такъ называемымъ коническимъ сѣченіямъ. Если же мы соединимъ геометрію съ ариѳметикой, то мы неизбѣжно выйдемъ за предѣлы области, опредѣляемой для элементарной геометріи вышеприведеннымъ принципомъ; такъ, для опредѣленія понятій: площадь, длина дуги и т. п. необходимо пользоваться переходомъ къ предѣлу.

---

[1]) Вскорѣ послѣ появленія этого сочиненія авторъ отпечаталъ предисловіе въ журналѣ „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ съ нѣкоторыми дополненіями, которыя мы считаемъ существенными. Съ этими дополненіями мы и воспроизводимъ переводъ.

Итакъ, мы видимъ, что такое опредѣленіе элементарной математики, хотя и представляетъ научный интересъ, т. е. можетъ служить для разъясненія возникновенія математическихъ понятій,—тѣмъ не менѣе, не имѣетъ никакой цѣны съ педагогической точки зрѣнія, если только не ограничиваться лишь самыми простѣйшими главами элементовъ.

Поэтому мы подъ элементарной математикой понимаемъ все то, что можно цѣлесообразно примѣнять при преподаваніи математики въ школѣ, но въ томъ періодѣ его, который предшествуетъ выбору особой спеціальности. Съ такой точки зрѣнія границы этой области зависятъ, главнымъ образомъ, отъ выбора педагога. Но и математическая наука имѣетъ право голоса при обсужденіи даннаго вопроса.

Мнѣнія по вопросу о выборѣ матеріала для школьнаго преподаванія всегда будутъ и должны быть различны. Эти различія зависятъ отъ индивидуальности и научныхъ склонностей преподавателя, и прежде всего, отъ цѣлей, къ которымъ преподаваніе стремится.

Планъ преподаванія будетъ тотъ или иной въ зависимости отъ того, что мы будемъ считать главною задачею научнаго образованія: всестороннее ли, гармоническое развитіе ума, пробужденіе дремлющихъ духовныхъ силъ и упражненіе ихъ,—или сообщеніе юношѣ извѣстной суммы полезныхъ свѣдѣній и умѣній, которыя какъ можно раньше сдѣлали бы его готовымъ къ трудной жизненной борьбѣ.

Послѣдняя задача заставила бы присоединить къ элементарному преподаванію по возможности больше матеріала для того, чтобы при переходѣ къ изученію спеціальности не было нужды останавливаться больше на подготовительной работѣ.

Очевидно, что это возможно только въ ущербъ глубинѣ и основательности; а при этомъ возникаетъ опасность, что обученіе математикѣ потеряетъ свое существенное значеніе.

Значеніе же это очень различно для различныхъ индивидуальностей. Математическая работа содержитъ въ себѣ особый элементъ творчества. И это относится не только къ творческой дѣятельности въ собственномъ смыслѣ этого слова, но сказывается и въ мелочахъ, проявляется при рѣшеніи задачъ или въ болѣе глубокомъ пониманіи и точномъ воспроизведеніи математическихъ идей. Эта дѣятельность ума въ состояніи совершенно поглотить человѣка и служитъ для лицъ, одаренныхъ соотвѣтствующими способностями, источникомъ величайшихъ наслажденій Такое явленіе наблюдается какъ въ области абстрактныхъ представленій, въ наукѣ о числахъ, такъ и въ области пространственныхъ представленій геометріи.

Поэтому я не сомнѣваюсь въ томъ, что для особенно успѣшнаго преподаванія математики необходимо, чтобъ ученики обладали извѣстнымъ специфическимъ дарованіемъ. Отсюда отнюдь не слѣдуетъ, понятно, чтобы средне одаренному ученику нельзя было преподать въ извѣстномъ

объемѣ математическихъ знаній и свѣдѣній, которыя будутъ ему нужны при изученіи всякой спеціальной отрасли знаній; это даже необходимо для логическаго воспитанія мысли.

Но такое положеніе вещей создаетъ раздвоеніе въ математическомъ преподаваніи, а это влечетъ за собой крупныя затрудненія. И преподаватель, стремящійся одновременно выполнить обѣ эти задачи—цѣлесообразнаго преподаванія выдающимся ученикамъ и среднимъ—, долженъ обладать не только основательными познаніями, но и глубокимъ математическимъ образованіемъ и пониманіемъ тонкостей и красотъ математики.

До сихъ поръ еще, послѣ почти пятидесяти лѣтъ, я вспоминаю съ благодарностью моего учителя въ Гейдельбергскомъ лицеѣ, Арнета (Arneth) и его уроки, оказавшіе на меня глубокое вліяніе. Для большинства учениковъ его преподаваніе представляло мало интереса; но тѣмъ увлекательнѣе оно было для немногихъ исключительныхъ учениковъ, которымъ было доступно его тонкое математическое чутье и пониманіе физики, опередившее господствовавшіе въ то время взгляды.

Въ тѣ времена въ южно-германскихъ гимназіяхъ математикѣ въ программѣ преподаванія отводилось второстепенное мѣсто; и со стороны большинства учителей и учениковъ она не пользовалась уваженіемъ. Поэтому преподаватель могъ вліять лишь на небольшой кружокъ склонныхъ къ математикѣ юношей. Теперь обстоятельства измѣнились къ лучшему и въ настоящее время врядъ-ли можетъ случиться, чтобы какой-нибудь ученикъ окончилъ гимназію безъ всякихъ математическихъ познаній.

Это есть несомнѣнный шагъ впередъ; но онъ не долженъ покупаться цѣною пониженія внутренняго содержанія преподаванія; нужно, чтобы при новой системѣ и болѣе способный ученикъ нашелъ необходимый для себя матеріалъ. Послѣднее же достигается не тѣмъ, что лучшихъ учениковъ выводятъ возможно дальше изъ области элементарной математики въ область высшей. Для дальнѣйшаго математическаго развитія это могло бы скорѣе служить помѣхою, чѣмъ помощью. Значительно болѣе плодотворнымъ является углубленіе содержанія элементарнаго преподаванія, въ которомъ, не выходя изъ прежнихъ границъ, можно найти неисчерпаемыя богатства матеріала; такое углубленіе дѣйствуетъ на ученика, развивая его и оживляя предметъ. При этомъ учителю должна быть дана полная свобода выбирать изъ всего многообразнаго матеріала то, что соотвѣтствуетъ его собственнымъ склонностямъ. Ибо плодотворное воздѣйствіе на ученика можетъ имѣть мѣсто только тамъ, гдѣ преподаватель относится еще съ живымъ интересомъ къ предмету.

Между прочимъ, и строгое логическое обоснованіе математики можетъ быть отнесено къ области элементовъ. Относящіеся сюда вопросы въ новѣйшее время подверглись глубокому изслѣдованію, и мы сдѣлали значительный шагъ впередъ къ ихъ разрѣшенію. Основаніямъ ариѳметики посвя-

щены статьи Дедекинда (Dedekind): „*Was sind und was sollen die Zahlen*“ [2]) (Braunschweig, 1888, 1892) и „*Stetigkeit und irrationale Zahlen*“ (1872, 1892). Авторъ оперируетъ въ нихъ при посредствѣ простѣйшихъ пріемовъ, которыми располагаетъ всякій здравый разсудокъ и которые не предполагаютъ никакихъ спеціальныхъ философскихъ или математическихъ свѣдѣній. Въ томъ же направленіи ведутся новѣйшія изслѣдованія по основаніямъ геометріи; правда, они не достигли еще той законченности, какою отличаются соотвѣтствующія изслѣдованія по ариѳметикѣ. Но, чтобы понимать эти вопросы, необходимо располагать извѣстною зрѣлостью сужденій, а потому съ нихъ нельзя начинать преподаванія.

Итакъ, изложеніе этихъ принципіальныхъ вопросовъ, въ видѣ своего рода философской пропедевтики, можно рекомендовать въ послѣднемъ классѣ гимназіи, хорошо подготовленномъ. Но при этомъ необходимо соблюдать осторожность, такъ какъ полупониманіе въ этой области равносильно непониманію, если не хуже его.

Для большинства учениковъ полезнѣе и интереснѣе, если преподаваніе будетъ расширено въ сторону *приложеній*. Новыя программы испытаній на званіе преподавателя средней школы въ Германіи даютъ къ этому толчокъ [3]), и тѣмъ самымъ реальному образованію отводится больше мѣста. Приложенія могутъ оживить преподаваніе математики, увеличить къ ней интересъ, а точность и чистота при черченіи придаютъ этой отрасли преподаванія немалое воспитательное значеніе.

Далѣе, извѣстныя главы теоріи чиселъ и высшей алгебры могутъ съ успѣхомъ примѣняться при элементарномъ преподаваніи. Во первыхъ, онѣ пользуются лишь элементарными математическими пріемами; а во вторыхъ, преимущество ихъ въ многочисленности примѣровъ, которыми можетъ воспользоваться учитель; рѣшеніе этихъ примѣровъ, допускающее всегда простую повѣрку, даетъ учащемуся большое удовлетвореніе. Примѣненіе этихъ главъ къ построенію правильныхъ многоугольниковъ вызываетъ и геометрическій интересъ.

Затѣмъ существуетъ рядъ знаменитыхъ задачъ, извѣстныхъ уже съ древнихъ временъ, какъ, напримѣръ, проблемы объ удвоеніи куба, о трисекціи угла при посредствѣ циркуля и линейки, рѣшеніе въ радикалахъ уравненія пятой степени, квадратура круга,—о невозможности рѣшенія которыхъ школьни-

[2]) Переводъ этого небольшого сочиненія, сдѣланный С. О. Шатуновскимъ, былъ помѣщенъ въ „Вѣстникѣ Опытной Физики и Элементарной Математики“, въ №№ 191 и 192. Брошюра была также выпущена отдѣльнымъ изданіемъ. [Это изданіе разошлось и въ настоящее время готовится новое. „Mathesis“.

[3]) По этимъ программамъ при государственномъ экзаменѣ на званіе преподавателя математики за одинъ изъ второстепенныхъ предметовъ можно взять прикладную математику. А при допущеніи къ экзамену засчитываются два семестра, проведенные студентомъ, вмѣсто университета, въ спеціальномъ техническомъ заведеніи.

ки постоянно слышатъ. Въ настоящее время наука не только располагаетъ доказательствами невозможности, но доказательствамъ этимъ она придала столь простую форму, что ими можно безъ труда воспользоваться при элементарномъ преподаванiи.

Въ теченiе самой работы матерiалъ, предназначенный для настоящаго сочиненiя, былъ увеличенъ и самый планъ былъ расширенъ. Оказалось поэтому цѣлесообразнымъ разбить сочиненiе не на два тома, какъ это предполагалось сначала, а на три. Первый томъ долженъ охватить область ариѳметики и алгебры, второй—геометрiю, а третiй будетъ посвященъ приложенiямъ. Мы надѣемся, что второй и третiй томы появятся въ непродолжительномъ времени. Благодаря этому оказалось возможнымъ удѣлить значительно больше мѣста приложенiямъ, которыя мы имѣли въ виду и при выборѣ примѣровъ въ различныхъ частяхъ текста.

Впрочемъ, согласно плану настоящаго сочиненiя, мы не разрабатывали большого числа примѣровъ. Мы не считали цѣлесообразнымъ останавливаться на примѣрахъ, имѣющихъ въ виду только упражненiя, такъ какъ въ литературѣ нѣтъ недостатка въ прекрасныхъ сборникахъ такого рода примѣровъ. Примѣры мы помѣщали лишь въ тѣхъ случаяхъ, если это казалось необходимымъ для пониманiя текста, или если примѣръ самъ по себѣ могъ представлять научный интересъ. Точно также мы не удѣляли много мѣста историческимъ и литературнымъ справкамъ. Мы имѣемъ въ настоящее время обширное сочиненiе по исторiи математики М. Кантора; въ этомъ сочиненiи мы находимъ подробныя и точныя свѣдѣнiя за огромный перiодъ отъ зарожденiя первыхъ начатковъ математики до середины XVIII столѣтiя; благодаря же тщательно составленному регистру, это сочиненiе даетъ возможность легко орiентироваться и въ отдѣльныхъ вопросахъ. Сверхъ того въ непродолжительномъ времени въ „Энциклопедiи Математическихъ наукъ“ *) имѣетъ появиться статья „Элементарная Математика“ М. Симона (M. Simon); мы имѣли возможность видѣть эту статью въ рукописи; она содержитъ подробныя историческiя и литературныя указанiя по всѣмъ вопросамъ, которые могутъ быть отнесены къ элементарной математикѣ. Намъ казалось поэтому достаточнымъ ограничиваться при каждомъ собственномъ имени, появляющемся при наименованiи того или другого предложенiя, короткой замѣткой о времени и обстоятельствахъ жизни этого автора.

*) „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen,“ Leipzig. Teubner. „Энциклопедiя математическихъ наукъ со включенiемъ ихъ приложенiй“. Чрезвычайно обширное и цѣнное сочиненiе, выходящее въ настоящее время одновременно на нѣмецкомъ и французскомъ языкахъ. Отдѣльныя статьи разрабатываются выдающимися учеными всего мiра. Въ настоящее время вполнѣ законченъ только I томъ „Ариѳметика и Алгебра“, содержащiй 1196 страницъ; вышли также многiе выпуски другихъ томовъ.

Наконецъ, мы должны указать, что настоящее сочиненіе обязано своимъ появленіемъ въ свѣтъ иниціативѣ издателя А. Акермана-Тейбнера (A. Ackermann-Teubner); онъ указалъ намъ на „Элементы Математики" Бальцера (Baltzer), сочиненіе, которое выдержало нѣсколько изданій и въ настоящее время уже не существуетъ въ продажѣ; на такого рода сочиненіе, очевидно, имѣется спросъ. Поэтому обработать такого рода сочиненіе согласно господствующимъ въ настоящее время въ наукѣ воззрѣніямъ, представляетъ собой несомнѣнно благодарную задачу; я тѣмъ охотнѣе взялъ ее на себя, что съ 1888 г. я читалъ въ Марбургѣ, Гёттингенѣ и Страсбургѣ университетскій курсъ подъ заглавіемъ: „Энциклопедія Элементарной Математики".

Страсбургъ, въ іюлѣ 1903 г. **Г. Веберъ.**

Предисловіе ко второму изданію.

Первый томъ нашей „Энциклопедіи элементарной математики" встрѣтилъ благопріятный пріемъ какъ со стороны математическаго міра, такъ и со стороны критики. Но наряду съ чрезмѣрными похвалами слышались отчасти въ критикѣ, отчасти въ личныхъ разговорахъ различныя пожеланія. Я тщательно обдумалъ всѣ высказанныя мнѣ пожеланія и по скольку я находилъ ихъ въ чемъ либо правильными, я постарался удовлетворить ихъ во второмъ изданіи.

Часто высказывалось пожеланіе болѣе подробной разработки исторической части. Для того, чтобы избѣжать слишкомъ большого труда, но въ то же время не ограничиться сухимъ перечисленіемъ заглавій книгъ и хронологическихъ данныхъ, я остановился на слѣдующемъ: не стремясь все таки къ полнотѣ изложенія, подробнѣе разработать части математики, имѣющія общій интересъ и дать небольшіе эскизы изъ исторіи математики. Въ этомъ и во многихъ другихъ вопросахъ я пользовался совѣтомъ и дѣятельною помощью г. Штекеля (Stäckel) въ Ганноверѣ. Считаю своимъ долгомъ выразить ему здѣсь мою благодарность.

Изъ болѣе существенныхъ измѣненій я долженъ упомянуть еще о XXVII главѣ, которая посвящена первоначальнымъ элементамъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Въ послѣднее время въ дѣлѣ математическаго преподаванія создалось движеніе, направленное къ тому, чтобы очень рано выяснять понятія о перемѣнной величинѣ и о функціи и такимъ образомъ подготовлять учащагося къ примѣненію его познаній къ естественнымъ и техническимъ наукамъ. Болѣе подробныя свѣдѣнія объ этихъ планахъ и стремленіяхъ можно найти въ изданномъ Ф. Клейномъ и Е. Рике трудѣ „Матеріалы по вопросу о преподаваніи математики и физики въ высшей школѣ" [1]). Этотъ путь, вполнѣ естественно, приводитъ къ основнымъ понятіямъ дифференціальнаго исчисленія. Теперь возникаетъ только вопросъ,—слѣдуетъ ли просто употреблять установившіеся въ этихъ дисциплинахъ и общепринятые термины и обозначенія, или ихъ слѣдуетъ

---

[1]) F. Klein und E. Riecke. „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen", Leipzig, Teubner, 1904.

избѣгать, неявно замѣняя ихъ другими. Я, однако, не могъ найти достаточнаго основанія къ тому, чтобы, давая понятія, скрывать ихъ названія. Ибо врядъ ли слѣдуетъ опасаться того, что ученикъ, нуждающійся въ математическихъ познаніяхъ при своихъ дальнѣйшихъ занятіяхъ, удовольствуется тѣми начатками, которые могли быть ему сообщены въ школѣ, и потому станетъ вести свои дальнѣйшія занятія съ меньшимъ интересомъ или съ менѣе серьезнымъ отношеніемъ къ дѣлу. Я тѣмъ охотнѣе рѣшился присоединить къ этому труду XXVII главу, что въ предыдущихъ главахъ изложено уже о безконечныхъ рядахъ все, что необходимо для пониманія этихъ основныхъ понятій, и еще потому, что въ геометріи всетаки нельзя обойти понятій о касательной, о кривизнѣ, о величинѣ поверхности, объ объемѣ и т. д.

Страсбургъ. Ноябрь 1905 г.

Книга I.

ОСНОВАНІЯ АРИѲМЕТИКИ.

ГЛАВА I
Натуральныя числа.

§ 1. Единицы, комплексы.

1. Человѣческій духъ одаренъ способностью оріентироваться въ рядѣ смѣняющихъ другъ друга впечатлѣній, ощущеній, представленій и мыслей, выдѣляя нѣкоторыя изъ нихъ въ опредѣленную группу и разсматривая таковую, какъ единицу, какъ одинъ объектъ. Самый процессъ выдѣленія вполнѣ зависитъ отъ нашего произвола: мы руководствуемся только его цѣлесообразностью [1]). Чтобы объясняться другъ съ другомъ, мы часто даемъ такой группѣ особое названіе. Но понятіе о единицѣ ни въ какомъ случаѣ не ограничивается тѣми объектами, которые имѣютъ особыя названія въ культурныхъ языкахъ; оно не ограничивается также вещественными, конкретными объектами. Съ понятіемъ о единицѣ неразрывно связано понятіе о множествѣ.

2. Слѣдующій шагъ въ развитіи нашей мысли заключается въ томъ, что мы воспринимаемъ цѣлый рядъ объектовъ и объединяемъ ихъ въ новую единицу, которую мы называемъ единицей высшаго порядка, системой, классомъ, категоріей или, наконецъ, комплексомъ. Отдѣльные объекты такой системы называются ея элементами.

Образованіе этихъ классовъ также вполнѣ произвольно: классъ считается опредѣленнымъ, если мы имѣемъ возможность установить относительно каждаго объекта, принадлежитъ ли онъ этому классу или нѣтъ. По существу, мы можемъ соединять въ одинъ классъ самые разнообразные объекты; руководящимъ началомъ при этомъ служитъ лишь наша цѣль, заключающаяся въ томъ, чтобы разбираться въ мірѣ нашихъ представленій и объясняться съ ближними. Мы соединяемъ преимущественно въ одинъ классъ такіе объекты, которые имѣютъ извѣстное сходство, извѣстное родство въ нашемъ представленіи. Для многихъ изъ

[1]) Авторъ хочетъ сказать, что отъ нашего усмотрѣнія вполнѣ зависитъ, какіе именно объекты соединять въ группы и отдѣлять отъ остальныхъ объектовъ; производя то или другое отдѣленіе, мы сознательно или безсознательно руководствуемся лишь тѣмъ, что намъ удобно или полезно.

такихъ классовъ языкъ выработалъ особыя названія. Чѣмъ дальше шло образованіе такихъ категорій, тѣмъ языкъ богаче, тѣмъ онъ болѣе развитъ.

Часто встрѣчающіяся категоріи обращаются въ нашемъ представленіи въ понятія, съ которыми мы уже не соединяемъ представленія о множествѣ[2]); такимъ образомъ мы получаемъ новыя единицы. Этимъ путемъ мы создаемъ объекты, которымъ мы присваиваемъ также извѣстное объективное существованіе—идеи. Это особенно ясно по отношенію къ числамъ: какъ ни сложно ихъ первоначальное опредѣленіе, они все таки становятся въ нашемъ представленіи отдѣльными объектами.

§ 2. Сопряженіе, мощность.

Третій видъ дѣятельности нашего духа заключается въ сопряженіи однихъ объектовъ съ другими. Каждое сужденіе, каждое предложеніе, которое не сводится къ простому наименованію какого либо объекта, представляетъ собой такого рода сопряженіе. И здѣсь мы совершенно свободны въ выборѣ тѣхъ объектовъ, которые мы сопрягаемъ другъ съ другомъ; этотъ актъ нашего духа именно и ставитъ ихъ въ опредѣленныя отношенія другъ къ другу. Но всѣ успѣхи нашего познанія именно и сводятся къ удачному и цѣлесообразному производству такого рода сопряженій.

Мы будемъ обыкновенно обозначать комплексы прописными буквами латинскаго алфавита. Положимъ, что мы имѣемъ два комплекса A и B. Мы можемъ попытаться отнести каждый элементъ комплекса A къ нѣкоторому элементу комплекса B (т. е. считать каждый элементъ комплекса A соотвѣтствующимъ нѣкоторому элементу комплекса B) при томъ такъ, чтобы два различныхъ элемента комплекса A всегда отвѣчали различнымъ же элементамъ комплекса B. Если намъ удастся выполнить такого рода сопряженіе, то мы будемъ говорить, что мы отобразили комплексъ A въ комплексѣ B или что мы установили соотвѣтствіе между комплексомъ A и комплексомъ B[3]). Элементы комплекса A мы бу-

---

[2] Называя, напримѣръ, „столъ", мы обыкновенно не думаемъ о томъ, что это есть названіе категоріи, содержащей множество объектовъ.

[3]) Это основное понятіе необходимо выяснить подробнѣе. Положимъ, что комплексъ A состоитъ изъ элементовъ a, b c d,—комплексъ же B изъ элементовъ x, y, z, u, v. Будемъ считать элементъ a соотвѣтствующимъ, скажемъ, элементу x, элементъ b соотвѣтствующимъ элементу u, элементы c и d соотвѣтствующими элементамъ z и y. Этимъ будетъ установлено соотвѣтствіе между комплексомъ A и комплексомъ B. Это соотвѣтствіе ни въ чемъ иномъ не заключается, какъ въ томъ, что мы считаемъ каждый элементъ комплекса A соотвѣтствующимъ (въ силу нашего соглашенія) нѣкоторому элементу комплекса B. Ясно, что такое соотвѣт е можно установить многими другими способами.

демъ называть **оригиналами**, а элементы комплекса B, къ которымъ они отнесены, ихъ **изображеніями**.

Легко видѣть, какую пользу можетъ приносить такого рода сопряженіе: если комплексъ B намъ хорошо извѣстенъ, то такое соотвѣтствіе даетъ намъ возможность оріентироваться въ другомъ комплексѣ A, который до того представлялся намъ безпорядочнымъ аггрегатомъ элементовъ; каждый элементъ комплекса A какъ бы получаетъ особое названіе.

2. Такого рода соотвѣтствіе будетъ **взаимнымъ**, если намъ пришлось, устанавливая его, воспользоваться каждымъ элементомъ комплекса B, т. е. если къ каждому элементу комплекса B отнесенъ такимъ образомъ нѣкоторый элементъ комплекса A. Такого рода соотвѣтствіе мы будемъ называть **однозначнымъ** [4]).

Если два комплекса могутъ быть сопряжены такого рода однозначнымъ соотвѣтствіемъ, то говорятъ, что они имѣютъ одинаковую мощность [5]).

Предыдущія соображенія не исключаютъ возможности, что комплексъ A совпадаетъ съ комплексомъ B; иными словами, можно устанавливать соотвѣтствіе комплекса съ самимъ собой. При этомъ каждый элементъ можетъ соотвѣтствовать либо себѣ же самому, либо другому элементу. Если каждый элементъ соотвѣтствуетъ самому себѣ, то такое сопряженіе, очевидно, однозначно, и потому каждый комплексъ имѣетъ съ самимъ собой одинаковую мощность [6]).

Нужно замѣтить, что при соотвѣтствіи, связывающемъ комплексъ съ самимъ собой, каждый элементъ сопряженъ съ нѣкоторымъ элементомъ въ качествѣ его оригинала и съ нѣкоторымъ элементомъ въ качествѣ его изображенія; эти два элемента могутъ быть различны [7]).

Примѣрами комплексовъ одинаковой мощности могутъ служить пальцы одной руки и пальцы другой руки или точки одного отрѣзка AB

[4]) Соотвѣтствіе, установленное въ предыдущемъ примѣчаніи, не однозначно, потому что элементъ v комплекса B остался свободнымъ: ему не соотвѣтствуетъ ни одинъ элементъ комплекса A. Если бы въ комплексѣ B элемента v не было, то соотвѣтствіе было бы однозначнымъ.

[5]) Если бы, слѣдовательно, въ предыдущемъ примѣрѣ не было элемента v, то комплексы имѣли бы одинаковую мощность.

[6]) Пусть въ комплексѣ A (a, b, c, d) элементъ a соотвѣтствуетъ элементу b, элементъ b — элементу d, элементъ c элементу a и элементъ d элементу c. Это соглашеніе сопрягаетъ однозначнымъ соотвѣтствіемъ комплексъ A съ самимъ собой. Ясно, что такого рода соотвѣтствія могутъ быть установлены 24 способами, причемъ одно изъ нихъ относитъ каждый элементъ самому себѣ.

[7]) Такъ напримѣръ, въ соотвѣтствіи, установленномъ въ предыдущемъ примѣчаніи, элементу a отвѣчаетъ элементъ b въ качествѣ его изображенія и элементъ c въ качествѣ оригинала.

и точки другого отрѣзка CD. Чтобы убѣдиться въ послѣднемъ, представимъ себѣ, что отрѣзки приложены другъ къ другу подъ угломъ такъ, что концы A и C совпадаютъ. Если мы теперь будемъ считать соотвѣтствующей каждой точкѣ M отрѣзка AB ту точку N отрѣзка CD, которая расположена на прямой MN, параллельной BD, то этимъ будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе между точками одного и другого отрѣзка.

3. Если комплексы A и B, а также комплексы B и C имѣютъ одинаковую мощность, то комплексы A и C также имѣютъ одинаковую мощность. Въ самомъ дѣлѣ, если произвольный элементъ a комплекса A связывается съ опредѣленнымъ элементомъ b комплекса B, а послѣдній съ элементомъ c комплекса C, то мы можемъ отнести элементъ a элементу c; при этомъ каждый элементъ комплекса A будетъ соотвѣтствовать нѣкоторому элементу комплекса C; и такимъ же образомъ, исходя отъ любого элемента комплекса C, мы покажемъ, что ему соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ комплекса A.

4. Каковъ бы ни былъ комплексъ A, всегда существуютъ еще объекты β, которые не содержатся въ комплексѣ A. Такой объектъ β мы можемъ создать, напримѣръ, слѣдующимъ образомъ. Если нѣсколько объектовъ α, α', α''... соединены въ одинъ комплексъ A, то этотъ комплексъ самъ по себѣ, разсматриваемый какъ нѣкоторый объектъ, отличенъ отъ элементовъ α, α', α'' ...., и потому не содержится въ комплексѣ A.

Это соображеніе остается въ силѣ даже въ томъ случаѣ, когда комплексъ A состоитъ только изъ одного элемента, потому что мысль „объектъ α самъ по себѣ образуетъ систему"—представляетъ собой нѣчто отличное отъ объекта α *).

5. Если мы прибавимъ къ комплексу A элементъ β, въ немъ не содержащійся, то мы составимъ новый комплексъ B, который цѣлесообразно обозначить такъ:

$$B = A + \beta; \qquad (1)$$

при этомъ знакъ $+$ (плюсъ) обозначаетъ операцію прибавленія, а знакъ $=$ выражаетъ, что оба символа, которые онъ соединяетъ, обозначаютъ одинъ и тотъ же объектъ.

Точно такъ же, если комплексъ A содержитъ болѣе одного элемента, то мы можемъ составить новый комплексъ такимъ образомъ, что исключимъ изъ него нѣкоторый элементъ α, а совокупность остальныхъ

*) Такимъ образомъ „комплексъ, содержащій всѣ существующіе объекты", которымъ Дедекиндъ (Dedekind) пользуется для доказательства существованія безконечныхъ комплексовъ, не подходитъ подъ понятіе „комплекса" въ томъ смыслѣ, какъ мы его понимаемъ.

элементовъ будемъ разсматривать, какъ комплексъ B. Для выраженія этого мы будемъ пользоваться обозначеніемъ:

$$B = A - \alpha, \qquad (2)$$

при чемъ знакъ — (минусъ) обозначаетъ операцію отниманія.

Подъ частью комплекса A мы будемъ разумѣть такой комплексъ A', всѣ элементы котораго содержатся въ комплексѣ A.

Съ этой точки зрѣнія каждый комплексъ представляетъ часть самого себя. Комплексъ A' называется правильной частью комплекса A, если A' не совпадаетъ съ A, т. е. если комплексъ A содержитъ не только всѣ элементы комплекса A', но еще и другіе элементы. Если A' есть правильная часть комплекса A, то мы будемъ разумѣть подъ символомъ $A-A'$ комплексъ, который остается, если мы удалимъ изъ комплекса A всѣ элементы комплекса A'. Точно такъ же, если A и B суть два комплекса, то мы будемъ разумѣть подъ символомъ $A+B$ комплексъ, содержащій всѣ элементы, входящіе въ составъ комплексовъ A и B.

Если комплексы A и B имѣютъ общіе элементы, то совокупность таковыхъ образуетъ новый комплексъ, который мы будемъ называть, руководясь геометрической аналогіей, пересѣченіемъ комплексовъ A и B. Если два комплекса не имѣютъ общихъ элементовъ, то они не имѣютъ пересѣченія, — не пересѣкаются.

Если всѣ элементы комплекса B содержатся также въ A, то самый комплексъ B представляетъ собою пересѣченіе комплексовъ A и B. Въ этомъ случаѣ $A+B=A$. Если же пересѣченіе D представляетъ собой правильную часть комплекса B, то комплексъ $B-D$ уже не имѣетъ общихъ элементовъ съ комплексомъ A; въ этомъ случаѣ

$$A + B = A + (B - D). \qquad (3)$$

Въ выраженіи $(B-D)$ скобки означаютъ, что этотъ комплексъ долженъ быть присоединенъ какъ одно цѣлое къ комплексу A. Такимъ образомъ выраженіе $A + (B-D)$ означаетъ нѣчто совершенно другое, чѣмъ выраженіе $(A+B)-D$. Первый символъ выражаетъ совокупность всѣхъ тѣхъ элементовъ, которые содержатся либо въ комплексѣ A, либо въ комплексѣ B, либо въ обоихъ комплексахъ. Второй-же символъ выражаетъ совокупность всѣхъ тѣхъ элементовъ, которые содержатся либо въ A либо въ B, но не содержатся въ обоихъ комплексахъ вмѣстѣ. Напротивъ, каковы-бы ни были комплексы A, B и C, всегда имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (4)$$
$$A + B = B + A$$

Точно такъ же, если комплексы A и B не имѣютъ общихъ элементовъ и комплексъ C составляетъ часть комплекса B, то

$$(A+B)-C=A+(B-C);$$

если же B есть часть комплекса A, а C часть комплекса B, то

$$A-(B-C)=(A-B)+C.$$

6. Если A и B суть комплексы одинаковой мощности и α представляетъ собой элементъ, не входящій въ составъ комплекса A, а β есть элементъ, не входящій въ составъ B, то комплексы $A+\alpha$ и $B+\beta$ имѣютъ одинаковую мощность.

Дѣйствительно, если установлено однозначное соотвѣтствіе между комплексомъ A и B, то достаточно отнести элементъ α къ элементу β, чтобы установить однозначное соотвѣтствіе между комплексами $A+\alpha$ и $B+\beta$.

Если всѣ элементы комплекса B входятъ также въ составъ комплекса A, то мы будемъ говорить, что комплексъ B содержится въ комплексѣ A; при этомъ B либо совпадаетъ съ A, либо составляетъ правильную часть его.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ мѣсто слѣдующее предложеніе:

7. Если комплексы A и B имѣютъ одинаковую мощность и α представляетъ собой элементъ комплекса A, а β элементъ комплекса B, то $A-\alpha$ и $B-\beta$ суть комплексы одинаковой мощности.

Въ самомъ дѣлѣ, если комплексы A и B имѣютъ одинаковую мощность, то между ними можетъ быть установлено однозначное соотвѣтствіе. Если при этомъ соотвѣтствіи элементъ α связанъ съ элементомъ β, то достаточно опустить эту пару элементовъ и сохранить тѣ же соотношенія между остальными элементами, чтобы комплексъ $A-\alpha$ былъ однозначно сопряженъ съ комплексомъ $B-\beta$. Если же α связанъ съ элементомъ β' комплекса B, отличнымъ отъ элемента β, и слѣдовательно, элементъ β, въ свою очередь, связанъ съ нѣкоторымъ элементомъ α' комплекса A, отличнымъ отъ α, то достаточно опустить элементы α и β и связать другъ съ другомъ элементы α' и β'; этимъ будетъ вновь установлено однозначное соотвѣтствіе между комплексами $A-\alpha$ и $B-\beta$, и они имѣютъ, слѣдовательно, одинаковую мощность, какъ это требовалось доказать.

§ 3. Числа и счетъ.

1. Согласно изложенному, мы можемъ соединить всѣ комплексы, имѣющіе съ однимъ изъ нихъ, а слѣдовательно, и другъ съ другомъ

(§ 2, 3), одинаковую мощность, въ одну систему, въ одну категорію; такого рода категоріи, вслѣдствіе присущей имъ большой общности, находятъ себѣ широкое примѣненіе. Эти категоріи называются **числами**. Наименованія, которыя они получаютъ, суть **названія чиселъ**, а знаки, которыми они обозначаются на письмѣ, называются **цифрами**. Если a есть знакъ или названіе такого рода категоріи, въ составъ которой входитъ комплексъ A, то говорятъ, что a есть **число элементовъ комплекса** A или, что **комплексъ** A **состоитъ изъ** a **элементовъ**, или короче, что a **есть число комплекса** A, или a **есть значеніе этого числа**, или наконецъ, что **комплексъ** A **имѣетъ мощность** a [8]).

Каждое число вполнѣ опредѣляется однимъ комплексомъ, принадлежащимъ соотвѣтствующей категоріи; такой комплексъ мы будемъ называть **представителемъ этой категоріи**.

Съ этой точки зрѣнія числа не представляютъ собой безсодержательныхъ символовъ, надъ которыми мы оперируемъ по произвольно созданнымъ правиламъ; это есть содержательное родовое понятіе, къ которому мы были приведены практическими потребностями нашего духа и его отношеніемъ къ внѣшнему міру [9]).

Всѣ комплексы, состоящіе только изъ одного элемента, имѣютъ одинаковую мощность; они образуютъ одну категорію, число которой называется „одинъ“ и обозначается символомъ „1.“

2. Если a есть число комплекса A и α **представляетъ собой элементъ, не входящій въ составъ комплекса** A, **то мы будемъ обозначать число комплекса** $A+\alpha$ **символомъ** $a+1$. **Это число** $a+1$ **не мѣняется, если мы замѣнимъ комплексъ** A **другимъ представителемъ числа или элементъ** α **другимъ элементомъ, не входящимъ въ составъ комплекса** A (§ 2, 6).

---

[8]) Въ примѣчаніи 3 мы разсматривали комплексъ A, состоящій изъ элементовъ a, b, c, d. Всѣ комплексы, имѣющіе ту же мощность, объединяются въ одну категорію, которой даютъ названіе „четыре“, и говорятъ, что **такой комплексъ состоитъ изъ четырехъ элементовъ** или, что **четыре есть число этого комплекса**. Такимъ же образомъ и другіе комплексы распредѣляются въ категоріи, объединяющія комплексы одинаковой мощности; съ каждой такой категоріей соединяютъ особое понятіе — ея число, именуемое особымъ названіемъ. Съ этой точки зрѣнія и совокупность прямолинейныхъ отрѣзковъ представляетъ собой такую категорію (§ 2, 2). Если мы будемъ обозначать черезъ ω соотвѣтствующее ей число, то выраженіе: „комплексъ A имѣетъ ω элементовъ“, будетъ означать, что комплексъ A имѣетъ ту же мощность, что и прямолинейный отрѣзокъ, или иначе, что элементы этого комплекса могутъ быть сопряжены однозначнымъ соотвѣтствіемъ съ точками прямолинейнаго отрѣзка.

[9]) Авторъ намекаетъ здѣсь на другую систему построенія основъ ариѳметики, съ точки зрѣнія которой числа представляютъ собой не болѣе какъ символы, надъ которыми по опредѣленнымъ формальнымъ законамъ совершаются операціи. Нужно сказать, что эта вторая теорія имѣетъ свои серьезныя достоинства.

Не исключена, однако, возможность, что комплексы A и $A+\alpha$ имѣютъ одинаковую мощность, такъ что a и $a+1$ выражаютъ одно и то же число.

3. Если число e отлично отъ $e+1$, то оно называется конечнымъ числомъ. Если-же число ω совпадаетъ съ числомъ $\omega+1$, то оно называется безконечнымъ числомъ [10]). Число 1 есть конечное число. Мы апеллируемъ при этомъ къ очевидности, что два объекта (напр. 1, 1) не могутъ быть однозначно сопряжены съ однимъ объектомъ (1). Число $1+1$ или 2, такимъ образомъ отлично отъ 1.

Если число e конечно, то и число $e+1$ конечно.

Это слѣдуетъ непосредственно изъ предложенія § 2,7.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть комплексы A, $A'=A+\alpha$, $A''=A+\alpha+\beta$ будутъ представители чиселъ e, $e+1$, $e+1+1$; если бы комплексы A' и A'' имѣли одинаковую мощность, то въ силу названнаго предложенія комплексы A и A' также имѣли бы одинаковую мощность, т. е. e не было бы конечнымъ числомъ.

4. Теперь мы займемся особыми комплексами Z, элементами которыхъ служатъ числа (числовыми комплексами); именно, мы будемъ обозначать символомъ Z комплексы, обладающіе слѣдующими двумя свойствами:

α) Число 1 содержится въ комплексѣ Z.

β) Если въ комплексѣ Z содержится число z, то въ немъ содержится и число $z+1$.

Эти два свойства во всякомъ случаѣ принадлежатъ комплексу, содержащему всѣ числа. Но существуютъ и другіе числовые комплексы, обладающіе этими свойствами.

Мы опредѣлимъ теперь натуральный рядъ чиселъ N, какъ пересѣченіе всѣхъ комплексовъ Z, обладающихъ свойствами α) и β). Иными словами, мы введемъ въ составъ комплекса N тѣ и только тѣ числа, которыя фигурируютъ во всѣхъ комплексахъ Z.

Согласно этому опредѣленію, число 1 во всякомъ случаѣ фигурируетъ въ комплексѣ N. Кромѣ того, если въ комплексѣ N содержится

[10]) Представимъ себѣ неопредѣленный рядъ точекъ на прямой линіи B, C, D, E, . . . , слѣдующихъ другъ за другомъ на одномъ и томъ же разстояніи одна отъ другой. Обозначимъ черезъ ω соотвѣтствующее этому комплексу число. Отъ точки B съ противоположной стороны на томъ же разстояніи нанесемъ точку A. Если мы присоединимъ ее къ прежнему комплексу, то получимъ новый комплексъ, которому соотвѣтствуетъ число $\omega+1$. Легко показать, что въ этомъ случаѣ новый комплексъ имѣетъ ту же мощность, что и первоначальный. Дѣйствительно, если мы отнесемъ точку A точкѣ B, точку B точкѣ C, точку C точкѣ D, вообще, отнесемъ каждую точку слѣдующей точкѣ, то этимъ будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе между первоначальнымъ и новымъ комплексомъ. Въ данномъ случаѣ число ω совпадаетъ съ $\omega+1$, и потому ω есть безконечное число.

число n, то въ немъ содержится также число $n+1$. Эти числа n мы будемъ *называть натуральными числами.*

5. Всякое натуральное число конечно, т. е. если n есть натуральное число, то оно отлично отъ числа $n+1$. Въ самомъ дѣлѣ, комплексъ E всѣхъ конечныхъ чиселъ, согласно пункту 3, удовлетворяетъ условіямъ α) и β) [1]). Слѣдовательно, E представляетъ собой одинъ изъ комплексовъ Z; поэтому N входитъ въ составъ комплекса E, т. е. каждое число комплекса N конечно.

Справедливо ли также обратное предложеніе, т. е. фигурируетъ-ли каждое конечное число въ натуральномъ рядѣ, — это вопросъ, рѣшеніе котораго мы вынуждены еще отложить.

При помощи натуральнаго ряда чиселъ мы выдѣлимъ частные числовые комплексы слѣдующимъ образомъ:

6. Пусть a будетъ натуральное число; мы будемъ обозначать символомъ Z_a числовой комплексъ, удовлетворяющій слѣдующимъ двумъ требованіямъ:

α') Число $a+1$ входитъ въ составъ комплекса Z_a.

β') Если въ составъ комплекса Z_a входитъ число z, то въ его составъ входитъ также число $z+1$.

Этимъ требованіямъ удовлетворяетъ самый натуральный рядъ N; но имъ удовлетворяютъ и другіе числовые комплексы; каждый такой комплексъ, какъ сказано, мы будемъ обозначать символомъ Z_a. Теперь мы опредѣлимъ комплексъ N_a, какъ пересѣченіе всѣхъ комплексовъ Z_a. Въ такомъ случаѣ комплексъ N_a содержится въ каждомъ комплексѣ Z_a.

Согласно этому, комплексъ Z_{a+1} опредѣляется слѣдующими свойствами:

α'') Число $a+2$ фигурируетъ въ комплексѣ Z_{a+1}.

β'') Если число z содержится въ комплексѣ Z_{a+1}, то въ немъ содержится также и число $z+1$.

(Для краткости мы здѣсь пишемъ $a+2$ вмѣсто $[(a+1)+1)]$.

Отсюда слѣдуетъ, что каждый комплексъ Z_a представляетъ собой также комплексъ Z_{a+1}. Если-же комплексъ Z_{a+1} содержитъ число $a+1$, то онъ представляетъ собой въ то же время комплексъ Z_a; но если комплексъ Z_{a+1} числа $a+1$ не содержитъ, то къ нему достаточно присоединить число $a+1$, чтобы получить комплексъ Z_a. Въ обозначеніяхъ

---

[1]) Дѣйствительно, 1, какъ конечное число, фигурируетъ въ комплексѣ E; кромѣ того, если e есть конечное число, то и $e+1$ есть конечное число, т. е. если e фигурируетъ въ комплексѣ E, то въ немъ фигурируетъ также число $e+1$.

§2 это можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$Z_a = Z_{a+1} + (a+1)$$ [12]

Основываясь на этомъ, легко доказать слѣдующее предложеніе.

7. Число 1 не содержится въ комплексѣ N_1. Обозначимъ черезъ N' числовой комплексъ, который образуется изъ комплекса N, если удалить изъ него число 1, т. е. положимъ $N' = N - 1$. Въ такомъ случаѣ комплексъ N' удовлетворяетъ условіямъ α') и β') предыдущаго пункта при $a = 1$, и потому N' представляетъ собой комплексъ Z_1. Съ другой стороны, комплексъ N' содержится во всякомъ комплексѣ Z_1; въ самомъ дѣлѣ, если къ какому-либо комплексу Z_1 присоединимъ число 1, то получимъ комплексъ Z; если бы поэтому существовалъ такой комплексъ Z_1, въ которомъ не содержался бы комплексъ N', то присоединивъ къ нему 1, мы получили бы такой комплексъ Z, въ которомъ не содержался бы комплексъ N,—что противорѣчитъ опредѣленію натуральнаго ряда [13]).

8. Если число a не содержится въ комплексѣ N_a, то число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_{a+1}.

Въ самомъ дѣлѣ, если число a не входитъ въ составъ комплекса N_a, то оно не входитъ также въ составъ комплекса $N_a' = N_a - (a+1)$; поэтому комплексъ N_a' удовлетворяетъ требованіямъ α'') и β''), а потому

---

[12]) Прибавимъ къ этому еще слѣдующее: если какой-либо комплексъ Z_1 содержитъ число 1, то онъ представляетъ собой также комплексъ Z; если же въ немъ нѣтъ числа 1, то достаточно присоединить число 1, чтобы получить комплексъ Z. Дѣйствительно, условіе α) пункта 4 выполняется присоединеніемъ числа 1, условіе же β), присущее и комплексу Z_1, этимъ не нарушается, такъ какъ число $1+1$ имѣется и въ комплексѣ Z_1. Въ обозначеніяхъ § 2 это можно выразить такъ:

$$Z = Z_1 + 1$$

(ибо, если 1 входитъ въ составъ комплекса Z_1, то комплексъ Z_1+1 совпадаетъ съ комплексомъ Z_1)

[13]) Пункты 7—9 въ первоначальной редакціи содержали погрѣшность; вслѣдствіе этого авторъ опубликовалъ позже исправленный текстъ, съ котораго и сдѣланъ переводъ; исправленный текстъ, однако, изложенъ очень сжато, и мы считаемъ нужнымъ его пояснить.

Авторъ хочетъ прежде всего показать, что N' есть комплексъ Z_1; для этого ему нужно обнаружить, что, во первыхъ, въ составъ комплекса N' входитъ число $1+1$, во вторыхъ, если въ составъ комплекса N' входитъ число n, то въ его составъ входитъ число $n+1$.

Въ составъ комплекса N число 1 входитъ; поэтому въ составъ его входитъ также и число $1+1$ (п. 4); такъ какъ изъ комплекса N удалено только число 1, то число $1+1$ въ комплексѣ N' осталось; первое требованіе, слѣдовательно, выполнено.

Обращаемся теперь ко второму требованію; комплексъ N этому требованію удовлетворяетъ. Если бы въ составъ комплекса N входило число x, удовлетворяющее условію $x+1=1$, то, устраняя изъ него число 1 и сохраняя число x, мы бы, ко-

представляетъ собой комплексъ Z_{a+1}. Съ другой стороны, комплексъ N'_a содержится въ каждомъ комплексѣ Z_{a+1}; дѣйствительно, $Z_{a+1}+$ $+(a+1)$ есть комплексъ Z_a (п. 6), и потому содержитъ комплексъ N_a; слѣдовательно, комплексъ Z_{a+1} содержитъ $N_a-(a+1)$, т. е. N_a'. Изъ сказаннаго вытекаетъ, что $N_a'=N_{a+1}$.

9. Число a не содержится въ комплексѣ N_a.

Дѣйствительно, обозначимъ черезъ A комплексъ чиселъ a, удовлетворяющихъ требованію, что комплексъ N_a не содержитъ числа a; въ такомъ случаѣ, согласно п. 7, число 1 входитъ въ составъ комплекса A. Съ другой стороны, въ виду п. 8, если въ составъ комплекса A входитъ число z, то въ его составъ входитъ также число $z+1$. Вслѣдствіе этого комплексъ A представляетъ собой комплексъ Z, и потому содержитъ въ себѣ натуральный рядъ (п. 4). А такъ какъ индексъ a въ обозначеніи комплекса N_a, согласно опредѣленію (п. 6), есть натуральное число, то оно входитъ въ составъ комплекса A, т. е комплексъ N_a не содержитъ числа a.

10. Если число b содержится въ комплексѣ N_a, то комплексъ N_b содержится въ комплексѣ N_a.

Дѣйствительно, если комплексъ N_a содержитъ число b, то онъ содержитъ также число $b+1$; а такъ какъ онъ удовлетворяетъ также условію β'), то онъ при этихъ условіяхъ представляетъ собой комплексъ Z_b, и потому содержитъ въ себѣ комплексъ N_b (п. 6).

11 Если число b содержится въ комплексѣ N_a, то число a не содержится въ комплексѣ N_b.

Согласно п. 9, число a не содержится въ комплексѣ N_a; поэтому, при условіяхъ заданія, оно не можетъ содержаться и въ комплексѣ N_b,

нечно, нарушили это условіе Но дѣло въ томъ, что такое число x не только не входитъ въ составъ комплекса N, но не введено вовсе опредѣленіемъ п. 1, ибо его представителемъ долженъ былъ бы служить комплексъ, не имѣющій вовсе элементовъ, а это противорѣчитъ понятію о комплексѣ.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что комплексъ N' удовлетворяетъ обоимъ требованіямъ, т. е представляетъ собой комплексъ Z_1 Такъ какъ комплексъ N_1 входитъ въ составъ всякаго комплекса Z_1 (п. 6), то N_1 входитъ въ составъ комплекса N'

Съ другой стороны, можно показать, что N' входитъ въ составъ каждаго комплекса Z_1; допустимъ, дѣйствительно, что Z_1 есть комплексъ Z_1, въ составъ котораго N' не входитъ; но въ такомъ случаѣ комплексъ $N'+1=N$ не входилъ бы въ составъ комплекса $Z_1+1=Z$ (см. предыд примѣчаніе), а это противорѣчитъ опредѣленію натуральнаго ряда N. Итакъ, комплексъ N' входитъ въ составъ всякаго комплекса Z_1, а потому входитъ въ составъ N_1, согласно опредѣленію этого комплекса. Такъ какъ N_1 входитъ также въ составъ N', то $N_1=N'$, а потому комплексъ N_1 не содержитъ числа 1.

Понявъ всѣ детали доказательства настоящаго пункта, уже нетрудно уяснить себѣ доказательства п. п 8 и 9.

такъ какъ всѣ элементы послѣдняго комплекса въ этомъ случаѣ принадлежатъ комплексу N_a (п. 10).

Мы будемъ называть комплексъ N_a совокупность натуральныхъ чиселъ, которыя больше числа a. Если b есть число комплекса N_a, то мы будемъ говорить, что число „b больше числа a“ и будемъ выражать это въ знакахъ такъ:

$$b > a.$$

Въ этой терминологіи предложенія п. п. 9, 10 и 11 могутъ быть выражены такъ:

9*. Число a не больше числа a.

10*. Если число b больше числа a, а число c больше числа b, то число c больше числа a.

11*. Если число b больше числа a, то число a не больше числа b.

12. Каждое натуральное число n, за исключеніемъ 1, можетъ быть получено изъ нѣкотораго опредѣленнаго натуральнаго числа m прибавленіемъ къ нему единицы, т. е. существуетъ опредѣленное такое число m, что $n = m + 1$. Это число m мы будемъ обозначать символомъ $n - 1$.

Чтобы доказать высказанное утвержденіе, обозначимъ черезъ N' комплексъ, содержащій всѣ числа вида $m + 1$, гдѣ m есть натуральное число. Въ составъ этого комплекса входитъ число 2, т. е. $(1 + 1)$; кромѣ того, если число a входитъ въ составъ этого комплекса, то въ немъ содержится и число $a + 1$. Слѣдовательно, комплексъ N' удовлетворяетъ требованіямъ α') и β') п. 6 при $a = 1$, и потому представляетъ собой комплексъ Z_1; такимъ образомъ комплексъ N_1 входитъ въ составъ комплекса N'. Но съ другой стороны, каждое число комплекса N' входитъ въ составъ комплекса N_1, ибо послѣдній содержитъ всѣ натуральныя числа, кромѣ 1; вслѣдствіе этого комплексы N_1 и N' совпадаютъ.

Итакъ, каждое число комплекса N_1 можетъ быть представлено въ видѣ $m + 1$. Что же касается того, что данному числу $m + 1$ отвѣчаетъ только одно число m, то это вытекаетъ изъ предложенія § 2, 7; въ самомъ дѣлѣ, согласно этому предложенію, если A представляетъ собой комплексъ мощности $a + 1$ и α есть какой либо элементъ этого комплекса, то всѣ комплексы $A - \alpha$ имѣютъ одинаковую мощность.

§ 4. Теорема о совершенной индукціи.

На этомъ точномъ опредѣленіи натуральнаго ряда чиселъ покоится предложеніе, представляющее собой одно изъ наиболѣе важныхъ и плодотворныхъ средствъ для познаванія математическихъ истинъ; это есть

такъ называемое предложеніе о совершенной индукціи, или заключеніе отъ n къ $n+1$. Предложеніе это заключается въ слѣдующемъ.

Пусть $\mathfrak{S}_n$ представляетъ собой нѣкоторое утвержденіе относительно неопредѣленнаго натуральнаго числа n, т. е. предложеніе, содержащее неопредѣленное натуральное число n. Если это утвержденіе оказалось справедливымъ

a) для нѣкотораго частнаго значенія неопредѣленнаго числа $n = a$.

b) а также для всякаго числа $n+1$ въ томъ случаѣ, если оно справедливо для числа n, то оно справедливо также для всѣхъ чиселъ комплекса N_a, т. е. для всѣхъ чиселъ n, которыя больше, нежели a.

Итакъ, примемъ условія a) и b) и обозначимъ черезъ S комплексъ тѣхъ чиселъ n, для которыхъ предложеніе $\mathfrak{S}_n$ справедливо. Согласно условіямъ a) и b) число $a+1$ содержится въ комплексѣ S; этотъ комплексъ удовлетворяетъ, слѣдовательно, требованіямъ α') и β') § 3. Слѣдовательно, комплексъ N_a входитъ въ составъ комплекса S. Иначе говоря, каждое число комплекса N_a (т. е. каждое число, которое больше, нежели a) принадлежитъ къ тѣмъ числамъ n, для которыхъ утвержденіе $\mathfrak{S}_n$ справедливо,—что и требовалось доказать.

Индуктивный процессъ умозаключенія, который представляетъ собою основу всѣхъ опытныхъ наукъ, заключается въ томъ, что нѣкоторый фактъ, который мы наблюдали въ отдѣльныхъ случаяхъ, принимается за общій законъ. Дальнѣйшія наблюденія либо постоянно подтверждаютъ это допущеніе, либо опровергаютъ его. Въ математикѣ такого рода процессъ можетъ служить только указаніемъ того пути, которому нужно слѣдовать при разысканіи истины; для дѣйствительнаго же доказательства необходимо дополненіе, точное обоснованіе, которое во многихъ случаяхъ достигается примѣненіемъ доказаннаго сейчасъ предложенія; оно называется поэтому предложеніемъ о совершенной индукціи.

Если предложеніе или понятіе, содержащее неопредѣленное число n, приводится отъ случая $n+1$ къ случаю n, то такой пріемъ называютъ также рекуррентнымъ.

§ 5. Расположеніе чиселъ натуральнаго ряда по величинѣ.

Пользуясь совершенной индукціей, мы можемъ доказать предложеніе, обратное тому, которое было приведено въ § 3, 11.

1. Если число a отлично отъ числа b и не содержится въ комплексѣ N_b, то число b содержится въ комплексѣ N_a.

a) Предложеніе справедливо при $a = 1$. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ комплексъ N_1, выключая изъ натуральнаго ряда N одно только

число 1 (§ 3, 7); поэтому каждое натуральное число, отличное отъ 1, содержится въ комплексѣ N_1.

b′) Допустимъ теперь, что предложеніе 1 доказано для нѣкотораго числа a. Пусть b будетъ число отличное отъ a. Дано, что

число a не содержится въ комплексѣ N_b и, слѣдовательно, (согласно допущенію) число b содержится въ комплексѣ N_a.

Требуется доказать:

если число b отлично отъ $a+1$ и число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_b, то число b содержится въ комплексѣ N_{a+1}.

При доказательствѣ мы можемъ также принимать, что число b отлично отъ a; если бы $b=a$, то число $a+1$ содержалось бы въ комплексѣ N_b (§ 3, 6).

Такъ какъ число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_b, то въ немъ не содержится и число a: если бы послѣднее входило въ составъ комплекса N_b, то въ его составъ, согласно опредѣленію (§ 3, β′), должно было бы войти и число $a+1$.

Согласно заданію, число b входитъ въ составъ комплекса N_a; такъ какъ при этомъ (§ 3, 7)

$$N_a = N_{a+1} + (a+1), \qquad (1)$$

число же b отлично отъ $a+1$, то оно необходимо входитъ въ составъ комплекса N_{a+1}, что и требовалось доказать.

Такимъ образомъ, въ силу теоремы о совершенной индукціи, предложеніе 1 справедливо при $a=1$, а также для всѣхъ чиселъ a, содержащихъ въ комплексѣ N_1, т. е. для всѣхъ чиселъ натуральнаго ряда. Изъ всего сказаннаго (§ 3, 11 и § 5, 1) вытекаетъ слѣдующій выводъ: если числа a и b различны, то либо число a содержится въ комплексѣ N_b, либо же число b содержится въ комплексѣ N_a; то и другое вмѣстѣ не можетъ имѣть мѣста. Это даетъ возможность расположить числа натуральнаго ряда по величинѣ.

Дополнимъ опредѣленіе § 3, 11, именно: если число b содержится въ комплексѣ N_a, то мы будемъ говорить, что число b больше числа a, а число a меньше числа b.

Слѣдовательно, если число a отлично отъ числа b и не больше, нежели b, то оно меньше числа b. Относительно двухъ различныхъ чиселъ a и b такимъ образомъ строго опредѣлено, которое изъ нихъ больше, которое меньше. Если b есть большее изъ этихъ двухъ чиселъ, то мы будемъ писать

$$b > a \text{ и } a < b;$$

одно изъ этихъ соотношеній представляетъ собой слѣдствіе другого.

Вмѣстѣ съ тѣмъ предложеніе § 3, 10* можетъ быть дополнено слѣдующимъ образомъ.

2. Если число a меньше, нежели b, а b меньше, нежели c, то число a меньше, нежели c.

3. Если число a меньше, нежели b, то $a+1$ меньше, нежели $b+1$.

Вь самомъ дѣлѣ,

$$N_{a+1} = N_a - (a+1) \text{ и } N_{b+1} = N_b - (b+1). \qquad (2)$$

Если теперь $a < b$, то комплексъ N_b представляетъ собой правильную часть комплекса N_a, при чемъ число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_b; слѣдовательно, комплексъ N_b входить въ составъ комплекса N_{a+1}; комплексъ-же $N_b-(b+1)$ составляетъ часть комплекса N_{a+1}. Это и составляетъ содержаніе доказываемаго предложенія [14]).

4. Всѣ комплексы N_a имѣютъ одинаковую мощность—и именно ту же, что и комплексъ N.

Дѣйствительно, если отнесемъ каждый элементъ a комплекса N числу $a+1$ комплекса N_1, то между комплексами N и N_1 будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе; они имѣютъ, слѣдовательно, одинаковую мощность. Точно такъ же мы получаемъ однозначное соотвѣтствіе между комплексами N_a и N_{a+1}, если мы отнесемъ каждый элементъ n комплекса N_a элементу $n+1$ комплекса N_{a+1}; вслѣдствіе этого комплексъ N_{a+1} имѣетъ ту-же мощность, что и комплексъ N_a. Въ силу закона индукціи, мы отсюда заключаемъ, что комплексы N_a и N имѣютъ одну и ту-же мощность. Если мы обозначимъ мощность всѣхъ этихъ комплексовъ черезъ ω, то число ω совпадаетъ съ $\omega+1$, а потому ω есть безконечное или, по Кантору (G. Cantor), трансфинитное число.

[14]) Это доказательство также изложено очень сжато.

Прежде всего покажемъ, что при $b>a$ число $a+1$ не содержится въ комплексѣ N_b. Такъ какъ $b>a$, то число b принадлежитъ комплексу N_a (опр. § 3,11). Соотношеніе (1) обнаруживаетъ, что число b либо совпадаетъ при этомъ съ $a+1$, либо содержится въ комплексѣ N_{a+1}. Если число b совпадаеть съ $a+1$, то N_b есть N_{a+1}, а потому число $a+1$ въ его составъ не входитъ (§ 3,9). Если же число b входитъ въ составъ комплекса N_{a+1}, то и въ этомъ случаѣ число $a+1$ не входитъ въ составъ комплекса N_b (3, 11).

По условію $b>a$, т е. число b приналлежитъ комплексу N_a, а потому комплексъ N_b входитъ въ составъ комплекса N_a (§ 3, 10). Но такъ какъ число $a+1$ въ комплексѣ N_b не содержится, то мы можемъ исключить изъ комплекса N_a число $(a+1)$, и комплексъ N_b будетъ все же содержаться въ оставшемся комплексѣ. Но оставшійся комплексъ [соотн. (2)] есть N_{a+1}; слѣдовательно, комплексъ N_b входитъ въ составъ комплекса N_{a+1}, а потому въ составъ комплекса N_{a+1} входитъ и число $b+1$, принадлежащее комплексу N_b. Иными словами, $b+1>a+1$ (опр. § 3, 11).

Всякій комплексъ, имѣющій ту же мощность, что и комплексъ N, называется исчислимымъ комплексомъ.

5. Если комплексъ M содержитъ въ себѣ безконечный комплексъ A, то онъ и самъ представляетъ собой безконечный комплексъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть α будетъ элементъ, не входящій въ составъ комплекса M; составимъ комплексъ $M' = M + \alpha$. Такъ какъ по условію комплексъ A безконеченъ, то онъ можетъ быть связанъ однозначнымъ соотвѣтствіемъ съ комплексомъ $A + \alpha$. Если мы затѣмъ отнесемъ каждый изъ остальныхъ элементовъ комплекса M (т. е. элементы комплекса $M - A$) самому себѣ, то этимъ будетъ установлено однозначное соотвѣтствіе между M' и M. Если поэтому ω есть число комплекса M, то оно совпадаетъ съ $\omega + 1$, и потому безконечно.

6. Если мощность какого либо комплекса M не совпадаетъ съ мощностью ни одного изъ чиселъ натуральнаго ряда, то онъ содержитъ въ себѣ часть, имѣющую мощность натуральнаго ряда, а потому онъ безконеченъ.

Комплексъ M, какъ всякій комплексъ, содержитъ въ себѣ часть M_1 мощности 1. Выдѣлимъ такую часть и отнесемъ къ ней число 1.

Теперь допустимъ, что комплексъ M имѣетъ часть M_a мощности натуральнаго числа a, содержащую въ себѣ M_1. Такъ какъ самый комплексъ M не имѣетъ мощности натуральнаго числа, то комплексъ M_a представляетъ собою правильную часть комплекса M,—иначе говоря, въ комплексѣ M имѣются элементы, которыхъ нѣтъ въ комплексѣ M_a. Выбравъ одинъ опредѣленный изъ этихъ элементовъ, отнесемъ ему число $a+1$ и присоединимъ его къ комплексу M_a. Такимъ образомъ мы составимъ комплексъ M_{a+1}, заключающій въ себѣ комплексъ M_a и представляющій собой часть комплекса M. Въ силу закона индукціи мы отсюда заключаемъ, что такое построеніе возможно для каждаго числа a,—иными словами, что каждому числу натуральнаго ряда можно отнести элементъ комплекса M, что и требовалось доказать.

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что понятіе о натуральномъ числѣ совпадаетъ съ понятіемъ о конечномъ числѣ, какъ оно было установлено въ § 3, 3.

7. Во всякомъ конечномъ числовомъ комплексѣ S_a, содержащемъ a натуральныхъ чиселъ, имѣется одно наибольшее и одно наименьшее число.

Само собою разумѣется, что теорема справедлива при $a = 1$; въ этомъ случаѣ комплексъ A состоитъ изъ одного только числа, которое само можетъ быть разсматриваемо, какъ самое большее и самое меньшее число этого комплекса. Допустимъ теперь, что теорема доказана для нѣ-

котораго опредѣленнаго значенія a, и пусть ζ_1 будетъ самое меньшее, ζ_2 самое большее число комплекса S_a. Каждый комплексъ S_{a+1} получается изъ нѣкотораго комплекса S_a путемъ присоединенія одного новаго числа ζ_0. Если теперь $\zeta_0 < \zeta_1$, то ζ_0 представляетъ собою самое меньшее, ζ_2 самое большее число комплекса S_{a+1}; если $\zeta_0 > \zeta_2$, то ζ_1 есть самое меньшее, ζ_0 самое большее число комплекса S_{a+1}; если, наконецъ, $\zeta_1 < \zeta_0 < \zeta_2$, то ζ_1 есть самое меньшее, ζ_2 самое большее число комплекса S_{a+1}. Въ силу совершенной индукціи, предложеніе такимъ образомъ доказано.

§ 6. Кардинальныя числа. Системы счисленія.

Если мы выключимъ изъ натуральнаго ряда N комплексъ N_a, то останутся, кромѣ числа a, только тѣ числа, которыя меньше a, ибо каждое число, большее, нежели a, принадлежитъ комплексу N_a.

Этотъ комплексъ мы будемъ обозначать черезъ E_a, такъ что

$$E_a = N - N_a.$$

Комплексъ E_a состоитъ, слѣдовательно, изъ всѣхъ чиселъ n, удовлетворяющихъ условію

$$n \leqq a,$$

или—въ словахъ—изъ всѣхъ чиселъ, которыя равны или меньше числа a.

1. Комплексъ E_{a+1} получается изъ комплекса E_a путемъ присоединенія къ послѣднему числа $a+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ комплекса N_a мы получаемъ комплексъ N_{a+1}, выключая изъ него число $a+1$; поэтому, чтобы изъ комплекса $N-N_a$ получить комплексъ $N-N_{a+1}$, къ нему нужно только присоединить число $a+1$.

2. Число E_a имѣетъ мощность a.

Доказательство ведется индуктивнымъ путемъ. Предложеніе справедливо, если $a = 1$, потому что комплексъ E_1 содержитъ только одно число 1. Если же предложеніе справедливо для комплекса E_a, то, въ силу предыдущаго предложенія, оно справедливо также для комплекса E_{a+1}.

Итакъ, E_a есть конечный комплексъ, и если $b > a$, то комплексъ E_a представляетъ собой правильную часть комплекса E_b, ибо комплексъ N_b есть правильная часть комплекса N_a.

Если поэтому комплексы A и B суть представители натуральныхъ чиселъ a и b, то комплексъ A, которому соотвѣтствуетъ меньшее число можетъ быть приведенъ въ однозначное соотвѣтствіе съ правильною частью комплекса B; и обратно, если одинъ изъ двухъ конечныхъ комплексовъ можетъ быть приведенъ въ однозначное соотвѣтствіе съ правильною частью другого, то ему отвѣчаетъ меньшее число.

Комплексъ E_a представляетъ собой кардинальное (количественное) число. Онъ является наиболѣе удобнымъ представителемъ категоріи, содержащей всѣ комплексы мощности a; имъ и пользуются, большей частью, для этой цѣли. Каждый конечный комплексъ M можетъ быть однозначно сопряженъ съ однимъ изъ комплексовъ E_a. Самое производство этого сопряженія называется **счетомъ**.[15]) Вмѣстѣ съ тѣмъ мы приходимъ къ заключенію, что результатъ счета элементовъ комплекса не зависитъ отъ порядка, въ которомъ мы производимъ отсчетъ[16]). Для производства счета элементы комплекса N получаютъ опредѣленныя названія и обозначаются особыми знаками, между которыми основными являются

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Такъ какъ при счетѣ комплексовъ, содержащихъ много элементовъ, запасъ названій и знаковъ для чиселъ скоро бы истощился, то пришлось прибѣгнуть къ особому способу производства счета; способъ этотъ заключается въ томъ, что извѣстныя группы чиселъ соединяются въ новыя группы, и производится счетъ не отдѣльныхъ единицъ, а этихъ группъ.

Это сказывается уже въ языкѣ въ образованіи словъ: десять, двадцать, тридцать, сто, двѣсти, триста и т. п. Но еще совершеннѣе наша десятичная система счисленія. Въ этой системѣ, когда мы пишемъ какую нибудь цифру a, необходимо чѣмъ-нибудь обозначить, какія единицы она выражаетъ. Когда искусство счета находилось еще въ первобытномъ состояніи, то это достигалось тѣмъ, что цифры, смотря по значенію выражаемыхъ ими единицъ, помѣщались въ особыя рубрики счетной таблицы или счетной доски (Abacus). По сравненію съ этимъ было огромнымъ шагомъ впередъ, когда пришли къ мысли обозначать особымъ знакомъ, нулемъ, „0", если какая-либо рубрика остается незанятой, т. е. не содержитъ вовсе ни одной единицы. Благодаря этой идеѣ, весь аппаратъ оказался вовсе излишнимъ, такъ какъ мѣсто, занимаемое цифрой, оказалось достаточнымъ для обозначенія единицъ, которыя она выражаетъ. Такова простая мысль, служащая основаніемъ совершенной системы счисленія, которой мы теперь пользуемся.

Это удивительно простое твореніе человѣческаго духа, вліяніе котораго на все развитіе западной культуры, какъ правильно замѣчаетъ Кронекеръ (Kronecker), даже не можетъ быть достаточно оцѣнено, возникло,

[15]) Если намъ нужно сосчитать элементы комплекса A (a, b, c, d), то мы относимъ элементу a число 1, элементу b число 2, элементу c число 3 и элементу d число 4. Операція закончена и заключается въ томъ, что комплексъ A однозначно сопряженъ съ комплексомъ E_4.

[16]) Потому что каждый комплексъ, какъ было показано выше, можетъ быть связанъ однозначнымъ соотвѣтствіемъ только съ однимъ изъ комплексовъ E_a.

повидимому, въ Индіи и съ XII столѣтія, начинаеть, благодаря арабамъ, медленно распространяться на Западѣ.

Интересная попытка научно произвести соединеніе числовыхъ группъ въ высшія единицы имѣется въ литературѣ древней Греціи у Архимеда (287—212 до Р. Х.) въ недошедшемъ до насъ письмѣ къ Дзейксипу (Ζεύξιππος,) а также въ другомъ сохранившемся его сочиненіи „ψαμμίτης" („счетъ песка"). Послѣднее сочиненіе замѣчательно еще въ томъ отношеніи, что въ немъ имѣются свѣденія о космогоническихъ воззрѣніяхъ древнихъ.

Въ этомъ сочиненіи авторъ ставитъ себѣ задачей называть весьма большія числа; онъ облекаетъ эту задачу въ своеобразную форму: онъ хочетъ назвать число, превышающее число зернъ песка, которое можетъ содержать шаръ, обнимающій всю вселенную. Съ чрезвычайно утомительной тщательностью онъ вычисляеть массу, которую онъ долженъ при этомъ принять, чтобы быть увѣреннымъ, что онъ не оцѣниваетъ ее слишкомъ малымъ числомъ *).

Чтобы называть такія громадныя числа, онъ разсматриваетъ числа до ста милліоновъ (миріадъ миріадовъ), какъ первыя числа. Число сто милліоновъ, которое въ нашей системѣ счисленія изображается 1 съ восемью нулями, образуетъ единицу вторыхъ чиселъ, которыя онъ также считаетъ до ста милліоновъ. Изъ ста милліоновъ этихъ единицъ онъ образуетъ единицу третьихъ чиселъ, которая изображается у насъ 1 съ 16 нулями. Чтобы сосчитать зерна песка, нужно дойти только до восьмыхъ чиселъ, единица которыхъ изображается у насъ черезъ 1 съ 64 нулями. Но Архимедъ въ своихъ теоретическихъ разсужденіяхъ доходитъ до

*) Любопытенъ способъ, которымъ Архимедъ пользуется для опредѣленія размѣровъ вселенной.

Обыкновенная точка зрѣнія, говоритъ онъ, заключается въ томъ, что земля составляетъ центръ вселенной и что радіусъ круга, по которому солнце катится вокругъ земли, представляетъ собой въ то же время радіусъ вселенной. Между тѣмъ Аристархъ Самосскій (около 270 г. до Р. Х.) допускаетъ, что солнце представляетъ собой центръ, вокругъ котораго вращается весь міръ; радіусъ же вселенной, т. е. радіусъ сферы неподвижныхъ звѣздъ, относится къ радіусу земной орбиты, какъ поверхность шара къ своему центру.

Аристархъ, очевидно, хотѣлъ этимъ сказать, что вселенная безконечна и неизмѣрима; но Архимедъ пользуется этимъ для опредѣленнаго измѣренія. Такъ какъ не можетъ быть рѣчи объ отношеніи поверхности шара къ ея центру, т. е. къ точкѣ, не имѣющей размѣровъ, то онъ толкуетъ слова Аристарха въ томъ смыслѣ, что сфера неподвижныхъ звѣздъ относится къ сферѣ земного пути такъ, какъ по обычному воззрѣнію вселенная, т. е. сфера солнечной орбиты (вокругъ земли), относится къ своему центру, т. е. къ поверхности земли. Разстояніе земли отъ солнца онъ принимаетъ при этомъ слишкомъ малымъ, относительно же размѣровъ земли его соображенія гораздо болѣе близки къ истинѣ.

чиселъ стомилліоннаго порядка, послѣднее изъ которыхъ (изображаемое у насъ единицей съ 800 000 000 нулей) образуетъ единицу **второго періода**, съ которой можно далѣе поступать такъ же, какъ съ простой единицей.

Въ теоретическихъ разсужденіяхъ мы будемъ часто обозначать числа буквами, какъ мы это неоднократно уже дѣлали выше, чтобы выражать короче и понятнѣе, нежели въ словахъ, что соотвѣтствующія утвержденія относятся не къ тѣмъ или другимъ опредѣленнымъ числамъ, а ко всякому числу вообще. Но эти буквы не означаютъ, какъ въ греческомъ языкѣ, опредѣленныхъ чиселъ; напротивъ того онѣ **могутъ быть** замѣняемы совершенно произвольными числами. Поэтому операціи надъ такого рода **знаками** или **символами** называются **буквенными вычисленіями**.

Предложеніе, высказывающее, что нѣкоторый символъ a имѣетъ то же значеніе, что и символъ b, называется **равенствомъ**; при помощи математическихъ символовъ оно выражается такъ:

$$a = b.$$

ГЛАВА II.
Ариѳметическія дѣйствія.

§ 7. Сложеніе.

Мы воспользуемся совершенной индукціей для доказательства слѣдующаго предложенія.

1. Если мы соединимъ два конечныхъ комплекса A и B въ одинъ комплексъ, то получимъ конечный комплексъ.

При доказательствѣ мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что комплексы A и B не имѣютъ общихъ элементовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ элементы комплекса B принадлежатъ также комплексу A, то, комплексъ $A+B=A$, а потому представляетъ собой, согласно условію, конечный комплексъ. Если же D есть пересѣченіе комплексовъ A и B то $B—D$ есть часть комплекса B, не имѣющая общихъ элементовъ съ комплексомъ A; вмѣстѣ съ тѣмъ (§ 2, 5)

$$A+B=A+(B-D).$$

Такимъ образомъ мы можемъ съ самаго начала принять, что комплексы A и B не имѣютъ общихъ элементовъ. Если теперь комплексъ B содержитъ только одинъ элементъ β, то доказываемая теорема справедлива, потому что комплексъ $A+B$, согласно предложенію § 3, 3, представляетъ собой конечный комплексъ. Теперь примемъ, что b есть число элементовъ комплекса B и что наше предложеніе для комплексовъ A и B уже доказано, такъ что $A+B$ представляютъ собой конечный комплексъ. Если теперь β' представляетъ собой новый элементъ, не содержащійся ни въ A ни въ B, то $B+\beta'$ также есть конечный комплексъ, число элементовъ котораго есть $b+1$. Поэтому комплексъ

$$(A+B)+\beta'=A+(B+\beta'),$$

въ силу того же § 3, 3, конеченъ.

Всѣ условія, необходимыя для примѣненія совершенной индукціи, такимъ образомъ на лицо, и, слѣдовательно, наша теорема доказана.

2. Итакъ, если A и B суть конечные комплексы, не имѣющіе общихъ элементовъ, а a и b суть ихъ числа, то комплексу $A+B$ также отвѣчаетъ опредѣленное число, которое мы будемъ обозначать символомъ $a+b$ и называть суммою чиселъ a и b. Это число $a+b$ не мѣняется, если мы замѣнимъ комплексы A и B другими комплексами A' и B' той же мощности. Въ самомъ дѣлѣ, каждое однозначное соотвѣтствіе, связывающее комплексъ A съ комплексомъ A' и комплексъ B съ B', устанавливаетъ также однозначное соотвѣтствіе между комплексами $A+B$ и $A'+B'$. Слѣдовательно, чтобы опредѣлить число $a+b$, мы можемъ воспользоваться любыми представителями чиселъ a и b, напр. пальцами руки, монетами; вообще другого пути для этой цѣли не существуетъ. Съ ранняго дѣтства мы запечатлѣваемъ въ своей памяти результаты образованія суммы для небольшихъ чиселъ и во всякій моментъ можемъ ими воспользоваться при надобности. Наша индійская система счисленія имѣетъ то преимущество, что намъ достаточно знать результаты для немногихъ случаевъ, когда a и b взяты изъ ряда чиселъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Образованіе суммы называютъ также сложеніемъ или складываніемъ. Относительно сложенія, на основаніи предыдущаго, легко вывести слѣдующія основныя предложенія.

3. Въ § 2, 5 мы видѣли, что

$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

каковы бы ни были комплексы A, B и C. Если мы примѣнимъ это соотношеніе къ тому случаю, когда A, B и C представляютъ собой конечные комплексы, не имѣющіе общихъ элементовъ, и обозначимъ черезъ a, b и c соотвѣтствующія имъ числа, то мы отсюда получимъ:

$$a+b=b+a, \qquad (1)$$
$$(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b. \qquad (2)$$

Естественно, что числа a, b и c не должны быть необходимо различны. Первое изъ этихъ соотношеній выражаетъ, что сумма не зависитъ отъ порядка сложенія и называется перемѣстительнымъ или коммутативнымъ закономъ. Второе соотношеніе выражаетъ, что для сложенія трехъ чиселъ можно сначала составить сумму любыхъ двухъ изъ нихъ и къ послѣдней прибавить третье число. Это можетъ быть выполнено тремя способами, которые всѣ даютъ одинъ и тотъ же результатъ. Это соотношеніе извѣстно подъ названіемъ сочетательнаго или ассоціативнаго закона.

Эти законы допускаютъ еще значительное обобщеніе. Если $A, B, C, \ldots N$ суть произвольные комплексы въ конечномъ числѣ, то существуетъ

опредѣленный комплексъ S, который содержитъ всѣ элементы этихъ комплексовъ и никакихъ другихъ. Этотъ комплексъ можно обозначить символомъ

$$S = A + B + C + \dots + N.$$

При помощи совершенной индукціи, на основаніи предложенія 1, не трудно вывести, что S есть конечный комплексъ, если конечны комплексы $A, B, C \dots N$ [1]. Если комплексы $A, B, C \dots N$ не имѣютъ попарно никакихъ общихъ элементовъ, то число комплекса S называется суммой чиселъ комплексовъ $A, B, C \dots N$; если обозначимъ послѣднія числа черезъ $a, b, c \dots n$, а число комплекса S черезъ s, то мы будемъ писать

$$s = a + b + c + \dots + n;$$

числа $a, b, c \dots n$ мы будемъ называть слагаемыми, образующими сумму s.

Число s опредѣляется посредствомъ отсчета элементовъ въ комплексѣ S. При вычисленіи поступаютъ обыкновенно короче: пишутъ слагаемыя въ произвольной послѣдовательности и затѣмъ, начиная сверху или снизу, прибавляютъ каждое слѣдующее число къ полученной уже суммѣ. Что результатъ этого вычисленія не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ, слѣдуетъ изъ того, что число не зависитъ отъ порядка, въ какомъ мы считаемъ элементы представляющаго его комплекса (§ 6).

Если слагаемыя написаны въ десятичной системѣ, то сначала складываютъ единицы, затѣмъ десятки, потомъ сотни и т. д.; если *при сложеніи единицъ какого-либо разряда образуются единицы высшаго разряда, то ихъ нужно прибавлять къ единицамъ соотвѣтствующаго разряда.* Этому обучаются уже дѣти.

4. Сложеніе содержитъ, какъ частный случай, правило, посредствомъ котораго мы въ § 3 опредѣлили по числу m непосредственно слѣдующее число $m+1$. Точно также изъ данныхъ въ § 3 опредѣленій терминовъ „больше“ и „меньше“ слѣдуетъ, что сумма нѣсколькихъ чиселъ изъ ряда $a, b, c \dots n$ меньше, нежели сумма всѣхъ ихъ, — что сумма увеличивается съ увеличеніемъ одного или нѣсколькихъ слагаемыхъ. Все это вытекаетъ изъ того, что меньшее число соотвѣтствуетъ тому изъ двухъ комплексовъ, которое можетъ быть приведено въ однозначное соотвѣтствіе съ правильной частью другого комплекса (§ 6, 2).

[1] Доказательство ведется такъ: если допустимъ, что предложеніе справедливо, когда S состоитъ изъ n комплексовъ, то въ случаѣ $n+1$ комплексовъ

$$A + B + C + \dots + M + N = (A + B + C + \dots + M) + N = S + N;$$

поэтому оно оправдывается въ силу предложенія 1.

§ 8. Умноженіе.

Часто приходится составлять суммы одинаковыхъ слагаемыхъ; для нихъ введено особое обозначеніе. Чтобы это объяснить, предположимъ, что намъ дано a слагаемыхъ, которыя всѣ равны b, и что нужно образовать сумму всѣхъ этихъ чиселъ, т. е. напримѣръ

$$b + b + b \qquad \text{при } a = 3$$
$$b + b + b + b \qquad \text{при } a = 4.$$

Сумму этихъ a чиселъ мы будемъ обозначать символомъ $a.b$, или $a \times b$, или, наконецъ, просто черезъ ab. Образованіе этой суммы называется **умноженіемъ числа b на число a.** Число b называется множимымъ, число a множителемъ, а ab—результатъ умноженія—**произведеніемъ числа b на число a.**

Согласно опредѣленію, $a.1=a$; мы положимъ также[1] $1.b=b$, такъ какъ это въ предыдущемъ опредѣленіи не содержится. Умноженіе на большаго множителя можетъ быть приведено къ умноженію на меньшихъ множителей посредствомъ рекуррентной формулы

$$(a+1)b = ab + b, \tag{1}$$

которая, въ виду установленнаго выше соглашенія, сохраняетъ свою силу также при $a=1$.

2. Первое основное предложеніе относительно умноженія есть **законъ перемѣстительный**, заключающійся въ томъ, что результатъ умноженія не измѣнится, если мы множимое и множителя замѣнимъ другъ другомъ; этотъ законъ выражается соотношеніемъ

$$ab = ba. \tag{2}$$

Доказательство этого предложенія можетъ быть произведено при помощи совершенной индукціи. Представимъ себѣ a конечныхъ комплексовъ B, которые мы для отличія будемъ обозначать черезъ $B_1, B_2, \ldots B_a$; допустимъ, что эти комплексы не имѣютъ попарно общихъ элементовъ, но всѣ имѣютъ одну и ту-же мощность b. Въ такомъ случаѣ произведеніе ab представляетъ собой число комплекса M, который получимъ, если соединимъ всѣ наши комплексы $B_1, B_2 \ldots B_a$.

Теперь къ каждому изъ комплексовъ $B_1, B_2 \ldots B_a$ мы присоединимъ еще по одному элементу, такъ что b перейдетъ въ $b+1$. Этимъ мы присоединяемъ къ M еще a новыхъ элементовъ. Если M' есть комплексъ, который мы такимъ образомъ получаемъ вмѣсто M, то онъ выражается

[1] т. е. введемъ въ качествѣ особаго соглашенія

числомъ $ab + a$; съ другой стороны, тотъ же комплексъ можетъ быть выраженъ числомъ $a(b+1)$, а потому

$$ab + a = a(b+1); \qquad (3)$$

это соотношеніе сохраняетъ свою силу и при $b=1$. Но при $b=1$, въ силу самаго опредѣленія,

$$ab = ba.$$

Если мы поэтому примемъ, что соотношеніе (2) доказано для нѣкотораго значенія числа b, то изъ равенства (3) вытекаетъ

$$a(b+1) = ba + a;$$

если же мы въ соотношеніи (1) замѣнимъ a и b другъ другомъ, то получимъ

$$ba + a = (b+1)a;$$

слѣдовательно,

$$a(b+1) = (b+1)a,$$

т. е. справедливость соотношенія (2) доказана и для ближайшаго большаго значенія числа b. Мы можемъ поэтому примѣнить индуктивный пріемъ, и предложеніе доказано во всемъ его объемѣ.

Въ силу этого нѣтъ болѣе основаній къ тому, чтобы отличать другъ отъ друга множимое и множителя; ихъ называютъ обыкновенно безразлично **сомножителями** произведенія.

Для производства умноженія достаточно знать произведенія любыхъ двухъ чиселъ въ ряду 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9—которыя мы составляемъ непосредственнымъ счетомъ и запечатлѣваемъ въ своей памяти. Десятичная система счисленія даетъ возможность извѣстнымъ способомъ составлять произведенія большихъ чиселъ.

3. Законъ сочетательный или ассоціативный.

Представимъ себѣ теперь, что каждый элементъ во всѣхъ комплексахъ B_1, B_2, B_3 ... B_a замѣщенъ нѣкоторымъ комплексомъ C; предположимъ, что всѣ эти комплексы C имѣютъ одинаковую мощность c, но никакіе два изъ нихъ не имѣютъ общихъ элементовъ. Теперь соединимъ всѣ элементы этихъ комплексовъ C въ одинъ комплексъ P, число котораго намъ нужно опредѣлить.

Но число комплексовъ C есть ab; слѣдовательно, число всѣхъ элементовъ комплекса P равно

$$(ab)c.$$

Съ другой стороны, въ каждомъ комплексѣ B содержится bc элементовъ; а такъ какъ число комплексовъ B равно a, то число элементовъ

комплекса P равно также

$$a(bc).$$

Отсюда получаемъ соотношеніе

$$(ab)c = a(bc),$$

которое и выражаетъ сочетательный или ассоціативный законъ. Сочетая этотъ законъ съ предыдущимъ, мы можемъ представить произведеніе трехъ сомножителей въ 12 различныхъ видахъ.

Правило производства вычисленія можно выразить слѣдующимъ образомъ: выбираемъ любыя два изъ данныхъ трехъ чиселъ a, b и c и перемножаемъ ихъ, — произведеніе же умножаемъ на третье число; результать не зависитъ отъ того, какъ мы выбрали первыя два числа, и такъ какъ поэтому скобки уже не нужны, то мы обозначимъ его такъ:

$$m = abc.$$

Число m называется произведеніемъ трехъ чиселъ a, b и c, а послѣднія называются сомножителями этого произведенія.

Доказательство перемѣстительнаго и сочетательнаго законовъ можно сдѣлать нагляднымъ, если мы представимъ себѣ элементы комплексовъ C въ видѣ шаровъ; шары эти распредѣлимъ въ ряды по c въ каждомъ ряду; b такихъ рядовъ расположимъ въ видѣ прямоугольника, и затѣмъ a такихъ прямоугольниковъ положимъ одинъ на другой. Вся фигура имѣетъ въ такомъ случаѣ видъ прямоугольной призмы, три сходящихся ребра которой соотвѣтственно содержатъ a, b и c шаровъ. Эти шары можно тремя способами распредѣлить въ прямоугольники, а каждый прямоугольникъ двумя способами разбить въ ряды.

4. Опираясь на эти предложенія, мы можемъ при помощи индукціи опредѣлить произведеніе любого числа множителей.

Положимъ, что намъ данъ комплексъ R, состоящій изъ чиселъ

$$a, b, c, d, \ldots n (R).$$

Пусть r будетъ число этихъ чиселъ. Выберемъ изъ нихъ произвольно два, перемножимъ ихъ и присоединимъ произведеніе къ остальнымъ числамъ. Мы получимъ комплексъ, содержащій $r-1$ чиселъ. Съ этимъ комплексомъ мы поступимъ такъ же, какъ съ прежнимъ, т. е. вновь выберемъ два числа, перемножимъ ихъ и присоединимъ произведеніе къ остальнымъ числамъ. Этотъ процессъ мы продолжимъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ только одно число. Это число не зависитъ отъ того, какъ мы выбирали въ каждомъ случаѣ два числа для перемноженія, т. е. не зависитъ отъ порядка нашего вычисленія. Это число мы будемъ называть произведеніемъ сомножителей a, b, c, ... n и, обозначая

его черезъ m, будемъ писать

$$m = abcd \ldots n,$$

т. е. попросту напишемъ сомножителей одинъ за другимъ.

Для доказательства высказаннаго утвержденія, на которое опирается это опредѣленіе [3]), мы вновь воспользуемся совершенной индукціей. Какъ было доказано въ п. п. 2 и 3, предложеніе это справедливо, когда $r=2$ или же когда $r=3$ (здѣсь нельзя ограничиться случаемъ $r=2$, т. к. при двухъ сомножителяхъ ассоціативный законъ не находитъ себѣ примѣненія). Теперь примемъ, что наше предложеніе справедливо для произведенія $r-1$ сомножителей и докажемъ, что оно при этихъ условіяхъ справедливо и для произведенія r сомножителей. Итакъ, въ системѣ R выберемъ прежде всего два числа и составимъ ихъ произведеніе; за эти числа могутъ быть взяты a и b—это зависитъ только отъ обозначенія; мы получаемъ такимъ образомъ комплексъ R', содержащій $r-1$ чиселъ

$$(ab),\ c,\ d,\ \ldots.\ n.\ (R').$$

Если мы теперь начнемъ нашъ процессъ иначе, то мы можемъ либо выбрать первые два множителя отличными отъ a и b, напримѣръ составить комплексъ R'' изъ $r-1$ чиселъ

$$a,\ b,\ (cd),\ \ldots.\ n \quad (R''),$$

или же сохранить одно изъ чиселъ a и b, т. е. составить, скажемъ, комплексъ

$$(ac)\ b,\ d,\ \ldots.\ n \quad (R''').$$

Согласно допущенію, произведенія чиселъ въ каждомъ изъ комплексовъ R', R'' и R''' не зависятъ отъ порядка вычисленія; вслѣдствіе этого вычисленіе можно продолжать такъ, чтобы послѣ перваго-же пріема комплексы R' и R'', а также комплексы R' и R''' дали тождественные результаты; именно, комплексы R' и R'', очевидно, могутъ дать комплексъ

$$(ab),\ (cd),\ \ldots.\ n;$$

комплексы-же R' и R''' могутъ дать результатъ

$$(abc),\ d,\ \ldots.\ n.$$

А такъ какъ R', какъ уже было сказано, во всякомъ случаѣ даетъ одно и то же окончательное произведеніе, то то же произведеніе даютъ комплексы R'' и R'''.

5. Изъ соотвѣтствующихъ предложеній относительно сложенія не-

[3]) т. е. что результатъ не зависитъ отъ порядка процесса

посредственно вытекаетъ, что произведеніе двухъ сомножителей возрастаетъ съ каждымъ изъ нихъ, т. е. если

$$a > a',$$

то

$$ab > a'b;$$

и подавно, если

$$a > a' \quad \text{и} \quad b > b',$$

то

$$ab > a'b'.$$

Посредствомъ индукціи отсюда легко вывести предложеніе, что произведеніе какого угодно числа сомножителей возрастаетъ, если увеличимъ нѣкоторые изъ его множителей, а остальные оставимъ безъ измѣненія. Какъ слѣдствіе отсюда, получаемъ также, что произведеніе ac лишь въ томъ случаѣ равно произведенію bc, если $a = b$.

§ 9. Произведенія суммъ.

1. Положимъ, что въ произведеніи двухъ сомножителей одинъ изъ нихъ представляетъ собой сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ. Въ этомъ случаѣ произведеніе можно представить въ видѣ суммы такого же числа слагаемыхъ, не производя сложенія предварительно. Положимъ, напримѣръ, что намъ нужно помножить сумму r слагаемыхъ

$$S = a + b + c + \dots + n$$

на число m; согласно опредѣленію умноженія, это произведеніе равно суммѣ m слагаемыхъ, равныхъ a, m слагаемыхъ, равныхъ b, и т. д....,—m слагаемыхъ, равныхъ n. Такъ какъ мы можемъ соединять слагаемыя въ какія угодно группы и производить сложеніе въ какомъ-угодно порядкѣ, то мы можемъ соединить m слагаемыхъ, равныхъ a, т. е. составить произведеніе ma, затѣмъ взять всѣ слагаемыя b, т. е. составить произведеніе mb, и наконецъ составить произведеніе mn. Такимъ образомъ мы получимъ

$$ms = ma + mb + mc + \dots + mn.$$

Чтобы показать, что намъ нужно помножить всю сумму $a + b + \dots + n$, нужно воспользоваться скобками; сообразно этому, пишемъ

$$m\,(a + b + c + \dots + n) = ma + mb + mc + \dots + mn. \qquad (1)$$

Въ виду-же закона перемѣстительнаго при умноженіи, мы отсюда получаемъ также

$$(a + b + c + \dots + n)m = am + bm + cm + \dots + nm. \qquad (2)$$

Часто случается, что сумма дана въ формѣ

$$ma + mb + mc + \ldots + mn,$$

но что по тѣмъ или инымъ причинамъ выгоднѣе представить ее въ одной изъ формъ

$$m(a+b+c+\ldots+n) \text{ или } (a+b+c+\ldots n+)m.$$

Эта операція называется **вынесеніемъ за скобки множителя** m.

2. Если второй сомножитель m также представляетъ собою сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ, такъ что

$$m = a' + b' + c' + \ldots + n',$$

то въ правой части равенствъ (1) и (2) можно вновь примѣнять то же самое правило; такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Чтобы составить произвденіе двухъ суммъ

$$(a+b+c+\ldots+n)(a'+b'+c'+\ldots+n'),$$

перемножаемъ каждое слагаемое одной суммы на каждое слагаемое другой суммы и складываемъ всѣ полученныя такимъ образомъ произведенія.

Если первая сумма содержитъ r, а вторая r' слагаемыхъ, то произведеніе содержитъ rr' слагаемыхъ, потому что каждое изъ r слагаемыхъ въ правой части равенства (2) разлагается на r' слагаемыхъ.

Вмѣсто того, чтобы обозначать рядъ чиселъ послѣдовательными буквами a, b, c ..., часто пользуются одной и той же буквой, напримѣръ a, присоединяя къ ней указатели или „индексы“:

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_r.$$

Самый индексъ часто также обозначаютъ буквой, которая можетъ имѣть значеніе 1, 2, 3 .... r, напримѣръ,

$$a_i \quad i = 1,\ 2, 3\ \ldots\ r.$$

Сумму s чиселъ a_1 a_2, a_3 .... a_r можно въ этихъ обозначеніяхъ выразить такъ:

$$s = \sum_{i=1}^{r} a_i,$$

гдѣ знакъ Σ служитъ для сокращеннаго обозначенія слова „сумма“, числа 1 и r называются **предѣлами индекса** i. Если указаніе этихъ предѣловъ представляется излишнимъ, то пишутъ короче

$$s = \sum^{i} a_i.$$

Въ этихъ обозначеніяхъ содержаніе предложенія 2 можетъ быть выражено такъ:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r'} b_j\right) = \sum^{i,\,j} a_i\, b_j. \qquad (3)$$

Это предложеніе можетъ быть также распространено на произведеніе нѣсколькихъ множителей, напримѣръ:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} b_j\right)\left(\sum_{h=1}^{t} c_h\right) = \sum^{i,j,h} a_i\, b_j\, c_h. \qquad (4)$$

Выраженіе вида $a+b$, гдѣ a и b суть неопредѣленныя числа, называютъ двучленомъ или биномомъ. Точно такъ же выраженіе $a+b+c$ называется трехчленомъ, или триномомъ, и вообще сумма нѣсколькихъ слагаемыхъ, обозначенныхъ буквами, называютъ многочленомъ, или полиномомъ. Отдѣльныя слагаемыя называются членами полинома.

§ 10. Возвышеніе въ степень.

1. Сложеніе равныхъ слагаемыхъ привело насъ къ умноженію; точно такъ же умноженіе равныхъ сомножителей приводитъ къ новому дѣйствію— возвышенію въ степень.

Положимъ, что намъ нужно составить произведеніе n сомножителей, которые всѣ равны между собой —именно равны, скажемъ, числу a. Результатъ этой операціи называется n-ой степенью числа a и обозначается символомъ a^n, такъ что

$$a.a.a \;\ldots .\; a = a^n; \qquad (1)$$

въ лѣвой части этого равенства подразумѣваемъ n сомножителей; число a называется основаніемъ степени; говорятъ также короче „a въ n-ой степени". Вычислить n-ую степень числа a значить „возвысить число a въ n-ую степень".

Первая степень числа a равна основанію a

$$a^1 = a. \qquad (2)$$

Такъ какъ произведеніе всякаго числа на 1 даетъ въ результатѣ множимое, то при любомъ показателѣ n

$$1^n = 1. \qquad (3)$$

Въ частности, въ виду геометрическихъ приложеній, вторая степень числа a часто называется квадратомъ числа a, а третья степень—кубомъ этого числа.

Основная теорема относительно степеней, которая выводится непосредственно изъ опредѣленія, заключается въ слѣдующемъ:

2. Чтобы перемножить двѣ степени одного и того же основанія, достаточно сложить показателей; въ символахъ:

$$a^m a^n = a^{m+n}. \tag{4}$$

Справедливость этого равенства вытекаетъ изъ того, что справа и слѣва мы имѣемъ $m+n$ множителей, равныхъ a. Это предложеніе при помощи индукціи легко обобщается на произвольное число множителей.

$$a^m . a^n \dots a^q = a^{m+n+\dots+q}, \tag{5}$$

каковы бы ни были числа $m, n, \dots q$ и каково бы ни было число ихъ r.

3. Если въ равенствѣ (5) всѣ показатели равны между собой, то оно выражаетъ слѣдующую вторую теорему о степеняхъ:

Чтобы возвысить степень въ новую степень, достаточно перемножить показателей, т. е.:

$$(a^m)^r = a^{mr}.$$

4. Чтобы возвысить въ степень произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, можно возвысить въ эту степень каждый изъ сомножителей въ отдѣльности и полученныя произведенія перемножить:

$$(abc\dots)^n = a^n b^n c^n \dots$$

Если здѣсь вновь будемъ считать всѣ основанія $a, b, c \dots$ равными между собой, то мы, въ силу соотношенія (5), вновь получимъ предложеніе 3.

5. Если число a больше 1, то a^n тѣмъ больше, чѣмъ больше показатель n; можно также выбрать число n настолько большимъ, чтобы a^n было больше любого заданнаго числа c. Въ этомъ легко убѣдиться индуктивнымъ путемъ. Въ самомъ дѣлѣ, утвержденіе справедливо, если $c = 1$, потому что даже a^1 уже больше 1.

Если же $a^n > c$, то $a^{n+1} > ac > c+1$. Такимъ образомъ, если наше утвержденіе справедливо для нѣкотораго значенія c, то оно справедливо также для $c+1$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, если $a^n > c$ для нѣкотораго значенія m показателя n, то тѣмъ болѣе $a^n > c$, если n имѣетъ значеніе большее, нежели m.

6. Въ основаніи нашей десятичной системы счисленія лежатъ степени числа 10. Число 10^n изображается 1 съ n нулями и образуетъ единицу n-го разряда. Число, изображаемое r цифрами $a, b, c \dots m, n$, имѣетъ значеніе

$$a10^r + b10^{r-1} + c10^{r-2} + \dots + m10 + n. \tag{7}$$

Но чтобы мѣсто, занимаемое цифрой, могло служить для обозначенія степени, необходимо также указать, какія степени вовсе отсутствуютъ; для этого служитъ знакъ 0 (нуль), который тоже принято считать цифрой. (Собственно говоря слово „цифра“ первоначально обозначало только 0, и только позже это названіе было распространено на остальные знаки, выражающіе числа). Сообразно съ этимъ въ формулѣ (7) подъ a, b, c ..., m, n нужно разумѣть одинъ изъ знаковъ:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

Если при нѣкоторомъ вычисленіи число единицъ какого-либо разряда превышаетъ 9, то нужно пользоваться формулой

$$(a+10).10^r = 10^{r+1} + a10^r.$$

Такимъ образомъ правило умноженія чиселъ въ десятичной системѣ основывается, какъ мы видимъ, на предложеніи § 9, 2.

При возвышеніи въ степень не имѣютъ мѣста ни перемѣстительный ни сочетательный законы, потому что a^b имѣетъ другое значеніе, нежели b^a (напр. $a^1=a$, $1^a=1$); точно такъ же $a^{(m^r)}$ имѣетъ не то значеніе, что $(a^m)^r$ (напр. $a^{(1^r)}=a$, $(a^1)^r=a^r$. Вслѣдствіе этой именно причины не образуютъ новыхъ дѣйствій въ томъ порядкѣ идей, въ какомъ умноженіе составлено изъ сложенія, хотя по существу это было бы возможно, если принять за основаніе и показатель одно и то же число. Законы такой операціи были бы очень сложны, а нужды практической жизни и науки не дѣлаютъ такого обобщенія необходимымъ.

§ 11. Вычитаніе. Отрицательныя числа.

1. Если мы изъ конечнаго комплекса A исключимъ его часть B, то остается конечный комплексъ $A-B$, число котораго c вполнѣ опредѣляется числами a и b комплексовъ A и B. Мы положимъ

$$c = a - b, \tag{1}$$

и будемъ называть $a-b$ (a минусъ b) разностью чиселъ a и b; дѣйствіе же, посредствомъ котораго эта разность находится, вычитаніемъ; число a называется уменьшаемымъ, число b вычитаемымъ. Такъ какъ комплексъ B представляетъ собой часть [*]) комплекса A, то число b должно быть меньше числа a, т. е. уменьшаемое должно быть больше вычитаемаго.

Чтобы совершать вычитаніе въ десятичной системѣ достаточно за-

[*]) Авторъ часто употребляетъ слово „часть“ вмѣсто „правильная часть“ (§ 2, 5). Впрочемъ, это нигдѣ не вызываетъ двусмысленности.

помнить результаты этой операціи (получаемые непосредственнымъ вычисленіемъ) для небольшихъ чиселъ; именно, нужно охватить всѣ случаи, въ которыхъ уменьшаемое не превышаетъ 18, а вычитаемое не превышаетъ 9. Уже это вычисленіе въ десятичной системѣ часто приводитъ насъ къ тому, что нужно вычесть большее число изъ меньшаго; чтобы выйти изъ этого затрудненія, мы занимаемъ единицу слѣдующаго высшаго разряда; но научная ариѳметика, а также многія ея примѣненія требуютъ еще болѣе широкаго обобщенія задачи вычитанія, которое можетъ быть достигнуто введеніемъ новаго ряда чиселъ.

Мы поставимъ задачу такъ:

2. Даны два числа a и b; требуется найти число c, которое нужно прибавить къ числу b для того, чтобы получить число a.

Если $a > b$, то эту задачу рѣшаютъ формулой (1). Если $a = b$, то не нужно ничего прибавлять къ b, чтобы получить число a; это мы выразимъ, какъ и въ десятичной системѣ, тѣмъ, что будемъ обозначать знакомъ 0 отсутствіе какихъ бы то ни было объектовъ; т. е. положимъ

$$a - a = 0; \; a + 0 = a; \; a - 0 = a; \qquad (2)$$

въ нѣсколько болѣе широкомъ смыслѣ слова мы будемъ называть 0 также числомъ. Если же число $b > a$, то задача содержитъ въ себѣ требованіе, которое при наличныхъ средствахъ не выполнимо. Если, однако, мы все же желаемъ сдѣлать эту задачу разрѣшимой, то мы должны придать слову „число" болѣе широкое значеніе.

3. Представимъ себѣ вновь рядъ натуральныхъ чиселъ (безъ нуля) и воспользуемся этимъ вторымъ рядомъ для счета объектовъ, находящихся въ извѣстномъ противоположеніи къ тѣмъ объектамъ, которые мы считали при помощи перваго ряда, какъ напр. объекты, расположенные справа и слѣва, градусы, лежащіе ниже и выше точки замерзанія, имущество и долгъ. Для различенія мы должны чѣмъ-нибудь отличать числа второго ряда отъ чиселъ перваго ряда. Чтобы произвести это различіе, мы будемъ называть числа перваго ряда положительными, числа второго ряда—отрицательными и послѣднія будемъ отмѣчать знакомъ—, т. е. будемъ писать:

$$-1, \; -2, \; -3 \; \ldots . \text{ и т. д.}$$

или въ словахъ: „минусъ одинъ", „минусъ два", „минусъ три" .... и т. д.; если почему-либо требуется особенно подчеркнуть это противоположеніе, то положительныя числа часто обозначаются знакомъ $+$, т. е. пишутъ

$$+1, \; +2, \; +3 \; \ldots . \text{ и т. д.,}$$

въ словахъ: „плюсъ одинъ", „плюсъ два," „плюсъ три" .... и т. д.

Натуральное число a называется абсолютнымъ значеніемъ чи-

селъ $+a$ и $-a$. Чтобы обозначить число того или другого ряда, пользуются также знакомъ $\pm a$ (плюсъ минусъ a).

Знаки $+$ и $-$ въ символѣ $\pm a$ называются *знаками* числа $\pm a$.

Число нуль мы можемъ отнести къ тому или другому ряду: $+0$ и -0 тождественны. Два числа этихъ двухъ рядовъ, имѣющіе одну и ту же абсолютную величину, называются противоположными. Число 0 противоположно себѣ самому. Число, противоположное противоположному числу, совпадаетъ съ первоначальнымъ числомъ. Если поэтому α есть отрицательное число, то подъ символомъ $-\alpha$ разумѣютъ положительное число той же абсолютной величины. Этотъ двойной рядъ, включая сюда 0, мы будемъ называть рядомъ цѣлыхъ чиселъ. Числа этого ряда мы *расположимъ по величинѣ* при помощи слѣдующаго правила:

4. *Всѣ положительныя числа больше нуля, всѣ отрицательныя числа меньше нуля. Если a есть положительное число, то*

$$a > 0 \text{ и } -a < 0.$$

Положительныя числа мы будемъ располагать въ томъ же порядкѣ, какъ и прежде, а отрицательныя въ противоположномъ порядкѣ, такъ что изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ меньшимъ считается то, которое имѣетъ большую абсолютную величину.

Благодаря такому соглашенію, если α, β, и γ суть три произвольныхъ цѣлыхъ числа и $\alpha < \beta$, а $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Это расположеніе чиселъ по величинѣ называютъ „алгебраическимъ"; такимъ образомъ говорятъ, что одно число „*алгебраически*" больше или меньше другого, если принимаются во вниманіе знаки чиселъ; если же говорятъ, что одно число „абсолютно больше другого", то подъ этимъ разумѣется, что абсолютная величина перваго числа больше абсолютной величины второго. Если число α алгебраически меньше числа β, то пишемъ $\alpha < \beta$ или $\beta > \alpha$; если при этомъ не исключается возможность равенства, то пишемъ $\alpha \leqq \beta$, или въ словахъ: „α равно β или меньше, нежели β" (иногда выражаютъ короче, хотя и не совсѣмъ правильно, такъ: „α равно или меньше β"); аналогично этому пишутъ также $\beta \geqq \alpha$.

Чтобы сдѣлать эти опредѣленія наглядными, представимъ себѣ рядъ точекъ, нанесенныхъ на прямой линіи (напр. жемчужины, нанизанныя на нити). Любую изъ этихъ точекъ помѣтимъ „0", а затѣмъ считаемъ въ одномъ направленіи, скажемъ, слѣва направо точки $+1$, $+2$, $+3$ и т. д., а въ другомъ направленіи точки -1, -2, -3 .... (фиг. 1).

-4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4

Фиг. 1.

При такихъ условіяхъ точкѣ, лежащей направо отъ другой точки,

всегда отвѣчаетъ большее число; числа возрастаютъ слѣва направо, или, какъ часто говорятъ, въ положительномъ направленіи.

§ 12. Дѣйствія надъ цѣлыми числами.

Надъ этими числами мы установимъ теперь нижеслѣдующія правила дѣйствій; при этомъ мы будемъ руководиться только тѣмъ основнымъ положеніемъ, чтобы установленныя уже дѣйствія въ области натуральныхъ чиселъ представляли собою частные случаи вводимыхъ нами новыхъ болѣе общихъ правилъ и чтобы основные законы ариѳметическихъ дѣйствій сохранили свою силу при этомъ обобщеніи.

1. Сложеніе. Пусть α и β будутъ два цѣлыхъ числа съ абсолютными величинами a и b; положимъ при этомъ, что

$$b > a. \tag{1}$$

Въ такомъ случаѣ мы положимъ:

$\alpha+\beta = a+b$,	если α имѣетъ знакъ $+$, а β имѣетъ знакъ $+$	(2)
$\alpha+\beta = b-a$	„ „ „ „ $-$ „ „ „ „ $+$	
$\alpha+\beta = -(b-a)$	„ „ „ „ $+$ „ „ „ „ $-$	
$\alpha+\beta = -(b+a)$	„ „ „ „ $-$ „ „ „ „ $-$	

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ [5]} \tag{3}$$

Число 0 можетъ быть при этомъ отнесено произвольно къ положительнымъ или къ отрицательнымъ числамъ. Съ помощью ряда точекъ, приведеннаго въ § 11 (фиг. 1), правило сложенія можно сдѣлать нагляднымъ.

Чтобы къ числу α прибавить число β, имѣющее абсолютную величину b, отсчитываемъ b точекъ въ положительномъ направленіи, начиная съ точки $\alpha+1$, если β есть число положительное, и въ отрицательномъ направленіи, начиная съ точки $\alpha-1$, если β есть число отрицательное; точка, къ которой мы такимъ образомъ придемъ, соотвѣтствуетъ числу $\alpha+\beta$.

2. Вычитаніе. Полагая по прежнему $b>a$ (1), мы положимъ

	Знаки чиселъ α и β	
$\alpha - \beta = -(b-a)$	$+$ $+$	
$= -(a+b)$	$-$ $+$	
$= a+b$	$+$ $-$	(4)
$= b-a$	$-$ $-$	
$\beta - \alpha = -(\alpha-\beta)$		(5).

[5]) Опредѣленія, содержащіяся въ соотношеніяхъ (2), устанавливаютъ, что значитъ прибавить къ числу α число β, имѣющее такую же или большую абсо-

Мы видимъ такимъ образомъ, что сложеніе и вычитаніе натуральныхъ чиселъ подходятъ подъ эти опредѣленія, какъ частные случаи. Вмѣстѣ съ тѣмъ по этимъ правиламъ любое число можетъ быть вычтено изъ другого числа; результатъ всегда представляетъ собой опредѣленное число нашего ряда.

3. Вычитаніе можетъ быть приведено къ сложенію посредствомъ формулы

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta). \qquad (6).$$

Сообразно съ этимъ вычесть нѣкоторое число равносильно тому, чтобы прибавить то же число съ обратнымъ знакомъ.

Поэтому вычитаніе такъ же, какъ и сложеніе, можетъ быть выполнено при помощи отсчитыванія точекъ въ томъ или въ другомъ направленіи.

4. Сочетательный законъ при сложеніи. Перемѣстительный законъ при сложеніи мы уже выразили формулой (3).

Законъ сочетательный долженъ выразиться соотношеніемъ

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \beta + (\alpha + \gamma), \quad (7)$$

гдѣ α, β и γ суть произвольныя три числа, абсолютныя значенія которыхъ обозначимъ черезъ a, b и c. Этотъ законъ вытекаетъ изъ опредѣленій (2) и (3). Число случаевъ, которое слѣдовало бы различать относительно знаковъ чиселъ α, β и γ, значительно уменьшается, благодаря слѣдующему обстоятельству: по конструкціи равенствъ (7), если онѣ оказываются справедливыми при нѣкоторомъ значеніи α, β и γ, то онѣ сохраняютъ свою силу и въ томъ случаѣ, если мы замѣстимъ другъ другомъ α и β, или β и γ, или α и γ[6]), а также если мы замѣстимъ α, β и γ черезъ $-\alpha$, $-\beta$ и $-\gamma$. Вслѣдствіе этого намъ достаточно доказать соотношеніе (7) въ томъ предположеніи, что

$$a \leqslant b \leqslant c$$

и что γ есть положительное число ($\gamma = c$). При этихъ условіяхъ намъ остается разсмотрѣть только 4 случая, соотвѣтствующіе четыремъ комбинаціямъ чиселъ α и β. Соотвѣтственно этимъ комбинаціямъ, соотношенія (7) принимаютъ такія формы:

1. Числа α и β положительны

$$(a+b) + c = a + (b+c) = b + (a+c);$$

лютную величину; опредѣленіе это дополняется соглашеніемъ (3), которое говоритъ, что прибавить къ числу α число β, имѣющее меньшую абсолютную величину, означаетъ то же, что прибавить къ числу β число α.

[6]) Такъ какъ при этомъ однѣ части равенства переходятъ въ другія.

2. α отрицательно, β положительно

$$(b-a) + c = (b+c) - a = b + (c-a);$$

3. α положительно, β отрицательно

$$c - (b-a) = a + (c-b) = (a+c) - b;$$

4. Числа α и β отрицательны

$$c - (a+b) = (c-b) - a = (c-a) - b, \text{ если } c > a + b,$$

$$(a+b) - c = a - (c-b) = b - (c-a), \text{ если } c < a + b.$$

Справедливость этихъ формулъ вытекаетъ изъ соотношенiй, приведенныхъ въ концѣ пункта 5 параграфа 2. Такимъ образомъ сочетательный законъ доказанъ и для обобщеннаго сложенiя.

Если мы теперь дословно повторимъ тотъ же рядъ разсужденiй, который былъ примѣненъ въ § 8,4 къ умноженiю, то получимъ слѣдующiй болѣе общiй законъ:

5. Если намъ нужно опредѣлить сумму любого количества цѣлыхъ чиселъ (слагаемыхъ), то можно поступать слѣдующимъ образомъ: выбираемъ произвольно два слагаемыхъ, складываемъ ихъ и сумму присоединяемъ къ остальнымъ слагаемымъ. Въ полученной такимъ образомъ новой системѣ, содержащей уже меньше элементовъ, мы вновь выбираемъ два и поступаемъ съ ними точно такъ же, какъ выше. Этотъ процессъ мы продолжаемъ до тѣхъ поръ, пока не останется только одно число. Это число не зависитъ отъ порядка, въ которомъ мы производимъ наши отдѣльныя операцiи, и называется суммой всѣхъ чиселъ.

6. Законы перемѣстительный и ассоцiативный принимаютъ для вычитанiя другую форму, которая получается изъ соотвѣтствующихъ формулъ сложенiя, если разсматривать вычитанiе, какъ сложенiе отрицательныхъ чиселъ; именно, каковы бы ни были числа α, β и γ, имѣютъ мѣсто слѣдующiя соотношенiя:

$$\alpha - \beta = -(\beta - \alpha), \quad \text{(ср. форм. (5))} \qquad (8)$$

$$(\alpha+\beta) - \gamma = \alpha + (\beta-\gamma) \qquad (9)$$

$$(\alpha-\beta) + \gamma = \alpha - (\beta-\gamma) = \alpha + (\gamma-\beta) \qquad (10)$$

$$(\alpha-\beta) - \gamma = \alpha - (\beta+\gamma) = (\alpha-\gamma) - \beta. \qquad (11).$$

7. Отсюда легко получить (при помощи совершенной индукцiи) часто примѣняемое правило вычитанiя, извѣстное также подъ названiемъ „правила для открыванiя скобокъ“; оно выражается слѣдующей формулой:

$$\alpha - (\beta + \gamma + \ldots + \nu) = \alpha - \beta - \gamma - \ldots - \nu$$

или въ словахъ:

Если нужно вычесть изъ какого-либо числа полиномъ, составленный изъ произвольнаго количества чиселъ и заключенный въ скобки, то можно скобки опустить, измѣняя при этомъ знакъ каждаго члена на обратный, или, иначе, замѣняя каждое сложеніе вычитаніемъ и обратно.

§ 13. Умноженіе.

1. Если мы будемъ разсматривать умноженіе, какъ повторное сложеніе (§ 8), то мы можемъ распространить это дѣйствіе и на тотъ случай, когда множимое отрицательно или равно нулю. Правило сложенія предыдущаго параграфа въ этомъ случаѣ даетъ

$$a.(-b) = -(ab) \quad (1)$$

$$a.0 = 0. \quad (2)$$

Но если множитель есть число отрицательное, то прежнее опредѣленіе теряетъ всякій смыслъ: отъ насъ зависитъ приписать этимъ символамъ то или другое значеніе [7]). Мы выразимъ опредѣленіе умноженія для тѣхъ случаевъ, когда множитель отрицателенъ или равенъ нулю, слѣдующими соотношеніями:

$$(-a)b = -(ab) \quad (3)$$

$$(-a)(-b) = ab \quad (4)$$

$$0b = 0. \quad (5)$$

Формула (3) необходимо вытекаетъ изъ формулы (1), если поставимъ себѣ задачей сохранить перемѣстительный законъ; формула же (4) слѣдуетъ изъ формулы (3), если послѣдняя должна остаться въ силѣ и для отрицательныхъ значеній числа b, ибо $-(-a) = +a$, какъ мы установили выше. Наконецъ, соотношеніе (5) вытекаетъ изъ (2) въ силу перемѣстительнаго закона [8]).

[7]) Выраженіе $(-a).b$ представляетъ собой символъ, которому предыдущими опредѣленіями не присвоено никакого опредѣленнаго значенія. Отъ насъ зависитъ поэтому приписать этому символу то значеніе, которое мы найдемъ цѣлесообразнымъ.

[8]) Выражаемая здѣсь мысль заключается въ слѣдующемъ: опредѣленіе умноженія при отрицательномъ и нулевомъ множителѣ необходимо сводится къ соотношеніямъ (3), (4) и (5), если мы желаемъ сохранить законъ перемѣстительный и если затѣмъ формула (3) должна остаться справедливой и для отрицательныхъ значеній множимаго b; дѣйствительно, если законъ перемѣстительный долженъ

Согласно установленнымъ такимъ образомъ опредѣленіямъ, для любыхъ двухъ цѣлыхъ чиселъ α и β остается въ силѣ перемѣстительный законъ

$$\alpha\beta = \beta\alpha; \qquad (6)$$

опредѣленія же (1) — (5) могутъ быть выражены слѣдующимъ правиломъ:

Если одинъ изъ двухъ сомножителей обращается въ нуль, то и произведеніе равно нулю.

Произведеніе двухъ положительныхъ или двухъ отрицательныхъ чиселъ есть число положительное, произведеніе положительнаго числа на отрицательное есть число отрицательное.

Абсолютная величина произведенія двухъ сомножителей есть произведеніе абсолютныхъ величинъ сомножителей.

Законъ сочетательный для умноженія гласитъ:

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \beta(\alpha\gamma),$$

что не трудно вывести изъ того же закона для положительныхъ чиселъ и изъ соотношенія (1), если перебрать всѣ комбинаціи знаковъ, которыя здѣсь возможны. Вмѣстѣ съ тѣмъ доказывается и общее предложеніе относительно произведенія какого угодно числа сомножителей (§ 8),

$$\mu = \alpha\beta\gamma\ldots\nu,$$

согласно которому это произведеніе можно получить, перемножая произвольные два сомножителя, умножая затѣмъ полученное произведеніе на третьяго множителя, и т. д.; результатъ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ ведется это вычисленіе [9]).

2. Въ случаѣ, если между сомножителями имѣются отрицательныя числа, можно сдѣлать слѣдующія заключенія относительно знака всего произведенія.

Чтобы опредѣлить знакъ произведенія, перемножимъ сначала всѣхъ положительныхъ сомножителей; если остается только одинъ отрицательный множитель, то произведеніе имѣетъ, согласно опредѣленію (1), отрица-

остаться въ силѣ, то $(-a)b$ должно быть равно $b(-a)$ или по формулѣ (2)—(ab) Точно также, если формула (3) должна остаться въ силѣ при отрицательномъ значеніи числа b, то

$$(-a)(-b) = -(-ab) = ab.$$

[9]) Данный въ § 8 выводъ основывается исключительно на сочетательномъ и перемѣстительномъ законахъ. Онъ остается поэтому въ силѣ, коль скоро остаются въ силѣ эти два закона.

тельное значеніе; если же имѣется нѣсколько отрицательныхъ произведеній, то мы распредѣлимъ ихъ въ пары и перемножимъ сомножителей каждой пары, которые дадутъ положительныя произведенія. Если послѣ этого остается еще одинъ отрицательный множитель, то произведеніе отрицательно; если же всѣ отрицательные множители могутъ быть распредѣлены въ пары, то произведеніе положительно.

Это заставляетъ насъ дѣлать слѣдующее различіе между натуральными числами. Если нѣкоторый комплексъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ его элементы могутъ быть безъ остатка распредѣлены въ пары, то соотвѣтствующее число называется четнымъ; если послѣ распредѣленія элементовъ въ пары, остается одинъ свободный элементъ, то соотвѣтствующее число называется нечетнымъ.

При помощи совершенной индукціи можно безъ труда убѣдиться, что одно и то же число не можетъ быть одновременно четнымъ и нечетнымъ. За каждымъ четнымъ числомъ слѣдуетъ нечетное число, за нечетнымъ— четное.

1, 3, 5, 7, 9, 11 суть нечетныя; 2, 4, 6, 8, 10, 12 суть четныя числа.

Послѣ этого опредѣленія мы можемъ выразить правило знаковъ при умноженіи слѣдующимъ образомъ.

Произведеніе положительно, если число отрицательныхъ сомножителей четное, и отрицательно, если число отрицательныхъ множителей нечетное.

3. Когда установлено понятіе о произведеніи какого угодно числа сомножителей, то понятіе о степени отрицательнаго числа опредѣляется само собой. Степень отрицательнаго числа имѣетъ положительное значеніе, если показатель есть число четное, и отрицательное, если показатель есть число нечетное.

$$(-a)^n = a^n, \text{ если } n \text{ есть число четное,} \qquad (8)$$
$$= -a^n, \text{ если } n \text{ есть число нечетное.}$$

Въ частности квадратъ отрицательнаго числа всегда представляетъ собой положительное число.

Обратимъ еще вниманіе на слѣдующій частный случай:

$$(-1)^n = +1, \text{ если } n \text{ есть число четное,} \qquad (9)$$
$$= -1, \text{ если } n \text{ есть число нечетное.}$$

Послѣдней формулой часто пользуются, чтобы выразить, что нѣкоторое число, зависящее отъ n, имѣетъ положительное значеніе при четномъ n и отрицательное значеніе при нечетномъ n. Такъ напримѣръ, соотношенія (8) могутъ быть выражены такъ:

$$(-a)^n = (-1)^n a\ .$$

ГЛАВА III.

Дѣленіе и введеніе дробей.

§ 14. Дѣленіе и дѣлимость чиселъ.

1. Если a и b суть натуральныя числа, то всегда можно опредѣлить положительное число m такимъ образомъ, чтобы mb было больше, нежели a.

Въ самомъ дѣлѣ, если $a=1$, то теорема, очевидно, справедлива при всякомъ b, ибо $b\geqslant 1$, и достаточно взять $n>1$, чтобы nb было больше 1 (§ 8, 5); отсюда слѣдуетъ, что при всякомъ a $nab>a$ и, слѣдовательно, $mb>a$, если $m>na$.

Если $b<a$, то изъ всѣхъ значеній числа m, удовлетворяющихъ неравенству $mb>a$, имѣется одно наименьшее. Это наименьшее число больше 1; мы его обозначимъ поэтому черезъ $q+1$, такъ что

$$qb \leqslant a < (q+1)b.$$

Если мы поэтому положимъ

$$a - qb = r,$$

то $r = 0$, когда $qb = a$, а въ противномъ случаѣ r есть положительное число, меньшее, нежели b. Отсюда вытекаетъ слѣдующій выводъ.

2. Если a и b суть два натуральныя числа и $b<a$, то можно опредѣлить положительное число q и другое число r, которое равно или больше 0 и меньше, нежели b, такимъ образомъ, что

$$a = qb + r; \qquad (1)$$

эти числа q и r однозначно опредѣляются числами a и b.

Процессъ разысканія чиселъ q и r по заданнымъ числамъ a и b называется дѣленіемъ числа a на число b: число a называется дѣлимымъ, b дѣлителемъ, q частнымъ, r остаткомъ.

При этихъ условіяхъ говорятъ также, что число b содержится въ числѣ a q разъ, при чемъ остается остатокъ r.

Съ этой задачей мы встрѣчаемся, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если намъ бываетъ нужно, какъ это часто случается въ жизни, раздѣлить комплексъ, состоящій изъ a недѣлимыхъ объектовъ, на b равныхъ частей. Вообще говоря, такое дѣленіе не совершается безъ остатка.

Какъ находятся числа q и r, когда a и b заданы въ десятичной системѣ счисленія, излагается въ элементарной ариѳметикѣ.

3. Если остатокъ равенъ 0, то говорятъ также, что a дѣлится на b, или что b есть дѣлитель или множитель числа a, или что дѣленіе числа a на b совершается нацѣло, или наконецъ, что число a кратно числа b. Такимъ образомъ, число a дѣлится на b, если существуетъ такое цѣлое число m, что

$$a = mb. \qquad (2)$$

4. Обобщая это опредѣленіе, мы будемъ говорить, что число 0 дѣлится на всякое положительное или отрицательное число, имѣя въ виду, что равенство (2) удовлетворяется при всякомъ значеніи числа b, если положимъ $a = 0$ и $m = 0$. Мы будемъ также говорить, что число $-a$ дѣлится на b или на $-b$, если b есть число, отличное отъ нуля, и a дѣлится на b. Но подъ дѣлителями числа мы будемъ разумѣть исключительно натуральныя (положительныя) числа.

5. Каждое число дѣлится на себя и на единицу, потому что соотношеніе (2) удовлетворяется, если положимъ $b=a$ и $m=1$ или $b=1$ и $m=a$.

6. Ни одно число, отличное отъ нуля, не дѣлится на нуль. Въ самомъ дѣлѣ, при $b=0$ соотношеніе (2) можетъ быть удовлетворено только тогда, если и $a=0$; въ этомъ же послѣднемъ случаѣ число m можетъ имѣть совершенно произвольное значеніе.

Изъ даннаго выше опредѣленія вытекаютъ далѣе слѣдующія предложенія.

7. Произведеніе нѣсколькихъ множителей

$$p = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

дѣлится на число b, если, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей дѣлится на b. Замѣтимъ, однако, что произведеніе можетъ иногда дѣлиться на b, хотя ни одинъ изъ множителей не дѣлится на b; такъ напримѣръ, 3. 4 дѣлится на 6, хотя ни 3 ни 4 не дѣлятся на 6.

8. Если два числа a и b дѣлятся на третье число c, то числа $a+b$ и $a-b$ также дѣлятся на c. Впрочемъ, это есть только частный случай слѣдующаго болѣе общаго предложенія:

Если каждое изъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ дѣлится на число b,

такъ что

$$a_1 = m_1 b,\ a_2 = m_2 b,\ a_3 = m_3 b\ \ldots.\ a_n = m_n b,$$

то каковы бы ни были числа $c_1,\ c_2,\ c_3\ \ldots.\ c_n$,

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \ldots. + a_n c_n = b(m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3 + \ldots. + m_n c_n)$$

и, слѣдовательно, число

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + \ldots.. + a_n c_n$$

дѣлится на b.

9. Если a дѣлится на b, такъ что

$$a = mb,$$

то m есть частное отъ дѣленія a на b. Это выражаютъ на письмѣ еще и такъ:

$$m = a : b \text{ или } m = \frac{a}{b} \text{ или } m = a/b,$$

(въ словахъ: m равно a, дѣленному на b).

§ 15. Общій наибольшій дѣлитель. Числа. первыя между собой. Наименьшее кратное.

1. Если два натуральныхъ числа a и b дѣлятся на третье число c, то послѣднее называется общимъ дѣлителемъ чиселъ a и b. Такъ какъ дѣлитель числа не можетъ быть больше самаго числа, то между всѣми общими дѣлителями чиселъ a и b всегда долженъ быть одинъ наибольшій; послѣдній называется общимъ наибольшимъ дѣлителемъ, или же наибольшей общей мѣрой этихъ двухъ чиселъ; разысканіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ представляетъ собой одну изъ основныхъ задачъ ариѳметики. Эта задача рѣшается пріемомъ, который былъ уже указанъ Евклидомъ и который поэтому извѣстенъ подъ названіемъ Евклидова алгориѳма, или алгориѳма общаго наибольшаго дѣлителя *).

*) Подъ алгориѳмомъ въ настоящее время разумѣютъ правило, которое указываетъ, какъ найти нѣкоторый общій результатъ въ каждомъ частномъ случаѣ, хотя оно и не даетъ общаго выраженія для этого результата. Въ исторіи математики подъ „алгориѳмиками“ разумѣютъ математическую школу, которая пользовалась для своихъ исчисленій индійскими цифрами и нулемъ, выражая разрядъ единицъ мѣстомъ, занимаемымъ цифрой. Въ противоположность этому подъ „абацистами“ разумѣютъ тѣхъ, которые пользовались счетной доской (abacus). Относительно происхожденія самого слова „алгориѳмъ“ долго царило сомнѣніе, пока новѣйшія изслѣдованія не установили, что это слово представляетъ собой искаженіе арабскаго собственнаго имени: Alchwarizmî (Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmî); это имя при-

2. Пусть a и a_1 будутъ данныя два положительныя числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ намъ нужно разыскать. Если они равны между собой, то общее ихъ значеніе и представляетъ ихъ общій наибольшій дѣлитель. Мы предположимъ поэтому, что $a > a_1$. Раздѣлимъ число a на a_1, и если дѣленіе не совершается нацѣло, то мы получимъ остатокъ, который меньше, нежели a_1: этотъ остатокъ мы обозначимъ черезъ a_2. Теперь раздѣлимъ a_1 на a_2; если и это дѣленіе не совершается нацѣло, то мы получимъ остатокъ a_3, который меньше, нежели a_2, и т. д. Продолжая этотъ процессъ, мы будемъ получать постоянно меньшіе остатки; послѣ опредѣленнаго числа такихъ дѣленій мы необходимо должны придти къ такому дѣленію, которое совершается нацѣло, такъ какъ не можетъ быть неограниченнаго числа остатковъ, меньшихъ, нежели опредѣленное число. Этимъ заканчивается вычисленіе, и дѣлитель послѣдняго дѣленія есть искомый наибольшій дѣлитель чиселъ a и a_1. Этотъ процессъ становится нагляднѣе, если выразить его нижеслѣдующими равенствами, въ которыхъ буквами $q, q_1, q_2 \ldots q_{n-1}$ обозначены частныя послѣдовательныхъ дѣленій:

$$\begin{aligned} a &= qa_1 + a_2 \\ a_1 &= q_1a_2 + a_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= q_{n-2}a_{n-1} + a_n \\ a_{n-1} &= q_{n-1}a_n \end{aligned} \qquad (1)$$

Наше утвержденіе заключается въ томъ, что a_n есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и a_1. Это будетъ доказано, если мы обнаружимъ,

α) что a_n есть дѣлитель чиселъ a и a_1 и

β) что каждый общій дѣлитель чиселъ a и a_1 представляетъ собою также дѣлителя числа a_n.

Въ самомъ дѣлѣ, если d есть искомый общій наибольшій дѣлитель, то изъ свойства α) слѣдуетъ, что $a_n \leqq d$, а изъ свойства β) слѣдуетъ, что $a_n \geqq d$: поэтому изъ соотношеній α) и β) вмѣстѣ слѣдуетъ, что $a_n = d$. Что-же касается самихъ требованій α) и β), то въ ихъ справедливости легко убѣдиться, разсматривая равенства (1). (§ 14, 8) [1])

надлежало арабскому писателю, который въ началѣ X столѣтія училъ производить вычисленія при помощи индійскихъ цифръ (Cantor, Geschichte der Mathematik. 2 Auflage, Bd. 1, S. 671 f; Euklid, Elemente, VII Buch, II. Ausgabe von Heiberg, Bd. II. Leipzig, Teubner 1884).

[1]) Выяснимъ подробнѣе этотъ основной пунктъ.

α) Послѣднее изъ равенствъ (1) показываетъ, что a_{n-1} дѣлится на a_n: вслѣдствіе этого предпослѣднее изъ равенствъ (1), въ виду предложенія § 14, 8, обнаруживаетъ, что a_{n-2} дѣлится на a_n. Такимъ же образомъ предыдущее соотношеніе

Изъ сказаннаго попутно вытекаетъ слѣдующій выводъ.

Каждый общій дѣлитель двухъ чиселъ есть также дѣлитель общаго наибольшаго дѣлителя ихъ. Это слѣдуетъ непосредственно изъ соотношенія β).

Приведемъ еще слѣдующій примѣръ для выясненія этого алгориѳма.

$$\begin{aligned} 6552 &= 14 . 448 + 280, \\ 448 &= 1 . 280 + 168, \\ 280 &= 1 . 168 + 112, \\ 168 &= 1 . 112 + 56, \\ 112 &= 2 . 56. \end{aligned}$$

Итакъ, 56 есть общій наибольшій дѣлитель чисель 6552 и 448.

3. Вмѣсто равенства

$$a = qb + r$$

можно при разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя пользоваться также равенствомъ

$$a = (q+1)\ b - (b - r):$$

что представляетъ собой преимущество въ томъ случаѣ, если $b-r$ меньше, нежели r, т. е. если $2r$ больше, нежели b. Въ этомъ случаѣ отрицательное число $-(b-r)$ называють абсолютно наименьшимъ остаткомъ отъ дѣленія числа a на число b. Пользуясь въ алгориѳмѣ общаго наибольшаго дѣлителя абсолютно наименьшими остатками, мы скорѣе придемъ къ цѣли.

Въ нашемъ примѣрѣ вычисленіе можно было бы вести такъ:

$$\begin{aligned} 6552 &= 15 . 448 - 168 \\ 448 &= 3 . 168 - 56 \\ 168 &= 3 . 56, \end{aligned}$$

что даетъ значительное сокращеніе.

4. Точно такъ же, какъ и для двухъ чиселъ, можно поставить вопросъ о разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя для нѣсколькихъ чиселъ, т. е. самаго большого числа, которое дѣлитъ всѣ данныя числа. Но эту задачу можно привести къ предыдущей, основываясь на слѣдующемъ замѣчаніи:

(третье отъ конца) обнаруживаетъ, что a_{n-3} дѣлится на a_n. Восходя такимъ образомъ къ первымъ равенствамъ въ ряду (1), мы получимъ, что числа a и a_1 дѣлятся на a_n.

β) Пусть b будетъ общій дѣлитель чиселъ a и a_1. Если мы представимъ первое изъ равенствъ (1) въ видѣ

$$a_2 = a - qa_1,$$

то, въ силу предложенія § 14, 8, оно обнаруживаетъ, что a_2 дѣлится на b. Пользуясь этимъ, мы такимъ же образомъ при помощи второго изъ равенствъ (1) покажемъ, что a_3 дѣлится на a_n. Продолжая тотъ-же рядъ разсужденій, мы докажемъ при помощи предпослѣдняго равенства (1), что число a_n дѣлится на b.

Если d есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b, то всякій общій дѣлитель чиселъ a и b дѣлитъ также число d; поэтому всякій общій дѣлитель чиселъ a, b и c представляетъ собой также общаго дѣлителя чиселъ d и c; обратно, каждый общій дѣлитель чиселъ d и c есть также общій дѣлитель чиселъ a, b и c. Вслѣдствіе этого общій наибольшій дѣлитель чиселъ a, b и c совпадаетъ съ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чисель d и c.

5. Два числа, общій наибольшій дѣлитель которыхъ равенъ 1, называются **взаимно простыми** или **первыми между собою**. Говорятъ также, что такія числа не имѣютъ общихъ дѣлителей; при этомъ, конечно, не принимается въ счетъ постоянный общій дѣлитель 1. Такъ, взаимно-простыми числами являются, напримѣръ, 3 и 7, 15 и 49, 105 и 128. Какія бы ни были даны два числа a и b, даже если они очень велики, можно рѣшить сравнительно простымъ вычисленіемъ, имѣютъ ли они общихъ дѣлителей или нѣтъ.

6. **Если a и b суть числа первыя между собой, и число ma, кратное a, дѣлится на b, то число m дѣлится на b.**

Въ справедливости этого предложенія нетрудно убѣдиться при помощи алгориѳма (1). Если a и $b = a_1$ суть числа первыя между собой, то $b_n = 1$. Соотвѣтствующій алгориѳмъ имѣетъ въ этомъ случаѣ такой видъ:

$$\begin{aligned} a &= qa_1 + a_2 \\ a_1 &= q_1a_2 + a_3 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-2} &= q_{n-2}a_{n-1} + 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Умножая обѣ части каждаго изъ этихъ равенствъ на m, мы получимъ:

$$\begin{aligned} ma &= q\,ma_1 + ma_2 \\ ma_1 &= q_1ma_2 + ma_3 \\ &\cdots\cdots \\ ma_{n-2} &= q_{n-2}ma_{n-1} + m \end{aligned} \qquad (3)$$

Если теперь ma дѣлится на a_1, то первое изъ этихъ равенствъ обнаруживаетъ, что и ma_2 дѣлится на a_1; вслѣдствіе этого второе равенство обнаруживаетъ, что ma_3 дѣлится на a_1; дальнѣйшія равенства послѣдовательно обнаруживаютъ (въ силу совершенной индукціи), что числа ma_4 .... ma_{n-1}, m дѣлятся на a_1.

Если d есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ a и b и если

$$a = da' \text{ и } b = bd', \qquad (4)$$

то a' и b' суть числа первыя между собой. Дѣйствительно, если-бы числа a' и b' имѣли общаго дѣлителя e, отлично отъ 1, то числа a и b дѣлились бы на de,—что противно условію.

7. Число, которое дѣлится на два числа a и b, называется общимъ кратнымъ этихъ чиселъ. Изъ всѣхъ общихъ кратныхъ двухъ чиселъ одно должно быть наименьшимъ, а остальныя должны быть кратны этого наименьшаго.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что число m дѣлится на a и b; придерживаясь обозначенія (4), мы можемъ сказать, что число m дѣлится на da', т. е. можетъ быть представлено въ видѣ

$$m = da'n.$$

Если это число дѣлится на $b'd$, то $a'n$ дѣлится на b'; а такъ какъ a' и b' суть числа первыя между собой, то n дѣлится на b' (п. 6). Если $n = b'p$, то

$$m = da'b'p.$$

Итакъ, каждое число m, кратное a и b, дѣлится на число $a'b'd = \frac{ab}{d}$; поэтому $\frac{ab}{d}$ есть наименьшее кратное чиселъ a и b.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что наименьшее общее кратное двухъ чиселъ очень просто опредѣляется, если мы знаемъ общаго наибольшаго дѣлителя ихъ.

8. Совершенно такъ же, какъ при общемъ наибольшемъ дѣлителѣ, мы можемъ распространить понятіе о наименьшемъ кратномъ на нѣсколько чиселъ. Чтобы получить наименьшее кратное чиселъ

$$a, b, c, d \ldots,$$

поступаемъ слѣдующимъ образомъ: беремъ два изъ этихъ чиселъ, скажемъ, a и b, и замѣняемъ ихъ наименьшимъ кратнымъ ихъ; такимъ образомъ мы получаемъ рядъ, содержащій однимъ числомъ меньше. Съ этимъ рядомъ поступаемъ точно такъ же и продолжаемъ этотъ процессъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ только одно число.

§ 16. Простыя и составныя числа.

Натуральное число, которое не имѣетъ никакихъ дѣлителей, кромѣ себя самого и единицы, называется простымъ числомъ; числа же, имѣющія также другихъ дѣлителей, называются составными числами. Число 1 занимаетъ исключительное положеніе: это единственное число, которое имѣетъ только одного дѣлителя. Въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ цѣлесообразно не относить 1 къ простымъ числамъ; такимъ образомъ приходится отличать три категоріи чиселъ: единицу, простыя числа и составныя числа.

Это, конечно, только вопросъ цѣлесообразнаго соглашенія; часто относятъ единицу къ простымъ числамъ, какъ оно и кажется естественнѣе на первый взглядъ. Мы предпочитаемъ, однако, отдѣлять единицу отъ простыхъ чиселъ, такъ какъ это даетъ возможность короче выражать нѣкоторыя предложенія.

Относительно простыхъ чиселъ имѣютъ мѣсто слѣдующія предложенія.

1. Если произведеніе двухъ чиселъ ab дѣлится на простое число p, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ множителей a или b дѣлится на p.

Въ самомъ дѣлѣ, если a не дѣлится на p, то a и p суть числа первыя между собой, такъ какъ p не имѣетъ никакихъ дѣлителей, кромѣ p и 1; если поэтому произведеніе ab все-же дѣлится на p, то второй множитель b долженъ дѣлиться на p (§ 15, 6).

Это предложеніе легко обобщить слѣдующимъ образомъ:

Если произведеніе нѣсколькихъ сомножителей a, b, c, d .... дѣлится на простое число p, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ сомножителей дѣлится на p.

2. Каждое простое число можетъ быть однимъ и только однимъ способомъ представлено въ видѣ произведенія простыхъ сомножителей, или, какъ часто говорятъ, можетъ быть разложено на простыхъ сомножителей

Чтобы доказать это предложеніе, замѣтимъ прежде всего, что каждое составное число m дѣлится по крайней мѣрѣ на одно простое число. Дѣйствительно, если m есть составное число, то оно имѣетъ дѣлителя m_1, который меньше, нежели m, и больше 1. Если m_1 также есть составное число, то и оно имѣетъ дѣлителя, который отличенъ отъ единицы и меньше, нежели m_1. Продолжая это разсужденіе, мы необходимо придемъ къ дѣлителю, который представляетъ собой простое число. Если p_1 есть простой дѣлитель числа m, то

$$m = p_1 m_1, \qquad (1),$$

гдѣ $m_1 < m$. Если m_1 не представляетъ собой простого числа, то оно имѣетъ простого дѣлителя p_2; такимъ образомъ

$$m = p_1 p_2 m_2. \qquad (2)$$

Это разсужденіе мы можемъ продолжить, и такъ какъ числа m_1, m_2, m_3 .... постоянно убываютъ и отличны отъ 1, то мы необходимо должны придти къ числу m_n, которое представляетъ собой простое число. Такимъ образомъ мы получаемъ разложеніе числа m на простыхъ дѣлителей, число которыхъ обозначимъ черезъ n:

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n \qquad (3)$$

4

Между дѣлителями p_1, p_2 .... p_n нѣкоторые могутъ, конечно, повторяться нѣсколько разъ; эти равные дѣлители даютъ въ произведеніи степень того же числа. Принимая поэтому, что между простыми дѣлителями имѣется π равныхъ p, $\varkappa$ равныхъ q, ρ равныхъ r, и. т. д.,—мы можемъ представить разложеніе (3) въ такомъ видѣ

$$m = p^{\pi} q^{\varkappa} r^{\rho} \ldots \quad (4).$$

Числа p, q, r .... мы здѣсь уже считаемъ различными, а

$$\pi + \varkappa + \rho + \ldots = n.$$

Отсюда уже легко вывести, что разложеніе можетъ быть произведено только однимъ способомъ. Дѣйствительно, согласно предложенію 1, число m, выражаемое произведеніемъ (4), не можетъ дѣлиться ни на какое простое число, кромѣ p, q, r ....; сверхъ того, число p не можетъ входить множителемъ больше, чѣмъ π разъ; число q не можетъ входить множителемъ больше, чѣмъ ρ разъ, и т. д. [2]).

3. Комплексъ, состоящій изъ всѣхъ простыхъ чиселъ, безконеченъ [*]).

Если бы комплексъ, содержащій всѣ простыя числа, былъ конеченъ то должно было бы существовать наибольшее простое число. Итакъ, допустимъ, что ω представляетъ наибольшее простое число. Въ такомъ случаѣ всѣ простыя числа могутъ быть расположены въ возрастающемъ порядкѣ въ рядъ: 2, 3, 5, 7 .... ω, оканчивающійся числомъ ω. Составивъ произведеніе всѣхъ этихъ чиселъ, прибавимъ къ нему 1:

$$\Omega = 2.3.5.7 \ldots \omega + 1. \quad (5)$$

Это число больше, нежели ω, но не можетъ дѣлиться ни на одно изъ чиселъ нашего ряда; 2, 3, 5, 3 .... ω, ибо при дѣленіи на каждое изъ нихъ получаемъ въ остаткѣ 1. Поэтому сдѣланное допущеніе, что имѣется наибольшее простое число, неправильно.

Если мы примемъ въ выраженіи (5) за ω какое-либо опредѣленное простое число, то число Ω будетъ больше, нежели ω, но не можетъ дѣлиться ни на одно простое число, меньшее, нежели ω. Поэтому Ω либо должно быть простымъ числомъ, либо должно дѣлиться на простое число, которое больше, чѣмъ ω. Въ дѣйствительности можетъ имѣть мѣсто, какъ

[2]) Частное $m : p^{\pi} = q^{\varkappa} r^{\rho} \ldots$; вслѣдствіе предложенія 1, оно уже не можетъ дѣлиться на p. Слѣдовательно, другое разложеніе не можетъ содержать p въ болѣе высокой степени; но по той же причинѣ первое разложеніе также не можетъ содержать число p въ болѣе высокой степени, чѣмъ второе

[*]) Это предложеніе и его доказательство имѣются уже у Евклида. „Elemente,“ Buch IX, № XX (Heiberg Bd. 2).

то, такъ и другое; напримѣръ,

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ простое число,}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31 \text{ простое число,}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211 \text{ простое число,}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311 \text{ простое число,}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \text{ составное число.}$$

Задача о нахожденіи простыхъ дѣлителей даннаго составного числа, а также рѣшеніе вопроса, есть ли заданное число простое или составное, гораздо сложнѣе, нежели нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ. Общаго прямого метода для рѣшенія этой задачи мы не имѣемъ; вообще, изслѣдованіе вопроса о распредѣленіи простыхъ чиселъ принадлежитъ къ труднѣйшимъ проблемамъ ариѳметики. Мы будемъ имѣть случай въ послѣдующихъ главахъ сдѣлать нѣкоторыя указанія по этому вопросу. Здѣсь же мы ограничимся слѣдующими указаніями.

4. Существуютъ простые признаки, посредствомъ которыхъ нетрудно узнать, дѣлится ли данное число, написанное въ десятичной системѣ, на первыя простыя числа 2, 3, 5.

Если число m изображается n цифрами $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, то

$$m = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_{n-1} 10 + a_n.$$

Такъ какъ число 10 и всѣ его степени дѣлятся на 2 и на 5, то число m дѣлится на 2 или на 5, если a_n, т. е. число простыхъ его единицъ, дѣлится соотвѣтственно на 2 или на 5.

Такъ какъ 100 дѣлится на 4 и на 25, то мы можемъ еще прибавить, что число m дѣлится на 4 или на 25, если $a_{n-1}10 + a_n$, т. е. если число, составленное изъ его десятковъ и единицъ, дѣлится на 4 или на 25. Тѣмъ же способомъ устанавливаютъ признаки дѣлимости чиселъ на 8 и 125, а также на болѣе высокія степени чиселъ 2 и 5.

Если мы обозначимъ теперь черезъ q сумму цифръ числа m (т. е. сумму чиселъ, изображаемыхъ отдѣльными его цифрами), иными словами, положимъ

$$q = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

то

$$m - q = a_1 (10^{n-1} - 1) + a_2 (10^{n-2} - 1) + \ldots + a_{n-1} (10 - 1);$$

а такъ какъ числа

$$10 - 1 = 9, \quad 10^2 - 1 = 99, \quad 10^3 - 1 = 999, \ldots$$

дѣлятся на 9, то число $m - q$ дѣлится на 9. Если поэтому одно изъ этихъ чиселъ дѣлится на 3 или на 9, то и другое дѣлится на это число. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее правило:

Число m дѣлится на 3 или на 9, если сумма его цифръ дѣлится на это число.

Точно также, если мы положимъ

$$q' = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + \ldots + a_1,$$

то

$$m - q' = a_{n-1}(10+1) + a_{n-2}(10^2-1) + a_{n-3}(10^3+1) \ldots;$$

такъ какъ число

$$10 + 1 = 11,\ 10^2 - 1 = 99,\ 10^3 + 1 = 1001, \ldots$$

дѣлятся на 11, то число m дѣлится на 11, если q' дѣлится на 11 и обратно.

5. Если m есть составное число, то оно можетъ быть во всякомъ случаѣ разложено на двухъ множителей, изъ которыхъ каждое больше 1. Если $m = ab$ и $a \leqq b$, то $a^2 \leqq m$. Между дѣлителями числа m долженъ быть, слѣдовательно, по крайней мѣрѣ одинъ, квадратъ котораго не превышаетъ m. Поэтому, чтобы опредѣлить, есть ли заданное число простое или составное, нужно прежде всего опредѣлить при помощи вышеприведенныхъ признаковъ, дѣлится ли оно на 2, 3, 5, 11. Если это не имѣетъ мѣста, то нужно дѣлить заданное число далѣе послѣдовательно на всѣ простыя числа, квадраты которыхъ не превышаютъ даннаго числа; эти числа мы предполагаемъ, слѣдовательно, извѣстными. Если ни одно изъ этихъ дѣленій не совершается нацѣло, то m есть простое число; если же одно изъ дѣленій совершается нацѣло, то число—составное, и для производства разложенія нужно подвергнуть такому же изслѣдованію частное. Такимъ образомъ, если число, меньшее 100, не дѣлится на 2, 3, 5 и 7, то оно представляетъ собой простое число; точно такъ же числа, не превышающія 10000, приходится для той же цѣли дѣлить только на простыя числа, меньшія 100.

6. Вопросъ объ опредѣленіи простыхъ чиселъ очень интересовалъ уже древнихъ. Мы упомянули уже, что Евклидъ доказываетъ предложенія касающіяся простыхъ чиселъ. Сохранился отрывокъ сочиненія, подъ названіемъ: „Рѣшето“ (κόσκινον, cribrum Eratosthenis), принадлежащаго Эротосѳену*), въ которомъ указанъ остроумный методъ для опредѣленія всѣхъ простыхъ чиселъ, не превышающихъ даннаго числа; методъ этотъ заключается въ слѣдующемъ.

Напишемъ всѣ числа до указаннаго числа. Начнемъ счетъ съ перваго простого числа 2; это число мы оставимъ на мѣстѣ, а послѣ него

*) Эратосѳенъ Киренскій жилъ повидимому, отъ 275 до 194 г. до Р. X; большую часть жизни онъ провелъ въ Александріи (Cp. Cantor „Gesch. der Mathematik.“ Bd. I S. 313).

будемъ зачеркивать каждое второе число; такимъ образомъ всѣ числа, кратныя 2, кромѣ самого числа 2, будутъ вычеркнуты. Затѣмъ начинаемъ счетъ съ ближайшаго оставшагося числа, т. е. съ 3; сохраняемъ число 3, а послѣ него вычеркиваемъ каждое третье число, считая, однако, при этомъ и тѣ числа, которыя уже были перечеркнуты прежде. Этотъ процессъ мы продолжаемъ дальше, т. е. начинаемъ съ ближайшаго незачеркнутаго числа, оставляемъ его, а послѣ него зачеркиваемъ числа черезъ столько мѣстъ, сколько единицъ въ томъ числѣ, съ котораго мы начали. Послѣ окончанія этой операціи останутся исключительно простыя числа. Однако, согласно п. 5, мы должны продолжать этотъ процессъ только до тѣхъ поръ, пока квадратъ числа, съ котораго мы начинаемъ, не превышаетъ послѣдняго числа нашего ряда. Такъ напримѣръ, при опредѣленіи простыхъ чиселъ, которыя меньше 121, намъ пришлось бы только вычеркнуть числа, кратныя 2, 3, 5 и 7. Чтобы уяснить себѣ этотъ процессъ, полезно продѣлать его дѣйствительно для чиселъ, не превышающихъ 100. Само собою разумѣется, что примѣненіе, какъ этого способа „просѣиванія", такъ и дѣленія на извѣстныя уже простыя числа при большихъ числахъ скоро становится совершенно неосуществимымъ вслѣдствіе того, что они требуютъ слишкомъ громоздкихъ вычисленій. Въ виду этого нахожденіе дѣлителей очень большихъ чиселъ, а также распознаваніе простыхъ чиселъ представляетъ собой одну изъ труднѣйшихъ задачъ математики. Поэтому старались составить таблицы, содержащія разложенія чиселъ и простыя числа до извѣстнаго предѣла. Мы имѣемъ теперь такія таблицы до 9 милліоновъ включительно*). Простыхъ чиселъ, меньшихъ 100, имѣется 15, меньшихъ 1000 —имѣется 168, а до 9 000 000 по подсчету, произведенному Глейзеромъ (Glaisher), имѣется 602 567 простыхъ чиселъ. Итакъ, поскольку можно полагаться на точность таблицъ, мы можемъ считать извѣстными всѣ простыя числа, меньшія 9000000. Но такъ какъ всякое вычисленіе, производимое человѣкомъ, можетъ содержать ошибки, а такой огромный числовой матеріалъ, конечно, не былъ провѣренъ многими калькуляторами, то къ этимъ числамъ всегда нужно относиться съ извѣстной осторожностью.

За указанными предѣлами намъ извѣстны только отдѣльныя простыя числа; самое большое изъ нихъ слѣдующее:

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951 \text{ **)}$$

*) Такія таблицы вычислены Л. Чернакомъ (L. Chernac) до 1 020 000, I. Буркгартомъ (J. Burckhardt) до 3 036 000, З. Дазомъ (Z. Dase) для чиселъ отъ 7-го до 9-го милліона, а Глайзеромъ (Glaisher) отъ 4-го до 6-го милліона включительно. Меньшія таблицы для настольнаго употребленія имѣются въ сочиненіи „Sammlung mathnmatischer Tafeln" nach Vega, herausgegeben von Hülsse. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1865.

(**) Это было констатировано сначала Зельгофомъ, а потомъ подтверждено

Для разложенія весьма большихъ чиселъ пользовались средствами высшей математики и въ частности теоріей квадратичныхъ формъ. Ниже мы приведемъ простой примѣръ такого рода пріемовъ.

§ 17. Дроби.

1. Задача дѣленія числа a на другое число b въ томъ случаѣ, когда a кратно b, можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ. Требуется найти такое число c, которое нужно помножить на данное число b, чтобы получить другое данное число a.

Съ этой точки зрѣнія дѣленіе можетъ быть разсматриваемо, какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Въ предыдущей главѣ мы обобщили дѣйствіе, обратное сложенію; чтобы сдѣлать это дѣйствіе всегда выполнимымъ, мы вынуждены были ввести новаго рода числа—отрицательныя числа. Такимъ же образомъ мы можемъ обобщить и задачу дѣленія, но для этого необходимо вновь расширить область чиселъ, именно, кромѣ цѣлыхъ чиселъ, которыя мы изучали до сихъ поръ, необходимо ввести еще такъ называемыя дробныя числа, или дроби. Мы введемъ эти числа сначала совершенно формально и формально же установимъ для нихъ правила дѣйствій. Тѣмъ не менѣе новая система чиселъ, которую мы такимъ образомъ получимъ, также находитъ себѣ примѣненіе для выраженія извѣстныхъ соотношеній между объектами внѣшняго міра.

2. Къ понятію о дроби мы приходимъ проще всего слѣдующимъ путемъ. Пусть m будетъ знакъ, символъ, который можетъ обозначать любое цѣлое число (нуль, положительное или отрицательное число); пусть n будетъ знакъ. выражающій какое-нибудь положительное число. Символъ m/n или $\frac{m}{n}$, составленный изъ этихъ двухъ знаковъ, вполнѣ опредѣляется заданными значеніями чиселъ m и n. Такого рода символы мы будемъ называть дробными числами, или дробями; относительно нихъ мы установимъ слѣдующія соглашенія.

Число m называется числителемъ, а n—знаменателемъ дроби.

Если знаменатель равенъ, напримѣръ—2, 3, 4 и т. д. 10, то дробь читается такъ: m вторыхъ, m третьихъ, m четвертыхъ .... m десятыхъ.

Символы $\frac{m}{n}$ и $\frac{qm}{qn}$ должны имѣть одно и то же значеніе, каково бы ни было положительное число q [3].

другими изслѣдователями. (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 31 Jahrgang, S. 174).

[3] Смыслъ послѣдняго соглашенія заключается въ слѣдующемъ: подъ дро-

Вслѣдствіе послѣдняго соглашенія, общаго дѣлителя, числителя и знаменателя каждой дроби можно опустить, не измѣняя значенія дроби (такъ напримѣръ, $\frac{2}{3}$ означаетъ то же, что $\frac{4}{6}$ или $\frac{10}{15}$ и т. д).

Уничтоженіе общаго дѣлителя q въ числителѣ и знаменателѣ, т. е. замѣна дроби $\frac{qm}{qn}$ дробью $\frac{m}{n}$, называется сокращеніемъ дроби на q.

Сообразно этому, для каждой дроби существуетъ нѣкоторая простѣйшая форма, которую называютъ несократимой формой: чтобы получить несократимую форму дроби, нужно раздѣлить числителя и знаменателя на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя. Въ несократимой дроби числитель и знаменатель суть числа первыя между собой.

Если намъ дано нѣсколько дробей, то мы можемъ представить ихъ въ такомъ видѣ, чтобы они имѣли одного и того же знаменателя. Для этого достаточно выбрать общимъ знаменателемъ любое число m, кратное всѣхъ знаменателей, и помножить числителя и знаменателя каждой дроби на множителя, недостающаго знаменателю до числа m. Такъ напримѣръ, любыя три дроби $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$, $\frac{c}{c_1}$ мы можемъ представить въ видѣ

$$\frac{a}{a_1} = \frac{ab_1c_1}{n},\quad \frac{b}{b_1} = \frac{bc_1a_1}{n},\quad \frac{c}{c_1} = \frac{ca_1b_1}{n}$$

гдѣ $n = a_1b_1c_1$.

3. Теперь мы условимся изъ двухъ дробей съ общимъ знаменателемъ считать большей ту, которая имѣетъ большаго числителя.

Это соглашеніе вполнѣ совмѣстимо съ опредѣленіемъ п. 2-го, потому что умноженіе или дѣленіе числителя и знаменателя на одно и то же число не вліяетъ на критерій, по которому мы условились отличать

бями мы разумѣемъ, какъ сказано, только опредѣленнаго рода символы; ближайшаго значенія мы этимъ символамъ не приписываемъ, сохраняя за собой право разумѣть подъ ними, что намъ угодно, приписать имъ то значеніе, какое мы найдемъ цѣлесообразнымъ. Мы уславливаемся, однако, подъ символами $\frac{m}{n}$ и $\frac{qm}{qn}$ всегда разумѣть одно и то же; это значитъ, если мы припишемъ какое либо значеніе символу $\frac{m}{n}$, то то же значеніе мы, въ силу этого соглашенія, должны приписать и символу $\frac{qm}{qn}$. Это соглашеніе допускаетъ, впрочемъ, и болѣе формальное (быть можетъ, и болѣе правильное) толкованіе. Но мы не считаемъ возможнымъ развивать здѣсь точку зрѣнія, которой авторъ, повидимому, не придерживается.

большую дробь отъ меньшей.[4])

Это соглашеніе удовлетворяетъ также основному требованію, которому должно удовлетворять всякое расположеніе чиселъ по величинѣ (§ 5). Если α, β и γ суть три дроби, и α больше, нежели β, и β больше, нежели γ, то α больше, нежели γ.

Условія, установленныя для сравненія дробей, могутъ быть такъ же выражены слѣдующимъ образомъ:

Изъ двухъ дробей $\alpha = \frac{a}{a_1}$ и $\beta = \frac{b}{b_1}$ первая меньше, равна или больше второй, смотря по тому, которое изъ трехъ соотношеній имѣетъ мѣсто

$$\begin{aligned} ab_1 &< ba_1 \\ ab_1 &= a_1b \\ ab_1 &> a_1b. \end{aligned} \qquad (2).$$

Это вытекаетъ непосредственно изъ предыдущаго опредѣленія, если мы приведемъ обѣ дроби къ общему знаменателю $a_1 b_1$, такъ что

$$\alpha = \frac{ab_1}{a_1b_1}, \beta = \frac{ba_1}{a_1b_1}.$$

4. Чтобы въ составъ дробныхъ чиселъ вошли также всѣ цѣлыя числа, введемъ слѣдующее соглашеніе: условимся разумѣть подъ дробью со знаменателемъ 1 цѣлое число, выраженное ея числителемъ, т. е. положимъ

$$\frac{a}{1} = a.$$

При этомъ условіи установленное выше расположеніе чиселъ по величинѣ (§ 5) вполнѣ согласуется съ критеріемъ сравненія дробныхъ чиселъ.

Такимъ образомъ совокупность всѣхъ дробныхъ чиселъ, включая сюда также и всѣ положительныя и отрицательныя цѣлыя числа, расположены въ одинъ рядъ, который мы будемъ называть рядомъ раціональныхъ чиселъ. Такъ же, какъ и у цѣлыхъ чиселъ, мы будемъ и у раціональныхъ чиселъ отличать ихъ абсолютную величину и ихъ

[4]) Авторъ хочетъ сказать слѣдующее: если, въ силу приведеннаго выше соглашенія, дробь $\frac{a}{a_1}$ окажется большей, нежели дробь $\frac{b}{b_1}$, то и дробь $\frac{ma}{ma_1}$ окажется большей, нежели $\frac{b}{b_1}$; это, конечно, очень легко доказать, приводя къ одному знаменателю, какъ дроби $\frac{a}{a_1}$ и $\frac{b}{b_1}$, такъ и дроби $\frac{ma}{ma_1}$ и $\frac{b}{b_1}$.

алгебраическую величину. При сравненіи чисель по абсолютной величинѣ принимаются во вниманіе только ихъ абсолютныя или положительныя значенія: при алгебраическомъ же расположеніи чиселъ всѣ отрицательныя числа меньше положительныхъ, а изъ двухъ отрицательныхъ чиселъ больше то, которое имѣетъ меньшую абсолютную величину. Дробь, абсолютная величина которой меньше единицы, называется **правильной дробью**. Правильной дробью является, слѣдовательно, такая дробь, числитель которой по абсолютной величинѣ меньше знаменателя.

5. Чтобы дать наглядное представленіе о дробяхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ указать важное примѣненіе ихъ къ реальнымъ объектамъ, представимъ себѣ рядъ точекъ, нанесенныхъ на прямой линіи, какъ на масштабѣ, на равныхъ разстояніяхъ одна отъ другой, скажемъ, на разстояніи сантиметра, это разстояніе мы будемъ называть **единицей длины**. Затѣмъ любую изъ этихъ точекъ обозначимъ числомъ нуль; далѣе, точки, расположенныя направо отъ нея, будемъ послѣдовательно обозначать цѣлыми положительными числами $+1$, $+2$, $+3, \ldots$; точки же, расположенныя налѣво, помѣтимъ числами -1, -2, $-3 \ldots$. Теперь раздѣлимъ каждый интервалъ на опредѣленное число, скажемъ, на n равныхъ частей; эти точки мы опять будемъ отмѣчать числами $+1$, $+2$, $+3 \ldots$ на право отъ нуля и числами -1, -2, -3 .... налѣво. Эти точки даютъ въ такомъ случаѣ картину послѣдовательнаго расположенія тѣхъ дробей, которыя имѣютъ знаменателя n или могутъ быть приведены къ этому знаменателю. Въ приложеніяхъ обыкновенно полагаютъ n равнымъ 10 или степени 10.

6. Изъ соотношенія (2) п. 3-го слѣдуетъ, что **изъ двухъ положительныхъ дробей съ одинаковымъ числителемъ та меньше, которая имѣетъ большій знаменатель**. Въ самомъ дѣлѣ, если $a = b$ и $a_1 > b_1$, то $ab_1 < ba_1$; отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ указать сколько угодно дробей, которыя по абсолютной величинѣ меньше заданной дроби. Такимъ образомъ, дробь $\frac{1}{n}$ тѣмъ меньше, чѣмъ больше знаменатель n: какова бы ни была положительная дробь $\frac{a}{b}$, можно выбрать число n настолько большимъ, чтобы $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$.[5]) Это предложеніе представляетъ собой частный случай слѣдующей общей теоремы.

Если α и β суть два произвольныхъ раціональныхъ числа,

[5]) Въ силу § 14,1, мы всегда можемъ выбрать число n настолько большимъ, чтобы $na > b$; тогда $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$.

не равныхъ между собой, то можно найти сколько угодно дробей, содержащихся между α и β.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha > \beta$ и

$$\alpha = \frac{a}{a_1}, \beta = \frac{b}{b_1}.$$

Слѣдовательно, $ab_1 > ba_1$, а потому разность $ab_1 - ba_1$ представляетъ собой положительное цѣлое число. Вслѣдствіе этого можно всегда подобрать множитель q такимъ образомъ, чтобы произведеніе $q(ab_1 - ba_1)$ было больше, нежели произвольное заданное число r (§ 14, 1),—иными словами, чтобы между числами qab_1 и qba_1 содержалось больше, чѣмъ r цѣлыхъ чиселъ. Если x есть одно изъ такихъ чиселъ, то

$$qab_1 > x > qba_1;$$

а потому

$$\frac{a}{a_1} > \frac{x}{qa_1b_1} > \frac{b}{b_1}.$$

Въ приведенномъ выше представленіи раціональныхъ чиселъ при помощи дѣленія масштаба съ понятіемъ объ абсолютномъ уменьшеніи дроби связывается представленіе о постоянно убывающемъ отрѣзкѣ; то же самое имѣетъ мѣсто при всѣхъ примѣненіяхъ дробныхъ чиселъ къ реальнымъ объектамъ; но съ точки зрѣнія теоретической въ установленномъ выше критеріи сравненія дробей не содержится ничего, объективно указывающаго на большую или меньшую величину.

7. До сихъ поръ мы ввели только дроби $\frac{m}{n}$ съ положительными знаменателями, и по существу дѣла этого достаточно; тѣмъ не менѣе часто бываетъ цѣлесообразно пользоваться также дробями съ отрицательными знаменателями. Эти дроби мы опредѣлимъ равенствомъ.

$$\frac{m}{-n} = \frac{-m}{n}.\text{[6]} \tag{4}$$

Только числа нуль мы никогда не будемъ употреблять въ качествѣ знаменателя дроби.

§ 18. Дѣйствія надъ дробями.

1. Чтобы сложить двѣ дроби или вычесть одну дробь изъ другой, ихъ приводятъ къ общему знаменателю (§ 17, 2). Общимъ знамена-

[6]) Иными словами, подъ дробью $\frac{m}{-n}$ мы условимся разумѣть то же, что подъ дробью $\frac{-m}{n}$.

телемъ служитъ общее кратное знаменателей данныхъ дробей: если же данныя дроби несократимы, то проще всего взять за общій знаменатель наименьшее кратное ихъ знаменателей.

Если же

$$\alpha = \frac{a}{n} \text{ и } \beta = \frac{b}{n},$$

то мы опредѣлимъ сумму и разность этихъ дробей равенствами

$$\alpha + \beta = \frac{a+b}{n} \text{ и } \alpha - \beta = \frac{a-b}{n}. \qquad (1)$$

Согласно этому опредѣленію, сумма или разность двухъ дробей также представляетъ собой нѣкоторую дробь.

Результатъ, который мы такимъ образомъ получаемъ, иногда оказывается сократимой дробью (напр. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$); но результатъ этотъ никогда не зависитъ отъ той формы, въ которой заданы данныя дроби: если мы умножимъ числителя и знаменателя одной изъ дробей α и β или обѣихъ дробей на q, то въ результатѣ числитель и знаменатель также окажутся умноженными на q.

Сообразно этому уже ясно, какъ слѣдуетъ опредѣлить сумму нѣсколькихъ дробей: легко также видѣть, что и основные законы этихъ операцій, которыя были изложены для цѣлыхъ чиселъ въ §§ 7 и 12, сохраняютъ свою силу и для дробей. Вообще, вычисленія надъ дробями, поскольку рѣчь идетъ только о сложеніи и вычитаніи, представляютъ собой не что иное, какъ вычисленія надъ цѣлыми числами въ примѣненіи къ особаго рода объектамъ, единица которыхъ называется $1/n$. Характернымъ для этихъ вычисленій является лишь то, что здѣсь приходится предварительно привести данныя числа къ опредѣленному виду, а затѣмъ результатъ, если возможно, сократить.

2. Умноженіе. Подъ произведеніемъ двухъ дробей $\frac{a}{a_1}$ и $\frac{b}{b_1}$ мы будемъ разумѣть дробь $\frac{ab}{a_1 b_1}$. Мы получаемъ такимъ образомъ правило умноженія, которое непосредственно распространяется на случай какого угодно числа сомножителей.

Чтобы перемножить нѣсколько дробей, нужно перемножить всѣхъ числителей и всѣхъ знаменателей. Произведеніемъ дробей будетъ дробь, числителемъ которой служитъ произведеніе всѣхъ числителей, а знаменателемъ—произведеніе всѣхъ знаменателей заданныхъ дробей.

Само собой разумѣется, что въ результатѣ можно сдѣлать всѣ

сокращенія, которыя онъ допускаетъ. Умноженіе цѣлыхъ чиселъ содержится, какъ частный случай, въ этомъ общемъ правилѣ умноженія дробей.

Что сочетательный и перемѣстительный законы остаются въ силѣ и при умноженіи дробей, вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія, потому что этимъ законамъ слѣдуютъ въ отдѣльности произведенія, служащія числителемъ и знаменателемъ произведенія дробей.

Точно также и относительно знака произведенія остается въ силѣ то же правило, что и при умноженіи цѣлыхъ чиселъ: произведеніе будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, имѣется ли четное или нечетное число отрицательныхъ сомножителей.

И здѣсь произведеніе равно нулю въ томъ и только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ сомножителей равенъ нулю (7).

Но относительно измѣненія абсолютной величины произведеніе дробей слѣдуетъ не тѣмъ законамъ, что произведеніе цѣлыхъ чиселъ. Именно:

Произведеніе $\alpha\beta$ по абсолютной величинѣ больше или меньше, нежели α, смотря по тому, представляетъ ли собой β правильную или неправильную дробь.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ $\alpha = \frac{a}{a_1}$, $\beta = \frac{b}{b_1}$, то $\alpha\beta$ меньше или больше, нежели α, смотря по тому, которое изъ двухъ неравенствъ имѣетъ мѣсто (§ 17, 3)

$$aa_1b < aa_1b_1 \text{ или } aa_1b_1 > aa_1b_1:$$

если a и a_1 суть положительныя числа, то это сводится къ тому, будетъ ли $b < b_1$ или $b > b_1$, т. е. будетъ ли β правильная или неправильная дробь.

3. Если α, β, γ суть три дроби, изъ которыхъ послѣдняя отлична отъ нуля, то равенство $\alpha\gamma = \beta\gamma$ будетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если $\alpha = \beta$. Это также слѣдуетъ изъ предложенія § 17, 3. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha = \frac{a}{a_1}$, $\beta = \frac{b}{b_1}$, $\gamma = \frac{c}{c_1}$; если $\alpha\gamma = \beta\gamma$, то

$$acb_1c_1 = bca_1c_1;$$

(7) Опредѣленіе § 17,2 вводитъ также дроби вида $\frac{0}{n}$, согласно опредѣленію § 17,4, $\frac{0}{1} = 0$; а такъ какъ $\frac{0}{n} = \frac{0 \cdot n}{1 \cdot n}$, то $\frac{0}{n}$ равно нулю при всякомъ знаменателѣ. Легко показать, что произведеніе нѣсколькихъ дробей обращается въ нуль только въ томъ случаѣ, если одинъ изъ сомножителей имѣетъ видъ $\frac{0}{n}$.

а такъ какъ числа c и c_1 отличны отъ нуля, то отсюда, въ силу послѣдняго предложенія § 8, слѣдуетъ, что

$$ab_1 = ba_1,$$

т. е. $\alpha = \beta$.

4. Дѣленіе. Въ числовомъ ряду, который мы такимъ образомъ получили, задача о дѣленіи можетъ быть поставлена и рѣшена во всей ея общности.

Пусть α и β будутъ два произвольныхъ раціональныхъ числа. Требуется найти такое число ξ, которое нужно помножить на β, чтобы получить число α, такъ что

$$\alpha = \xi\beta. \tag{2}$$

Эта задача, очевидно, не имѣетъ вовсе рѣшенія, если $\beta = 0$, а α не равно нулю, потому что при $\beta = 0$ произведеніе $\xi\beta = 0$, каково бы ни было значеніе множителя ξ. Если $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то ξ можетъ имѣть совершенно произвольное значеніе—каждое число удовлетворяетъ требованію.

Если, однако, β отлично отъ нуля, то задача можетъ имѣть не болѣе одного рѣшенія. Дѣйствительно, если бы существовало два числа ξ и ξ', удовлетворяющихъ требованію, то должно было бы имѣть мѣсто равенство $\xi\beta = \xi'\beta$; согласно п. 3, это возможно только въ томъ случаѣ, когда $\xi = \xi'$.

Итакъ, дѣло сводится къ тому, чтобы найти одно число, удовлетворяющее требованію (2). Если $\alpha = \frac{a}{a_1}$ и $\beta = \frac{b}{b_1}$, то мы получимъ такое число, полагая

$$\xi = \frac{ab_1}{ba_1}, \tag{3}$$

ибо въ такомъ случаѣ

$$\beta\xi = \frac{ab_1 b}{ba_1 b_1} = \frac{a}{a_1}.$$

Образованіе числа ξ мы будемъ называть дѣленіемъ числа α на число β; число α мы будемъ называть дѣлимымъ, β—дѣлителемъ, ξ—частнымъ.

Если α и β суть цѣлыя числа, то ξ есть дробь, которая сводится къ цѣлому числу, когда α кратно β. Такимъ образомъ задача о дѣленіи двухъ цѣлыхъ чиселъ безъ остатка можетъ быть, вообще говоря, разрѣшена только при помощи дробей и содержится, какъ частный случай, въ задачѣ о дѣленіи дробей.

Частное отъ дѣленіе двухъ дробей мы будемъ также изображать такъ:

$$\alpha : \beta, \ \alpha/\beta, \ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{ab_1}{ba_1} \qquad (4)$$

(α дѣленное на β); вмѣстѣ съ тѣмь мы выразимь полученный нами результатъ слѣдующимъ правиломь.

Чтобы раздѣлить одну дробь на другую, нужно помножить числителя дѣлимаго на знаменателя дѣлителя и знаменателя дѣлимаго на числителя дѣлителя; первое произведеніе будетъ числителемь частнаго, второе его знаменателемъ.

Вь выраженіи (4) число α также называютъ часто числителемъ, а β—знаменателемь дроби α/β.

Дробь $1/\alpha$ называется обратной по отношенію къ α: она получается путемь обращенія числа α, т. е. путемь замѣщенія числителя и знаменателя другъ другомь.

Дѣленіе можетъ быть приведено къ умноженію при помощи слѣдующаго правила:

5. Чтобы раздѣлить дробь α на дробь β можно помножить дѣлимое на обращеннаго дѣлителя.

Вслѣдствіе того, что равенство (2) при $\beta = 0$ либо вовсе не имѣетъ рѣшенія, либо имѣетъ ихъ безчисленное множество, изъ ариөметики дѣленіе на нуль вовсе исключено. Однако, въ нѣкоторыхъ отдѣлахъ высшаго анализа бываетъ цѣлесообразно приписывать извѣстное значеніе также символу $1/0$.

6. Возвышеніе въ степень. Когда понятіе объ умноженіи дробей установлено, то возвышеніе въ степень опредѣляется само собой. Если α есть дробь, а n натуральное число, то α^n представляетъ собой произведеніе n сомножителей, равныхъ α. Число α называется основаніемъ, n—показателемь, α^n — n-ой степенью числа α. Всѣ эти понятія опредѣлены только для цѣлыхъ и положительныхъ значеній числа n. Мы обобщимъ, однако, это понятіе; именно—мы распространимь его на тотъ случай, когда показатель равень нулю или имѣетъ отрицательное значеніе. Мы достигнемъ этого лучше всего тѣмъ, что распространимъ на всѣ эти случаи основное равенство

$$\alpha^m . \alpha^n = \alpha^{m+n} \qquad (5)$$

которое для цѣлыхъ и положительныхъ показателей ([8]) вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія.

( ) Иными словами, мы постараемся опредѣлить степень съ отрицательнымъ или нулевымь показателемъ такимь образомъ, чтобы равенство (5) осталось въ силѣ при всѣхъ цѣлыхъ значеніяхъ показателя.

Если мы, сообразно этому, положимъ въ равенствѣ (5) $n = 0$, то получимъ

$$\alpha^m \cdot \alpha^0 = \alpha^m;$$

если поэтому α, а стало быть, и α^m отличны отъ нуля, что мы и будемъ теперь предполагать, то

$$\alpha^0 = 1 \qquad (6).$$

Далѣе, если мы положимъ въ равенствѣ (5) $n = -m$, то получимъ

$$\alpha^m \cdot \alpha^{-m} = \alpha^0 = 1,$$

такъ что

$$\alpha^{-m} = \frac{1}{\alpha^m}.$$

7. Итакъ, если мы хотимъ, чтобы соотношеніе (5) сохранило свою силу, то мы должны подъ α^0 разумѣть 1, а подъ α^{-m} —число, обратное α^m.

Равенство $1^m = 1$ остается справедливымъ и при этомъ обобщеніи.

8. Если α есть неправильная дробь, то степень α^n растетъ вмѣстѣ съ показателемъ n; Это вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія степени, какъ произведенія равныхъ сомножителей. Мы имѣемъ, однако, теперь возможность установить ближе ходъ этого возрастанія.

Если p есть цѣлое положительное число, большее, нежели 1, то α^p больше, нежели α, и мы можемъ вставить между α и α^p число γ такимъ образомъ, что

$$\alpha^p > \gamma > \alpha.$$

Умножая обѣ части этого неравенства на α, мы получимъ:

$$\alpha^{p+1} > \gamma\alpha = \gamma + \gamma(\alpha-1) > \gamma + \alpha(\alpha-1) > \alpha.$$

Если мы повторимъ то же разсужденіе, замѣняя, однако, p черезъ $p+1$ и γ черезъ $\gamma + \alpha(\alpha-1)$, то мы получимъ:

$$\alpha^{p+2} > \gamma + 2\alpha(\alpha-1);$$

отсюда помощью индукціи заключаемъ, что для каждаго цѣлаго положительнаго числа n

$$\alpha^{p+n} > \gamma + n\alpha(\alpha-1). \qquad (8)$$

Такъ какъ $\alpha(\alpha-1)$ есть положительное число, то число n можно выбрать настолько большимъ, чтобы $\gamma + n\alpha(\alpha-1)$ было больше любого заданнаго числа c. Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему выводу:

Если $\alpha > 1$ и c есть произвольное заданное положительное число, то $\alpha^n > c$, коль скоро n превышаетъ нѣкоторое достаточно большое число m. Это представляетъ собой обобщеніе предложенія § 10,5.

Примѣняя это предложеніе къ обращенному числу, мы легко заключаемъ отсюда, что α^n станонится меньше любого заданнаго положительнаго числа c, если показатель n принимаетъ достаточно большія значенія.

Возвратимся, однако, къ тому случаю, когда $\alpha > 1$. Изъ соотношенія (8) слѣдуетъ, что

$$\alpha^{n+p} > n\alpha(\alpha-1);$$

поэтому

$$\alpha^n > n\alpha(\alpha-1)\alpha^{-p}.$$

Если мы здѣсь положимъ для сокращенія $\alpha(\alpha-1)\alpha^{-p} = \delta$, то получимъ:

$$\alpha^n > \delta n, \tag{9}$$

гдѣ δ представляетъ собой положительное число, зависящее отъ α, но не зависящее отъ n.

Если $k+1$ есть произвольное заданное цѣлое положительное число, то, какъ бы ни было велико цѣлое число m, всегда можно найти два послѣдовательныхъ кратныхъ числа $k+1$, между которыми лежитъ число m, такъ что

$$(k+1)n \leq m < (k+1)(n+1). \tag{10}$$

Возводя теперь обѣ части неравенства (9) въ $(k+1)$-ую степень и принимая во вниманіе, что $\alpha^m > \alpha^{n(k+1)}$, получимъ:

$$\alpha^m > \delta^{k+1}\, n^{k+1}. \tag{11}$$

Далѣе изъ соотношенія (10) находимъ:

$$n > \frac{m-k-1}{k+1} = \frac{m}{k+1}\left(1 - \frac{k+1}{m}\right).$$

Если при этомъ m выбрано больше, нежели $2(k+1)$, то предыдущее неравенство даетъ (*)

$$n > \frac{m}{2(k+1)};$$

(*) Ибо въ этомъ случаѣ

$$\frac{k+1}{m} < \frac{1}{2} \text{ и } 1 - \frac{k+1}{m} > \frac{1}{2}$$

поэтому, согласно неравенству (11),

$$\alpha^m > m^k \cdot \frac{\delta^{k+1} m}{[2(k+1)]^{k+1}}. \tag{12}$$

Съ другой стороны, если c есть произвольное заданное число, то мы можемъ взять число m настолько большимъ, чтобы

$$\frac{\delta^{k+1}\ m}{[2(k+1)]^{k+1}} > c \tag{13}$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha^m > cm^k.$$

Такимъ образомъ доказано слѣдующее предложеніе:

Если $\alpha > 1$, а k есть произвольное заданное натуральное число и, наконецъ, c также представляетъ собою сколь угодно большое положительное число, то $\alpha^m > cm^k$, коль скоро m превосходитъ нѣкоторое достаточно большое число.

Это предложеніе выражаютъ еще такъ: α^m возрастаетъ быстрѣе, нежели сколь угодно высокая степень числа m.

§ 19. Десятичныя дроби.

1. При нашей индійской системѣ счисленія каждое натуральное число можно изображать сколь угодно большимъ количествомъ цифръ; для этого достаточно приписать съ лѣвой стороны надлежащее число нулей. Такимъ образомъ 03 означаетъ то же, что 3, 000 650 то же, что 650. Но эти нули съ лѣвой стороны излишни, и потому ихъ не пишутъ.

Разсмотримъ теперь дроби, знаменателями которыхъ служатъ степени числа 10; такія дроби имѣютъ видъ

$$\alpha = A.10^{-n}, \tag{1}$$

гдѣ A есть натуральное число. Въ виду сдѣланнаго выше замѣчанія, такого рода дроби можно опредѣленнымъ образомъ обозначать безъ знаменателя, пользуясь только значеніемъ мѣста, занимаемаго цифрой.

Съ этой цѣлью мы пишемъ число A такъ, чтобы оно имѣло болѣе n цифръ, скажемъ $n + m + 1$ цифръ гдѣ $m \geqq 0$[9]). Цифру высшаго разряда мы обозначимъ черезъ a_m, а затѣмъ слѣдующія цифры обозна-

[9]) Если число A нормально изображается болѣе, нежели n цифрами, то мы сохраняемъ обычное изображеніе; если же число A въ обычномъ изображеніи имѣетъ меньше n цифръ, то мы его дополняемъ нулями съ лѣвой стороны, такъ чтобы получать $n+1$ цифръ. Число m при этомъ условіи всегда имѣетъ опредѣленное значеніе; но можно сдѣлать m больше, если писать съ лѣвой стороны еще лишніе нули.

чимъ тою же буквою съ послѣдонательно убывающими индексами, такъ что нѣкоторые изъ этихъ индексовъ будутъ отрицательны.

$$A = a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n};$$

цифры a имѣютъ, конечно, значенія, принадлежащія ряду 0,1, ... 9. Въ случаѣ надобности вначалѣ должно быть написано надлежащее число нулей. Теперь положимъ

$$\alpha = A.10^{-n} = a_m\, a_{m-1} \ldots a_1 a_0,\ a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n}, \quad (2)$$

приписывая этому выраженію значеніе

$$a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 + a^{-1} 10^{-1} + \\ + a^{-2} 10^{-2} + \ldots + a_{-n} 10^{-n}.$$

Такимъ образомъ запятая указываетъ, гдѣ начинаются отрицательныя степени 10. (*)

Если $A < 10^m$, т. е. если α есть правильная дробь, то всѣ цифры, стоящія до запятой, должны быть нулями. Въ этомъ случаѣ передъ запятой достаточно писать только одинъ нуль. Можно было бы даже опустить и этотъ нуль, но было бы очень непривычно, а иногда даже неясно начинать число просто запятой.

Нули же, стоящіе непосредственно послѣ запятой, если таковые имѣются, имѣютъ существенное значеніе—точно такъ же, какъ нули, стоящіе въ концѣ цѣлаго числа. Напротивъ того, послѣ послѣдней цифры можно приписать сколько угодно нулей. Обыкновенно нули, стоящіе въ концѣ десятичной дроби, послѣ значащихъ цифръ, опускаются.

Если мы будемъ пользоваться для обозначенія числа въ десятичной системѣ общимъ символомъ a, съ послѣдовательными индексами, т. е. будемъ писать

$$a_{m-1}\ a_{m-2} \ldots a_n,$$

гдѣ m и n могутъ имѣть положительныя и отрицательныя нулевыя значенія ($m > n$); а самые символы a_{m-1}, a_{m-2} .... означаютъ цифры (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), то мы можемъ вовсе не ставить запятой; значеніе цифры вполнѣ опредѣляется индексомъ.

Дробь, имѣющая знаменателемъ степень десяти и написанная въ формѣ (2), называется **десятичною дробью**. Въ отличіе отъ десятичныхъ дробей остальныя называются **простыми** дробями.

2. Дѣйствія надъ десятичными дробями совершаются тѣми же способами, что и надъ цѣлыми числами; при сложеніи и при вычитаніи

(*) Этимъ обозначеніемъ десятичныхъ дробей въ первый разъ сталъ пользоваться, повидимому, Joost Bürgi (1552—1632 или 1633); онъ, имѣлъ, правда, предшественниковъ, но вполнѣ правильная постановка этого вопроса принадлежитъ ему (Cantor. Gesch. der Mathematik, Bd. II. S. 617).

нужно писать числа такимъ образомъ, чтобы цифры, выражающія одни и тѣ же разряды, стояли одни подъ другими. Если при этомъ приписать въ случаѣ нужды нули такъ, чтобы всѣ числа имѣли послѣ запятой одинаковое число цифръ, то вычисленіе можно вести такъ, какъ будто-бы запятой и вовсе не было; въ результатѣ нужно только поставить запятую на томъ-же мѣстѣ, которое она занимаетъ въ данныхъ числахъ.

3. Если мы умножимъ десятичную дробь на 10, то запятая перемѣстится на одинъ знакъ вправо; при умноженіи же на 10^h она перемѣщается на h знаковъ вправо. Если мы дѣлимъ десятичную дробь на 10^h, то запятая перемѣщается на h знаковъ влѣво. Эти операціи всегда могутъ быть выполнены, иногда бываетъ только нужно приписать справа или слѣва надлежащее число нулей.

4. Если нужно перемножить двѣ десятичныя дроби α и β, изъ которыхъ первая имѣетъ μ, а вторая ν десятичныхъ знаковъ послѣ запятой, то опускаютъ прежде всего обѣ запятыя, т. е. перемножаютъ числа $10^\mu.\alpha$ и $10^\nu.\beta$. Произведеніе равно поэтому $10^{\mu+\nu}\alpha\beta$; чтобы получить $\alpha\beta$ остается раздѣлить полученное число на $10^{\mu+\nu}$, т. е. отдѣлить въ результатѣ съ правой стороны $\mu+\nu$ знаковъ запятой. Такимъ образомъ умноженіе десятичныхъ дробей приводится къ умноженію цѣлыхъ чиселъ.

§ 20. Приближенныя значенія десятичныхъ дробей.

1. Значеніе цифръ въ десятичной дроби становится тѣмъ меньше, чѣмъ далѣе эта цифра отстоитъ отъ запятой по направленію слѣва направо. Однако, часто случается, что при числовыхъ заданіяхъ или вычисленіяхъ цифры, занимающія послѣднія мѣста, начиная съ нѣкоторой, вовсе не принимаются во вниманіе („опускаются"); иногда это обусловливается тѣмъ, что дальнѣйшія цифры вовсе неизвѣстны, иногда-же эти цифры не имѣютъ значенія по самому характеру задачи. Дробь, которую мы получаемъ, опуская послѣдніе десятичные знаки въ десятичной дроби, называется **приближеннымъ ея значеніемъ**. Пріемъ этотъ находитъ себѣ оправданіе въ слѣдующемъ предложеніи:

Написанное въ десятичной системѣ число

$$\rho = d_{n-1}\, d_{n-2} \,\ldots\, d_k \qquad (1)$$

(гдѣ, какъ n, такъ и k могутъ имѣть отрицательныя значенія, но $n > k$ (§ 19,1)) всегда меньше нежели 10^n [10]).

[10]) Здѣсь указатель $n-1$ при первой цифрѣ указываетъ, что число начинается n-ымъ разрядомъ; если это число цѣлое, то $k=0$; если-же оно имѣетъ десятичные знаки, то k имѣетъ отрицательное значеніе; если, наконецъ, число предста-

Въ самомъ дѣлѣ, если мы замѣнимъ всѣ цифры a_{n-1}, a_{n-2} .... a_k десятками, то мы это число увеличимъ, или по крайней мѣрѣ, не уменьшимъ; такъ что

$$\rho \leqslant 9.10^k + 9.10^{k+1} + \dots + 9.10^{n-1}.$$

Если мы сюда придадимъ 10^k, т. е. увеличимъ послѣднюю цифру единицей, то мы получимъ

$$9.10^k + 10^k = 10^{k+1},$$
$$9.10^{k+1} + 10^{k+1} = 10^{k+2},$$
$$\cdot \qquad \cdot$$
$$9.10^{n-1} + 10^{n-1} = 10^n.$$

Складывая эти равенства и опуская съ обѣихъ сторонъ числа 10^{k+1}, 10^{k+2} .... 10^{n-1}, получимъ

$$\rho + 10^k \leqslant 10^n;$$

слѣдовательно, подавно

$$\rho < 10^n, \qquad (2)$$

что и требовалось доказать.

Отсюда слѣдуетъ:

Значеніе написаннаго въ десятичной системѣ числа α

$$\alpha = a_m\, a_{m-1} \dots a_n\, a_{n-1} \dots a_k$$

больше, нежели

$$A = a_m\, a_{m-1} \dots a_n$$

и меньше, нежели

$$A' = a_m\, a_{m-1} \dots (a_n + 1) = A + 10^n.$$

Если $a_n = 9$, то здѣсь, конечно, нужно вмѣсто a_{n+1} $(a_n + 1)$ написать $(a_{n+1} + 1)$ 0.

Такимъ образомъ, ошибка, которую мы дѣлаемъ, опуская цифры, стоящія послѣ a_n, меньше, нежели 10^n.

Вообще говоря, замѣняя десятичную дробь ея приближеннымъ значеніемъ, всегда стараются сдѣлать абсолютную величину ошибки возможно меньшей. Сохраняя одно и тоже число десятичныхъ знаковъ, мы можемъ замѣнить число α либо числомъ A, либо числомъ A'.

Такъ какъ

$$\alpha = A + \rho = A' - (10^n - \rho),$$

гдѣ ρ имѣетъ прежнее значеніе (1), то ошибка въ первомъ случаѣ равна

вляетъ собой правильную дробь, т. е. начинается десятичными знаками, то не только k, но и n имѣетъ отрицательное значеніе.

ρ, во второмъ случаѣ равна $\rho' = 10^n - \rho$. Послѣдняя ошибка меньше первой, если $\rho > 10^n - \rho$. т. е. если $2\rho > 10^n$. Это имѣетъ мѣсто. если первая отбрасываемая цифра $a_{n-1} = 5, 6, 7, 8$ или 9; напротивъ, $\rho < 10^n - \rho$, если a_{n-1} равно 0, 1, 2, 3, 4. Единственное исключеніе имѣетъ мѣсто, если $a_{n-1} = 5$, а всѣ слѣдующія цифры равны 0; въ этомъ случаѣ $\rho = \rho'$ и оба приближенія A и A' даютъ ту же ошибку. Мы получаемъ отсюда слѣдующее правило:

Опуская въ десятичной дроби для полученія приближеннаго ея значенія, послѣдніе десятичные знаки, слѣдуетъ увеличить послѣднюю удерживаемую цифру на единицу. если первая изъ отбрасываемыхъ цифръ больше 4-хъ.

2. При производствѣ ариѳметическихъ дѣйствій надъ приближенными значеніями десятичныхъ дробей опущенные десятичные знаки могутъ иногда оказать вліяніе на тѣ знаки, которые мы желаемъ сохранить. Если, напримѣръ, мы складываемъ k приближенныхъ дробей, составленныхъ по указанному выше правилу, то послѣдній десятичный знакъ, который мы сохраняемъ, можетъ оказаться maximum на $k/2$ единицъ больше или меньше истиннаго своего значенія. Но этого наибольшаго значенія ошибка достигаетъ только въ томъ случаѣ, если ошибки всѣхъ приближеній имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ и всѣ достигаютъ наибольшаго значенія. Если-же намъ даны только приближенія, то о вѣроятности той или другой ошибки можно судить по правиламъ, указываемымъ исчисленіемъ вѣроятностей. Большія ошибки оказываются при этомъ менѣе вѣроятными, чѣмъ меньшія.

Если мы имѣемъ еще какія нибудь свѣдѣнія относительно ошибки, если мы знаемъ, напримѣръ, что имѣется число съ положительной ошибкой или число съ отрицательной ошибкой, то предѣлы возможной ошибки результата еще болѣе сближаются.

3. Если нужно перемножить двѣ приближенныя десятичныя дроби, то обыкновенный пріемъ умноженія въ примѣненіи къ низшимъ десятичнымъ знакамъ даетъ совершенно безполезный результатъ и представляетъ собой до нѣкоторой степени безплодную работу. Въ этихъ случаяхъ пользуются поэтому такъ называемымъ сокращеннымъ умноженіемъ.

Соображенія, на которыхъ этотъ пріемъ основанъ, лучше всего уясняются на примѣрѣ.

Положимъ, что намъ нужно перемножить два четырехзначныхъ числа

$$\alpha = a_3\, a_2\, a_1\, a_0,$$
$$\beta = b_3\, b_2\, b_1\, b_0.$$

Если мы начнемъ умноженіе съ высшаго разряда множителя β, то вычисленіе, согласно обычному способу умноженія, расположится слѣ-

дующимъ образомъ:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & & \\
b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\
\hline
a_3 b_3 & a_2 b_3 & a_1 b_3 & a_0 b_3 & & & \\
 & a_3 b_2 & a_2 b_2 & a_1 b_2 & a_0 b_2 & & \\
 & & a_3 b_1 & a_2 b_1 & a_1 b_1 & a_0 b_1 & \\
 & & & a_3 b_0 & a_2 b_0 & a_1 b_0 & a_0 b_0 \\
 & & & & & & \\
c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 .
\end{array}
$$

При этомъ, естественно, какъ въ произведеніяхъ $a_h b_k$, такъ и въ суммахъ c_k, превосходящихъ число 9, десятки должны быть присоединены къ слѣдующему разряду. Однако, на тѣхъ мѣстахъ, на которыхъ въ нашей схемѣ поставлены звѣздочки, должны были стоять не нули, а неизвѣстныя намъ цифры. Такимъ образомъ цифры c_2, c_1, c_0 могутъ также оказаться ошибочными. При этомъ цифры по направленію отъ c_2 къ c_0 становятся все менѣе надежными. Ошибка въ числѣ c_2 можетъ въ неблагопріятномъ случаѣ, когда всѣ слагаемыя, изъ которыхъ оно получается достигаютъ наибольшаго значенія, отразиться на цифрѣ c_1, можетъ даже дорости до 3 единицъ этого разряда. Вслѣдствіе этого въ окончательномъ результатѣ цифра c_2 уже не проставляется, но отдѣльныя слагаемыя этого разряда оказывается нужнымъ вычислить для исправленія цифръ c_3 и c_4. Точно также, каждымъ свѣдѣніемъ, какое мы имѣемъ относительно цифръ, помѣченныхъ звѣздочками, можно воспользоваться для исправленія результата. Но умѣлое примѣненіе всѣхъ этихъ пріемовъ на практикѣ достигается только упражненіемъ (*).

(*) Lüroth. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Leipzig, Teubner. 1900 Полная теорія приближеннаго вычисленія довольно сложна. Введеніемъ въ этотъ вопросъ могутъ служить небольшія сочиненія:

В. Циммерманъ. Приближенныя вычисленія.

В. Ермаковъ. Приближенное вычисленіе. Кіевъ, 1905.

ГЛАВА VI

Ирраціональныя числа.

§ 21. Извлеченіе квадратныхъ корней.

1. Среди чиселъ натуральнаго ряда есть такія, которыя представляють собою вторыя степени (квадраты) другихъ чиселъ того же ряда, напримѣръ:

$$1 = 1^2,\ \ 4 = 2^2,\ \ 9 = 3^2,\ \ 16 = 4^2,\ \ 25 = 5^2, \qquad (1)$$
$$36 = 6^2,\ 49 = 7^2,\ 64 = 8^2,\ \ 81 = 9^2,\ 100 = 10^2.$$

Эти числа 1, 4, 9, 16, ... называются полными квадратами, такъ какъ они являются вторыми степенями чиселъ 1, 2, 3, 4, ...; эти послѣднія называются корнями (точнѣе квадратными корнями) предыдущихъ. Это взаимоотношеніе изображается такъ:

$$1 = \sqrt{1},\ \ 2 = \sqrt{4},\ \ 3 = \sqrt{9},\ \ 4 = \sqrt{16} \text{ и т. д.}$$

Число n^2 есть n-ый полный квадратъ; разность между n-ымъ и $(n-1)$-ымъ квадратами равна, слѣдовательно, числу $n^2 - (n-1)^2$, или $2n - 1$, т. е. представляетъ собою n-ое нечетное число.

2. Задача. Дано цѣлое число a, написанное въ десятичной системѣ; нужно узнать, представляетъ ли оно собой полный квадратъ или нѣтъ; въ первомъ случаѣ нужно найти его корень, во второмъ — опредѣлить наибольшій полный квадратъ, содержащійся въ числѣ a, и найти корень изъ этого послѣдняго числа.

Вычисленіе, помощью котораго рѣшается предложенная задача, называется извлеченіемъ квадратнаго корня и обозначается знакомъ $\sqrt{}$ впереди числа a. Если послѣднее не превосходитъ ста, задача можетъ быть рѣшена непосредственно помощью таблицы (1).

Предположимъ, что задача наша рѣшена для какого-нибудь числа a, т. е. найдено число α, удовлетворяющее условію

$$\alpha^2 \leqslant a < (\alpha+1)^2 \qquad (2).$$

Мы покажемъ, какимъ образомъ, пользуясь этимъ, можно рѣшить ту же

задачу для другого числа a_1, связаннаго съ числомъ a равенствомъ:

$$a_1 = 100a + 10b + c,$$

гдѣ буквы b и c обозначаютъ нѣкоторыя цифры.

Число a_1 имѣетъ двумя цифрами больше, нежели число a, и получается, если приписать къ послѣднему двѣ цифры bc.

Мы положимъ,

$$\alpha_1 = 10\alpha + \beta; \qquad (4)$$

намъ остается опредѣлить число β, удовлетворяющее условію:

$$(10\alpha + \beta)^2 \leqq a_1 < (10\alpha + \beta + 1)^2. \qquad (5)$$

Докажемъ, что буква β обозначаетъ нѣкоторую цифру. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы было $\beta > 10$, то, согласно условію (5), мы имѣли бы

$$100(\alpha + 1)^2 \leqq (10\alpha + \beta)^2 \leqq 100a + 10b + c,$$

или

$$(\alpha + 1)^2 \leqq a + b10^{-1} + c10^{-2},$$

а въ виду того, что $(\alpha + 1)^2$ есть цѣлое число, и кромѣ того $b10^{-1} + c10^{-2}$ меньше единицы, мы пришли бы къ заключенію, что

$$(\alpha + 1)^2 \leqq a;$$

это же противорѣчитъ условію (2), согласно которому $(\alpha+1)^2 > a$.

Такимъ образомъ число β должно имѣть одно изъ десяти значеній: 0, 1, 2, ... 9; согласно-же соотношенію (5), это должно быть самое большее число, удовлетворяющее условію

$$\beta\,(20\alpha + \beta) \leqq 100(a - \alpha^2) + 10b + c \qquad (6).$$

Нетрудно поэтому рѣшить, какое именно значеніе нужно выбрать для числа β. На практикѣ это дѣлается слѣдующимъ образомъ. Число $10(a - \alpha^2) + b$ дѣлимъ на число 2α, и въ частномъ получимъ для числа β нѣкоторое предварительное значеніе, которое послѣ соотвѣтствующей повѣрки иногда должно быть уменьшено на одну или нѣсколько единицъ; при нѣкоторомъ навыкѣ вычисленіе дѣлается легко и быстро. На этомъ основанъ извѣстный алгориѳмъ извлеченія квадратнаго корня. Примѣръ:

$\sqrt{8\,.\,40\,.\,00\,.\,00} = 2898$
4
440 : 4 | 8
384
5600 : 56 | 9
5121
47900 : 578 | 8
46304
1596

Вторая цифра результата 8 здѣсь получена послѣ дѣленія 44 : 4, т. е. частное 11 пришлось уменьшить на три единицы.

2. Пользуясь указаннымъ пріемомъ, можно получить десятичную дробь, квадратъ которой сколь угодно мало отличается отъ даннаго числа a. Съ этой цѣлью ищемъ цѣлое число α^2, которое представляетъ собою наибольшій полный квадратъ, содержащійся въ числѣ $10^{2n}a$. Тогда имѣемъ

$$\alpha^2 \leqslant 10^{2n}a < (\alpha+1)^2. \qquad (7)$$

Дѣля всѣ члены послѣдняго выраженія на 10^{2n} и вводя обозначеніе,

$$\alpha_n = \alpha 10^{-n}, \qquad (8)$$

получимъ

$$\alpha^2_n \leqslant a < (\alpha_n + 10^{-n})^2. \qquad (9)$$

Число $10^{2n}a$ получится изъ числа a, если къ послѣднему приписать $2n$ нулей; число α_n получится изъ числа α, если отдѣлимъ послѣднія n цифръ запятой. Если послѣднюю цифру дроби α_n увеличимъ на одну единицу, то получится уже слишкомъ большое значеніе.

Числа α_n называются приближенными значеніями квадратнаго корня изъ числа a. Такъ, въ вышеприведенномъ примѣрѣ число 28,98 есть приближенное значеніе квадратнаго корня изъ 840.

Тѣмъ же пріемомъ можно пользоваться и при нахожденіи приближенныхъ значеній квадратныхъ корней изъ десятичныхъ дробей. Предварительно нужно лишь разбить дробь на грани въ ту и въ другую сторону отъ запятой по двѣ цифры въ каждой грани, кромѣ первой, въ которой иногда можетъ быть только одна цифра; въ концѣ дроби, если нужно, приходится приписать еще одинъ нуль.

§ 22. Ирраціональныя числа.

О каждомъ числѣ натуральнаго ряда легко судить, представляетъ ли оно собою полный квадратъ или нѣтъ, если только извѣстно, каковы первоначальные множители этого числа. Дѣйствительно, обозначимъ черезъ a, b, c, ... отличныя другъ отъ друга первоначальныя числа, а α, β, γ, ... пусть будутъ положительные показатели; пусть далѣе

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots;$$

число m представляетъ собою полный квадратъ, если всѣ показатели— числа четныя; это условіе необходимое и достаточное. Это слѣдуетъ изъ теоремы объ однозначности разложенія натуральнаго числа на первоначальныхъ множителей.

Если указанное условіе выполнено, т. е. $\alpha = 2\alpha'$, $\beta = 2\beta'$, $\gamma = 2\gamma'$,... то квадратный корень числа m представится въ такой формѣ:

$$\sqrt{m} = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}$$

Если же число m не представляетъ собою полнаго квадрата, то нельзя также указать такой дроби p/q. квадратъ которой равнялся бы числу m.

Дѣйствительно, если у какого-нибудь первоначальнаго множителя a числа m показателемъ степени служитъ нечетное число α, то равенство $mq^2 = p^2$ невозможно; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ показатель числа a представляетъ собой нечетное число, то это равенство было бы возможно только въ томъ случаѣ. если бы и въ число p^2 множитель a входилъ съ нечетнымъ показателемъ.

Точно также несократимая дробь m/n представляетъ собою полный квадратъ нѣкоторой дроби p/q лишь въ томъ случаѣ. когда числа m и n оба представляютъ собой полные квадраты.

Дѣйствительно, предположимъ, что числа m и n не имѣютъ ни одного общаго множителя; положимъ далѣе, что въ составъ числа m входитъ простое число a съ нечетнымъ показателемъ α; если бы при этихъ условіяхъ имѣло мѣсто равенство $mq^2 = np^2$, то правая его часть np^2 должна была бы содержать множителя a^{α}; въ виду того, однако, что знаменатель n не содержитъ множителя a, мы должны были бы притти къ заключенію, что полный квадратъ p^2 содержитъ множитель a въ нечетной степени; это же не можетъ имѣть мѣста *).

2. Такимъ образомъ выполненіе дѣйствія, обратнаго возвышенію въ степень, оказывается иногда невозможнымъ уже при показателѣ 2. Задача эта представляется въ той же степени неразрѣшимой, какъ вопросъ о дѣленіи цѣлыхъ чиселъ до введенія дробей.

*) Полагаютъ, что Пиѳагоръ первый ясно понялъ невозможность выразить числомъ (ἄλογον) корень квадратный изъ числа, которое не представляетъ собой полнаго квадрата. напр. квадратный корень изъ числа 2, который представляетъ собою отношеніе діагонали квадрата къ его сторонѣ. У Евклида (Elemente X. 117. Heiberg, т. III, стр. 409) находимъ указанное еще Аристотелемъ доказательство этого предложенія. Доказательство это по существу совпадаетъ съ приведеннымъ нами въ текстѣ: нельзя указать двухъ цѣлыхъ чиселъ, которыя не имѣли бы общихъ множителей и удовлетворяли бы условію $2x^2 = y^2$; дѣйствительно, при наличности такого равенства число y было бы четное (такъ какъ его квадратъ, т. е. y^2 было бы четнымъ числомъ $2x^2$); слѣдовательно, квадратъ его y^2 былъ бы кратнымъ четырехъ. Но если число $2x^2$ кратно четырехъ, то число x^2 кратно 2, слѣдовательно, число x было бы также четнымъ и имѣло бы съ числомъ y общаго множителя 2, что противорѣчитъ условію.

Дедекиндъ въ своемъ сочиненіи „Непрерывность и ирраціональныя числа" приводитъ другое доказательство, не основанное на теоремахъ о разложеніи числа на первоначальныхъ множителей.

Если же мы тѣмъ не менѣе желаемъ сдѣлать нашу задачу разрѣшимой, намъ необходимо вновь расширить понятіе о числѣ, введя числа новой природы; эти послѣднія мы будемъ называть вообще *ирраціональными числами*; въ противоположность имъ мы будемъ впредь называть *раціональными* числа, которыми мы занимались до сихъ п ръ; они должны подходить, какъ частный случай, подъ вновь расширенное понятіе о числѣ.

Эти новыя числа, какъ и вообще всякаго рода числа, являются продуктомъ свободнаго творчества нашего духа; пользуемся ли мы этимъ расширеннымъ понятіемъ о числѣ или нѣтъ, даемъ ли ему новое названіе или нѣтъ, это исключительно вопросъ точки зрѣнія и цѣлесообразности.

Вопросъ этотъ не имѣетъ значенія при практическихъ вычисленіяхъ, такъ какъ здѣсь приходится, въ концѣ концовъ, оперировать исключительно надъ раціональными числами. Однакожъ указанное расширеніе понятія о числѣ необходимо для внутренней гармоніи ученія о числѣ; безъ этой эволюціи формулировка и изложеніе многихъ теоремъ, особенно въ высшемъ анализѣ, представляла бы огромныя трудности и требовала бы чрезвычайной пространности.

Мы имѣемъ, конечно, право давать особое названіе каждому строго опредѣленному родовому понятію. Но при этомъ безусловно необходимо установить содержаніе понятія съ такой опредѣленностью, чтобы во всѣхъ случаяхъ можно было безъ всякаго сомнѣнія рѣшить, что подходитъ и что не подходитъ подъ это понятіе; лишь такія безукоризненно опредѣленныя понятія могутъ составлять тотъ матеріалъ, надъ которымъ оперируетъ математика.

Понятіе объ *ирраціональномъ* числѣ, какъ и вообще понятіе о числѣ, есть *родовое понятіе*. Можно установить безконечное число системъ такъ, чтобы между индивидумами любыхъ двухъ такихъ системъ могло *существовать однозначное соотвѣтствіе*, и всѣ такія системы одинаково хорошо могли бы служить той цѣли, ради которой вводятся ирраціональныя числа [1]). Напримѣръ, мы можемъ исходить отъ безконечныхъ *десятичныхъ дробей*, или отъ безконечныхъ *непрерыв-*

[1]) Эта мысль требуетъ, повидимому, поясненія. Изложеніе ариѳметики начато введеніемъ комплекса логическихъ объектовъ (понятій), которые названы натуральными числами. Этотъ комплексъ затѣмъ расширенъ введеніемъ новыхъ элементовъ -дробныхъ и отрицательныхъ чиселъ. Теперь необходимо произвести дальнѣйшее расширеніе этого комплекса. Та цѣль, которая имѣется при этомъ въ виду можетъ быть достигнута различными путями. Иначе говоря, можно различнымъ образомъ построить комплексы такъ, что въ составъ каждого изъ нихъ войдутъ всѣ раціональныя числа и каждый изъ нихъ можетъ удовлетворить поставленной цѣли; но всѣ эти комплексы будутъ имѣть одинаковую мощность. Указанные въ текстѣ примѣры не могутъ получить здѣсь значительнаго развитія, такъ какъ это потребовало бы пространныхъ разсужденій.

ныхъ дробей; той же цѣли служатъ и „числовые ряды“ Г. Кантора (G. Cantor) и „характеристики“ Христофеля (Christoffell). При выборѣ точки исхода мы будемъ руководствоваться лишь большей простотой и удобопонятностью: въ этомъ отношеніи предпочтенія заслуживаетъ предложенное Дедекиндомъ (Dedekind) понятіе сѣченія.

Совокупность всѣхъ элементовъ каждой изъ системъ одинаковой мощности, о введеніи которыхъ мы говорили выше, образуетъ родовое понятіе, которое мы называемъ ирраціональнымъ числомъ. Совершенно безразлично, какимъ представителемъ этого понятія мы будемъ пользоваться для его изученія. Такого рода представителей этого понятія мы будемъ иногда также называть ирраціональными числами (напр. безконечную десятичную дробь).

3. Легче всего и проще всего было бы воспользоваться пространственными представленіями и разсматривать числа, какъ отрѣзки прямой[2]). Исходнымъ пунктомъ тогда послужила бы аксіома примѣрно такого содержанія:

Если совокупность точекъ прямой (расположенной, скажемъ, горизонтально передъ нашими глазами) подраздѣляется на двѣ группы A и A' такого рода, что каждая точка группы A лежитъ влѣво отъ каждой точки группы A', то самая прямая дѣлится нѣкоторой опредѣленной точкой α на двѣ части, изъ которыхъ одна заключаетъ въ себѣ всѣ точки группы A, а другая всѣ точки группы A'.

Существованіе такой точки α составляетъ аксіому, которая никоимъ образомъ не можетъ быть доказана чисто логическимъ путемъ: источникъ ея коренится въ природѣ нашихъ пространственныхъ представленій. Строго говоря, нельзя доказать даже существованіе такихъ точекъ, которыя геометрически вполнѣ возможно строить, напримѣръ, средины какого-либо отрѣзка.

Поэтому при всей наглядности указанной аксіомы мы не можемъ положить ее въ основу чисто ариѳметическаго построенія понятія о числѣ. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ ею, однако, пользоваться, но не для доказательства положеній, а лишь въ качествѣ иллюстраціи, въ качествѣ такъ сказать, символическаго языка, для фиксированія мыслей и для большей доступности изложенія.

4. Сѣченіемъ въ области раціональныхъ чиселъ назовемъ подраздѣленіе совокупности раціональныхъ чиселъ (положительныхъ и отрицательныхъ) на двѣ группы такого рода, что каждое число группы A меньше каждаго числа группы A'.

---

[2]) Т. е. остановиться на этомъ именно комплексѣ представителей понятія о числѣ.

Такое сѣченіе мы символически будемъ изображать знакомъ A/A' или, короче, греческой буквой α; любое раціональное число группы A мы будемъ обозначать буквой a, а число группы A'—буквой a'. Такимъ же образомъ мы будемъ пользоваться другими буквами трехъ алфавитовъ.

Эти обозначенія наглядно представлены на приложенной здѣсь фигурѣ, изображающей числовую прямую.

Фиг. 2.

Каждое раціональное число r образуетъ одно или, точнѣе говоря, два сѣченія R/R'.

Дѣйствительно, всѣ числа, меньшія числа r, мы отнесемъ къ группѣ R, числа, бóльшія его—къ группѣ R'; самое же число r мы, по желанію, можемъ отнести либо къ группѣ R, либо къ группѣ R'; сообразно этому, число r образуетъ два сѣченія: въ одномъ изъ нихъ число r есть наибольшее изъ чиселъ группы R, въ другомъ наименьшее изъ чиселъ группы R'. Произведенныя такимъ образомъ сѣченія мы называемъ раціональными сѣченіями[3]).

Есть, однако, и другія сѣченія, которыя не производятся раціональными числами: мы ихъ назовемъ ирраціональными сѣченіями; слѣдующій примѣръ доказываетъ существованіе ирраціональныхъ сѣченій.

Къ группѣ A отнесемъ всѣ тѣ числа, квадратъ которыхъ меньше 2, къ группѣ A' всѣ числа, квадратъ которыхъ больше 2. Тогда группами A и A' исчерпываются всѣ раціональныя числа, такъ какъ такого раціональнаго числа, квадратъ котораго былъ бы равенъ 2, не существуетъ; кромѣ того, любое число a меньше любого a'. Такимъ образомъ группы A и A' образуютъ нѣкоторое сѣченіе, которому, однако, не соотвѣтствуетъ никакое раціональное число, его образующее; т. е. нельзя указать ни наибольшаго числа въ группѣ A, ни наименьшаго числа въ группѣ A'. Дѣйствительно, если, напримѣръ, $a^2<2$, то всегда можно указать такое натуральное число n, чтобы

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2,$$

или иначе

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2.$$

[3]) Подъ раціональнымъ сѣченіемъ авторъ разумѣетъ, слѣдовательно, такое дѣленіе раціональныхъ чиселъ, при которыхъ существуетъ наибольшее число группы R или наименьшее число группы R'; про это именно число онъ говоритъ, что оно производитъ сѣченіе—это формулировано имъ же въ текстѣ. Если, напримѣръ, мы раздѣлимъ всѣ положительныя числа на двѣ группы, относя къ группѣ R всѣ правильныя дроби, а къ группѣ R' всѣ неправильныя дроби, то получимъ раціональное сѣченіе, которое производится числомъ 1, наименьшимъ числомъ группы R'.

Это значитъ, существуетъ число $a+\frac{1}{n}$, квадратъ котораго меньше 2, хотя само оно больше числа a [4]).

Такимъ же способомъ можно доказать, что въ группѣ A' не существуетъ наименьшаго числа.

5. Итакъ группамъ A и A' соотвѣтствуетъ раціональное сѣченіе A/A', если можно указать наибольшее число a въ первой группѣ или наименьшее число a' во второй; если же ни того ни другого не существуетъ, то группамъ соотвѣтствуетъ ирраціональное сѣченіе A/A'.

Поэтому, если A/A' означаетъ ирраціональное сѣченіе, то для любого числа a можно указать другія, бо́льшія его, числа a той же группы A, а для любого числа a' группы A' можно указать меньшія его числа a' той же группы.

Въ каждомъ сѣченіи A/A' существуетъ сколько угодно паръ чиселъ a и a' разность которыхъ $a-a'$ меньше любого заданнаго числа d.

Для доказательства выберемъ такое натуральное число n, чтобы $\frac{1}{n} < d$. Выберемъ два такихъ цѣлыхъ положительныхъ или отрицательныхъ числа k и k', чтобы число k/n было меньше нѣкотораго числа a (т. е. изъ группы A), а число k'/n было больше нѣкотораго числа a'; подобрать такія числа k и k' всегда возможно. Тогда число k/n должно быть отнесено къ группѣ A, а число k'/n—къ группѣ A'.

Перебираемъ по порядку числа слѣдующаго ряда:

$$\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n},\ \frac{k+2}{n},\ \ldots\ \frac{k'}{n}.$$

Крайній лѣвый членъ принадлежитъ группѣ A, крайній правый—группѣ A'; гдѣ-нибудь между $\frac{k}{n}$ и $\frac{k'}{n}$ мы найдемъ такой членъ—пусть это будетъ число m/n—который самъ еще принадлежитъ группѣ A, между тѣмъ, какъ непосредственно слѣдующій относится уже къ группѣ A'. Тогда имѣемъ

$$\frac{m}{n} = a,\quad \frac{m+1}{n} = a'$$

и

$$a'-a = 1/n < d.$$

Въ ирраціональномъ сѣченіи между такими двумя числами a и a' можно указать сколько угодно другихъ чиселъ обѣихъ группъ [5]). Въ раціональ-

[4]). Иначе говоря, каково бы ни было число a первой группы (A), всегда существуетъ большее число $a+\frac{1}{n}$, также принадлежащее первой группѣ.

[5]) Такъ какъ ни въ группѣ A нѣтъ наибольшаго числа, ни въ группѣ A' нѣтъ наименьшаго числа, то мы можемъ уменьшать число a и увеличивать число a'.

номъ сѣченіи между нашими двумя числами a и a' также существуетъ сколько угодно другихъ чиселъ, удовлетворяющихъ тому же требованію; но если одно изъ этихъ чиселъ a или a' есть крайнее число соотвѣтствующей группы, то варіировать можно только второе число.

Обоимъ сѣченіямъ, производимымъ раціональнымъ числомъ r, мы будемъ относить это число r, какъ соотвѣтствующее этимъ сѣченіямъ; обоимъ этимъ сѣченіямъ мы, такъ сказать, приписываемъ одно и то же численное значеніе r.

Каждому же ирраціональному сѣченію, мы отнесемъ нѣкоторый индивидуумъ новой категоріи чиселъ, ирраціональное число, которое мы будемъ обозначать символомъ α.

Въ нижеслѣдующемъ изложеніи латинскія буквы означаютъ раціональныя, греческія —ирраціональныя числа.

6. Теперь нужно расположить ирраціональныя числа по величинѣ и при томъ такъ, чтобы каждое раціональное число нашло себѣ опредѣленное мѣсто въ этомъ распредѣленіи; расположеніе раціональныхъ чиселъ по величинѣ должно при этомъ находиться въ согласіи съ тѣмъ расположеніемъ ихъ, которое было установлено выше (§17,3).

Разсмотримъ два различныхъ сѣченія A/A' и B/B'. Положимъ, что въ группѣ A' можно указать одно и только одно число a'_1, равное нѣкоторому числу b_1 группы B; въ такомъ случаѣ a'_1 есть наименьшее число въ группѣ A', а число b_1 есть наибольшее въ группѣ B[7]). Стало быть наши сѣченія A/A' и B/B' таковы, что въ группѣ A' есть наименьшее число a_1' а въ группѣ B' наибольшее число b_1, т. е. наши сѣченія раціональны, и при томъ имѣютъ одно и то же численное значеніе ($\alpha = \beta$). Имѣя это въ виду, устанавливаемъ слѣдующее опредѣленіе:

Мы принимаемъ, что число α меньше числа β,

$$\alpha < \beta,$$

если можно указать по крайней мѣрѣ два числа a' группы A', которыя были бы въ то же время числами b изъ группы B.

Въ этомъ случаѣ есть безчисленное множество чиселъ a' и чиселъ b, удовлетворяющихъ равенству $a' = b$, ибо таковы всѣ числа, заключенныя между тѣми двумя, которыя предусмотрѣны опредѣленіемъ. Наглядно это усматривается изъ фигуры 3. Ею же можно пользоваться для доказательства слѣдующаго предложенія:

Если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

---

[7]) Дѣйствительно, по условію, всякое другое число группы A' равно числу b' группы B', а потому оно больше, нежели a'_1 (ибо $b' > b_1$). Такимъ же образомъ всякое другое число группы B равно нѣкоторому числу группы A, а потому меньше, нежели a'_1.

Если мы припишемъ раціональнымъ сѣченіямъ числовыя значенія, равныя производящимъ ихъ раціональнымъ числамъ, то данныя здѣсь опредѣленія равенства и неравенства совпадаютъ съ обычными: изъ двухъ раціональныхъ чиселъ первое меньше второго, если можно указать третье раціональное число, которое больше перваго и меньше второго [8]).

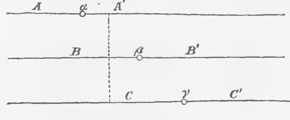


Fig. 3.

Если дано сѣченіе A/A', то каждое число $-a'$ меньше любого числа $-a$; обозначивъ совокупность чиселъ $-a$ и $-a'$ соотвѣтственно черезъ $-A$ и $-A'$, получимъ новое сѣченіе $-A'/-A$. Соотвѣтствующее число обозначается символомъ $-\alpha$ и называется ирраціональнымъ числомъ, противоположнымъ числу α.

7. Казалось бы, что, пользуясь принципомъ сѣченій, можно получить еще новаго рода числа: примѣрно, мы могли бы отнести къ одной группѣ **A** совокупность раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, меньшихъ числа α, а къ группѣ **A′** совокупность раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, не меньшихъ числа α. Покажемъ, что, поступая такимъ образомъ, мы не расширяемъ понятія о числѣ, и что получаемыя указаннымъ образомъ сѣченія **A**/**A′** въ области ирраціональныхъ чиселъ имѣютъ такія же численныя значенія, какъ сѣченія въ области раціональныхъ чиселъ, такъ что новыя сѣченія не обогащаютъ имѣющагося уже запаса чиселъ.

Дѣйствительно, пусть **A**/**A′** означаетъ сѣченіе въ области ирраціональныхъ чиселъ, такъ что каждое число α группы **A** меньше любого числа α' группы **A′**. Чтобы показать, что такого рода сѣченіе не вызываетъ потребности въ новаго рода числахъ, т. е. что оно производится какимъ-нибудь уже извѣстнымъ намъ числомъ, мы докажемъ, что либо въ группѣ **A** есть наибольшее число σ, либо въ группѣ **A′** есть наименьшее число σ, такъ что ирраціональное число σ и есть то, которымъ производится сѣченіе **A**/**A′**.

Всякое раціональное число r, будучи частнымъ случаемъ ирраціональнаго числа, заключается либо въ группѣ **A**, либо же въ группѣ **A′**;

[8]) Здѣсь умѣстно замѣтить, что ирраціональное число α больше любого числа a группы A соотвѣтствующаго сѣченія A/A' и меньше любого числа a' группы A'.

обозначая раціональныя числа группы A черезъ a, группы A' черезъ a', получимъ сѣченіе A/A' въ области раціональныхъ чиселъ, каковое опредѣляетъ собою нѣкоторое ирраціональное число σ; какъ и всякое ирраціональное число оно непремѣнно заключается либо въ группѣ A, либо въ группѣ A'. Въ первомъ случаѣ число σ должно быть наибольшимъ среди чиселъ группы A; въ самомъ дѣлѣ, если бы нѣкоторое число α этой группы было больше числа σ, то послѣднее было бы также меньше всякаго раціональнаго числа, заключеннаго между σ и α, и содержащагося поэтому еще въ группѣ A, а слѣдовательно, и въ группѣ A; но число σ не можетъ быть меньше ни одного изъ чиселъ группы A. Такимъ образомъ, если только число σ входитъ въ группу A, оно должно быть здѣсь наибольшимъ. Такъ же можно доказать, что если число σ принадлежитъ группѣ A', то оно должно быть въ ней наименьшимъ. Итакъ, мы заключаемъ, что въ сѣченіи A/A' либо существуетъ наибольшее число въ группѣ A, либо наименьшее число въ группѣ A'.

§ 23. Верхняя и нижняя граница.

1. Означимъ черезъ T нѣкоторый числовой комплексъ, элементы котораго суть раціональныя или ирраціональныя числа $\tau, \tau' \ldots$; если всѣ эти числа меньше нѣкотораго числа t, то существуетъ одно и только одно число γ, имѣющее слѣдующія два свойства:

a) Каждое число комплекса T меньше числа γ или, по крайней мѣрѣ, не превышаетъ γ.

b) Напротивъ, всякому числу ε, которое меньше числа γ, отвѣчаетъ, по крайней мѣрѣ, одно такое число τ комплекса T, которое заключается между числами ε и γ, такъ что число τ удовлетворяетъ условію:

$$\varepsilon < \tau \leq \gamma. \tag{1}$$

Число γ, существованіе котораго мы сейчасъ докажемъ, называется **верхней границей числового комплекса** T.

Короче его можно опредѣлить такъ:

Верхней границей комплекса называется такое число, котораго не превышаетъ ни одно число τ этого комплекса, но сколь угодно близко къ которому имѣются числа комплекса.

Прежде всего легко усмотрѣть, что можетъ быть **только одно** такое число γ. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что такихъ чиселъ было бы два, напримѣръ γ и γ', при чемъ $\gamma < \gamma'$; въ виду того, что число γ' есть верхняя граница, а число γ меньше, нежели γ', мы могли бы, согласно пункту b), указать число τ, удовлетворяющее условію $\gamma < \tau \leq \gamma'$, такъ что число γ, будучи меньше нѣкотораго числа τ нашего комплекса, не могло бы

служить верхней его границей. Итакъ, верхняя граница, если таковая существуетъ, можетъ быть только одна.

Чтобы доказать ея существованіе, замѣтимъ, что относительно каждаго числа r мы должны сказать одно изъ двухъ: либо въ нашемъ комплексѣ есть число τ, превышающее r —такія числа r будемъ обозначать буквой c; либо же ни одно число τ нашего комплекса не превышаетъ числа r; такія числа r обозначимъ буквой c'. Легко видѣть, что имѣются какъ числа c, такъ и числа c': къ числамъ c' относятся всѣ тѣ раціональныя числа r, которыя превышаютъ число t; къ числамъ c относятся всѣ тѣ раціональныя числа r, которыя меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа τ нашего комплекса T. Любое число c меньше любого числа c', такъ что числа c, c' образуютъ сѣченіе C/C' и опредѣляютъ нѣкоторое число γ, которое, какъ легко усмотрѣть, удовлетворяетъ условіямъ a) и b).

Дѣйствительно, если бы нашлось хоть одно число τ комплекса T, превышающее γ, то существовало бы раціональное число r такого рода, что $\gamma < r < \tau$, и это число r съ одной стороны, будучи меньше τ, должно быть отнесено къ числамъ c; съ другой стороны, превышая γ, оно должно быть отнесено къ числамъ c' [9]); мы заключаемъ изъ этого противорѣчія, что ни одно число τ нашего комплекса не превышаетъ числа γ. Если же $\varepsilon < \gamma$, то между числами ε и γ заключено нѣкоторое число c; слѣдовательно, согласно опредѣленію чиселъ c, существуетъ нѣкоторое число τ, удовлетворяющее условію $\varepsilon < c < \tau \leqslant \gamma$, такъ что число γ обладаетъ также и свойствомъ b).

2. Аналогично доказывается слѣдующее предложеніе:

Если всѣ числа комплекса T превышаютъ нѣкоторое число t', то существуетъ одно и только одно число γ', имѣющее слѣдующія два свойства:

a′) Число γ' не превышаетъ ни одного числа нашего комплекса T.

b′) Если же нѣкоторое число ε' больше числа γ', то въ комплексѣ T можно указать по крайней мѣрѣ одно число τ', которое заключено между числами γ' и ε', такъ что τ' удовлетворяетъ неравенству:

$$\gamma' \leqslant \tau' < \varepsilon' .$$

Это число γ' называется нижней границей числового комплекса T. Существованіе ея доказывается тѣмъ же путемъ, что и существованіе верхней границы, или же проще такъ: числовой комплексъ $-T$, состоящій изъ чиселъ $-\tau, -\tau', \ldots$ имѣетъ, по доказанному, верхнюю границу; перемѣнивъ знакъ ея, получимъ нижнюю границу комплекса T. Нѣкоторые комплексы имѣютъ только верхнюю границу, другіе—только нижнюю. Такъ напримѣръ, комплексъ положительныхъ чиселъ имѣетъ своей нижней границей нуль, а верхней границы не имѣетъ. Наоборотъ, со-

[9]) См. примѣчаніе 8).

вокупность отрицательныхъ чиселъ нижней границы не имѣетъ, а верхней границей ея служитъ нуль. Совокупность правильныхъ положительныхъ дробей имѣетъ и нижнюю границу—нуль, и верхнюю границу—единицу.

Верхняя или нижняя граница можетъ входить въ составъ комплекса, какъ элементъ его, но можетъ и не входить въ него. Въ первомъ случаѣ нижняя граница называется минимумомъ комплекса, а верхняя граница—максимумомъ его [10]).

Если сѣченіе $A|A'$ опредѣляетъ собою число α, то это послѣднее одновременно является верхней границей всѣхъ чиселъ a и нижней границей всѣхъ чиселъ a'.

§ 24. Дѣйствія надъ ирраціональными числами.

1. Теперь займемся опредѣленіемъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій въ области ирраціональныхъ чиселъ. Для этого достаточно остановиться подробно на одномъ какомъ-либо дѣйствіи, напр. сложеніи: прочія тогда уже не представятъ намъ ничего существенно новаго. Пусть α и β обозначаютъ числа, опредѣляемыя соотвѣтственно сѣченіями $A|A'$ и $B|B'$; въ виду того, что всѣ числа a и b не превышаютъ соотвѣтственно чиселъ α и β, а эти послѣднія не превышаютъ чиселъ a' и b', то комплексъ суммъ $a+b$ имѣетъ нѣкоторую верхнюю границу γ, а комплексъ суммъ $a'+b'$ имѣетъ нижнюю границу γ'. Обѣ эти границы γ и γ' не могутъ быть отличны другъ отъ друга.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы $\gamma'<\gamma$, мы вынуждены были бы заключить, что нѣкоторая сумма $a'+b'$ меньше нѣкоторой суммы $a+b$: стоитъ лишь выбрать первую достаточно близко къ γ', а вторую достаточно близко къ γ; но неравенство $a'+b'<a+b$ невозможно, такъ какъ всегда $a'>a$ и $b'>b$; такъ что невозможно, чтобы $\gamma'<\gamma$.

Если же мы примемъ, что $\gamma<\gamma'$, то мы могли бы подобрать два раціональныхъ числа c и c', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$\gamma<c<c'<\gamma'.$$

Всѣ суммы $a'+b'$ были бы больше числа c', а всѣ суммы $a+b$ были бы меньше числа c, т. е.

$$c'<a'+b' \quad \text{для всѣхъ значеній } a' \text{ и } b'$$
$$c>a+b \quad \text{для всѣхъ значеній } a \text{ и } b.$$

[10]). Если, напримѣръ, комплексъ T состоитъ изъ всѣхъ чиселъ вида $\frac{k-1}{k}$, гдѣ k есть цѣлое положительное число, то его нижней границей служитъ 0, а верхней 1; но ни то ни другое число комплексу не принадлежитъ. Если, однако, мы присоединимъ число 0 къ нашему комплексу, то нижняя граница войдетъ въ его составъ и будетъ служить его минимумомъ. Если мы присоединимъ къ комплексу и 1, то и верхняя граница войдетъ въ составъ комплекса и будетъ служить его максимумомъ.

Слѣдовательно, мы получили бы, что для всѣхъ чиселъ a, b, a', b' имѣетъ мѣсто неравенство

$$c' - c < (a' - a) + (b' - b).$$

Это заключеніе противорѣчитъ доказанному раньше предложенію, что положительныя разности $a' - a$ и $b' - b$ можно сдѣлать сколь угодно малыми, если подобрать соотвѣтствующимъ образомъ числа a и a', b и b'. (§ 22,5).

Итакъ, числа γ и γ' не могутъ быть отличны другъ отъ друга имѣя это въ виду, мы устанавливаемъ слѣдующее опредѣленіе:

Суммой $\alpha + \beta$ чиселъ α и β мы называемъ верхнюю границу всѣхъ суммъ $a + b$ и равную ей нижнюю границу всѣхъ суммъ $a' + b'$.

2. Раньше, чѣмъ дать опредѣленіе разности ирраціональныхъ чиселъ, замѣтимъ, что разности $a - b'$ и $a' - b$ имѣютъ соотвѣтственно верхнюю и нижнюю границу. Повторяя буквально разсужденія предыдущаго параграфа, мы докажемъ, что обѣ границы не могутъ быть отличны другъ отъ друга. Сообразно этому

разностью $\alpha - \beta$ чиселъ α и β мы называемъ верхнюю границу чиселъ $a - b'$ и равную ей нижнюю границу чиселъ $a' - b$.

3. Дадимъ теперь опредѣленіе умноженія и дѣленія, имѣя въ виду сперва лишь положительныя числа α и β; числа a и числа b мы точно также пока беремъ исключительно положительныя. Тогда легко по предыдущему найти, что произведенія ab и частныя a/b' имѣютъ верхнюю границу, а произведенія $a'b'$ и a'/b имѣютъ нижнюю границу, при чемъ обѣ границы совпадаютъ.

Произведеніемъ $\alpha\beta$ положительныхъ чиселъ α и β называется общая граница (соотвѣтственно верхняя или нижняя) чиселъ ab и $a'b'$. Частнымъ α/β положительныхъ чиселъ α и β называется верхняя граница частныхъ a/b' и равная ей нижняя граница чиселъ a'/b.

Чтобы распространить умноженіе и дѣленіе и на отрицательныя ирраціональныя числа, мы оставимъ для нихъ въ силѣ тѣ условія, которыя мы приняли относительно умноженія раціональныхъ чиселъ (§ 13): именно:

$$(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -\alpha\beta, \quad -\alpha(-\beta) = \alpha\beta$$
$$\frac{-\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}; \quad \frac{-\alpha}{-\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Если одинъ изъ множителей произведенія $\alpha\beta$ или дѣлимое частнаго α/β есть нуль, то соотвѣтствующее произведеніе или частное мы считаемъ равнымъ нулю. По прежнему, дѣлитель β частнаго α/β не долженъ

быть нулемъ (случай, когда дѣлитель равенъ нулю, исключается изъ разсмотрѣнія).

4. Практическая цѣнность данныхъ нами опредѣленій основныхъ четырехъ дѣйствій обнаруживается при разсмотрѣніи вытекающей изъ этихъ опредѣленій важной теоремы,—назовемъ ее **теоремой о непрерывности**. Эта теорема имѣетъ слѣдующее содержаніе.

Возьмемъ два произвольныхъ числа α и β причемъ разъ навсегда замѣтимъ, что случай, когда дѣлитель β частнаго α/β есть нуль, исключается; черезъ $f(\alpha,\beta)=\rho$ обозначимъ результатъ какого-либо изъ четырехъ основныхъ дѣйствій, которому мы желаемъ совершить надъ числами α, β; далѣе, черезъ $f(a,b)=r$ обозначимъ результатъ тѣхъ же дѣйствій, если выполнить ихъ надъ раціональными числами a, b.

Возмемъ теперь два произвольныхъ раціональныхъ или ирраціональныхъ числа g и g', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$g<\rho<g'. \tag{1}$$

Утверждаемъ, что числа a_1, a_1', b_1 и b_1', удовлетворяющія неравенствамъ

$$a_1<\alpha<a_1',\quad b_1<\beta<b_1' \tag{2}$$

можно подобрать такимъ образомъ, чтобы при всякой парѣ раціональныхъ чиселъ a, b, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$a_1<a<a_1',\quad b_1<b<b_1', \tag{3}$$

выполнялось неравенство

$$g<r<g'. \tag{4}$$

Смыслъ всѣхъ этихъ неравенствъ словами можно передать такъ:

Къ результату $f(\alpha,\beta)$ нѣкотораго дѣйствія надъ ирраціональными числами можно подойти **сколь угодно** близко, составляя результатъ $f(a, b)$ того же дѣйствія надъ раціональными числами: стоитъ лишь подобрать числа a и b такъ, чтобы они **достаточно** мало отличались отъ чиселъ α и β.

Такія числа a и b называются **приближенными значеніями** чиселъ α и β.

Доказательство приведенной теоремы вытекаетъ непосредственно изъ данныхъ нами опредѣленій дѣйствій надъ ирраціональными числами; мы ограничимся доказательствомъ теоремы для того случая, когда разсматриваемое дѣйствіе есть сложеніе, т. е. $\rho=\alpha+\beta$. Такъ какъ число ρ есть верхняя граница суммъ $a+b$ и нижняя граница суммъ $a'+b'$, то для всякой пары чиселъ c и c' сѣченія C/C', соотвѣтствующаго числу ρ, мы можемъ подобрать сумму a_1+b_1 и сумму $a'_1+b'_1$ такъ, чтобы численныя значенія этихъ суммъ заключались соотвѣтственно между числами c и ρ, и числами ρ и c'; имѣемъ, слѣдовательно,

$$c<a_1+b_1<a_1'+b_1'<c'. \tag{5}$$

Если теперь выбрать такую пару чиселъ a и b, чтобы удовлетворялись

неравенства (3), то получимъ:

$$a_1 + b_1 < a + b < a_1' + b_1'; \tag{6}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$c < a + b < c',$$

что и требовалось доказать ([11]).

5. Изложенную теорему можно обобщить:

Основная теорема о непрерывности. Обозначимъ черезъ ρ результатъ нѣкотораго вычисленія $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, состоящаго въ произвольной комбинаціи основныхъ четырехъ дѣйствій и выполненнаго надъ числами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; выберемъ далѣе любую пару чиселъ g и g', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$g < \rho < g'. \tag{7}$$

Утверждаемъ, что можно подобрать числа $a_1, a_1', b_1, b_1', c_1, c_1' \ldots$, удовлетворяющія неравенствамъ

$$a_1 < \alpha < a_1',\ b_1 < \beta < b_1',\ c_1 < \gamma < c_1', \ldots \tag{8}$$

такимъ образомъ, чтобы число $r = F(a, b, c, \ldots)$ удовлетворяло соотношенію

$$g < r < g', \tag{9}$$

коль скоро

$$a_1 < a < a_1',\quad b_1 < b < b_1',\quad c_1 < c < c_1', \ldots \tag{10}$$

Мы докажемъ эту теорему по способу математической индукціи, исходя изъ того частнаго случая, который мы изложили въ пунктѣ 4.

Итакъ, допустимъ, что теорема наша доказана для нѣкоторой системы чиселъ

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tag{11}$$

и для нѣкотораго дѣйствія

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \rho, \tag{12}$$

а также для другой системы чиселъ

$$\mu, \nu, \ldots \tag{13}$$

и для дѣйствія

$$\varphi(\mu, \nu, \ldots) = \sigma; \tag{14}$$

нужно доказать, что теорема справедлива и для дѣйствія

$$F(\rho, \sigma) = \tau, \tag{15}$$

выполненнаго надъ числами ρ и σ.

Выбираемъ произвольно два числа h и h' такъ, чтобы

$$g < \tau < g. \tag{16}$$

---

[11]) Ясно, что числа c и c' замѣняютъ здѣсь числа g и g' неравенства (1).

Согласно пункту 4, можно подобрать для чиселъ ρ и σ значенія k, l, k', l', которыя удовлетворяютъ неравенствамъ

$$k < \rho < k', \quad l < \sigma < l', \tag{17}$$

при чемъ результатъ $F(r, s)$ заключается между тѣми же предѣлами g и g', что и число τ, если только выбрать приближенныя значенія r и s чиселъ ρ и σ въ предѣлахъ, указанныхъ въ формулѣ (17), т. е. если

$$k < r < k', \; l < s < l'. \tag{18}$$

Послѣднее же условіе можетъ быть выполнено. Дѣйствительно, согласно нашему предположенію, теорема доказана для чиселъ ρ и σ; это значитъ, выбравъ достаточно тѣсные предѣлы для раціональныхъ приближенныхъ значеній $a, b, c, \ldots, m, n, \ldots$ чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu, \ldots$ мы получимъ въ результатѣ дѣйствій

$$f(a, b, c, \ldots) = r \text{ и } \varphi(m, n, \ldots) = s$$

числа r и s въ предѣлахъ, указанныхъ въ формулѣ (18). Такимъ образомъ теорема доказана въ общемъ видѣ [12]).

6. Теоремѣ о непрерывности можно дать нѣсколько иную формулировку, которая необходима во многихъ случаяхъ, при чемъ доказательство остается прежнее:

Если по прежнему число $\rho = f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ есть результатъ нѣкоторыхъ вычисленій, произведенныхъ надъ числами α, β, $\gamma, \ldots$, и если $g < \rho$, то можно замѣнить числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ихъ раціональными приближенными значеніями $a, b, c, \ldots$ такимъ образомъ, чтобы $r = f(a, b, c, \ldots)$, и $g < r < \rho$.

Теорема эта съ соотвѣтственными измѣненіями остается въ силѣ и въ томъ случаѣ, если принять $\rho < g'$ [13]).

7. Изложенная нами теорема имѣетъ двоякое значеніе. Съ одной стороны, она даетъ намъ увѣренность, что въ практическихъ вычисленіяхъ,

[12]) Индуктивный пріемъ доказательства здѣсь примѣняется, очевидно, къ числу дѣйствій, которыя нужно произвести надъ данными числами. Если этихъ дѣйствій имѣется, напримѣръ, три, то третье дѣйствіе можно разсматривать какъ операцію $F(\rho, \sigma)$, производимую надъ результатомъ ρ первыхъ двухъ дѣйствій и новымъ числомъ σ.

[13]) Мы привели послѣднее предложеніе цѣликомъ въ томъ видѣ, какъ оно формулировано авторомъ, но должны указать на то, что оно не всегда справедливо; такъ, напримѣръ, если положимъ

$$f(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta)^2,$$

то, при $\alpha = \beta$, $\rho = 0$; въ этомъ случаѣ, очевидно, нельзя замѣнить α и β такими приближенными значеніями, чтобы получить результатъ меньшій, нежели ρ. Это любопытный примѣръ того, какъ легко впасть въ ошибку, если опускать доказательства.

которыя по существу дѣла приходится выполнять лишь надъ приближенными значеніями, мы можемъ достичь какой угодно степени точности. Съ другой стороны, изъ нашей теоремы вытекаетъ теоретически важное слѣдствіе: равенство или неравенство, которое справедливо для всѣхъ раціональныхъ значеній входящихъ въ него буквъ, остается въ силѣ и для ирраціональныхъ значеній ихъ.

Дѣйствительно, любое равенство, связывающее раціональныя числа, можетъ быть представлено въ формѣ

$$f(a,\ b,\ c, \ldots) = 0, \tag{19}$$

гдѣ знакъ f обозначаетъ нѣкоторое сочетаніе основныхъ четырехъ дѣйствій. Если это равенство справедливо при всѣхъ значеніяхъ раціональныхъ чиселъ a, b, c, ... то оно остается въ силѣ и для ирраціональныхъ значеній α, β, γ, ... , т. е. имѣетъ мѣсто равенство

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots) = 0. \tag{20}$$

Дѣйствительно, если бы результатъ $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots)$ былъ отличенъ отъ нуля, напр., если бы $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots) > 0$ то можно было бы указать два такихъ положительныхъ числа g и g', чтобы

$$g < f(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots) < g'; \tag{21}$$

согласно теоремѣ о непрерывности, этимъ же неравенствамъ должны удовлетворять и нѣкоторыя приближенныя раціональныя значенія a, b, c, ... чиселъ α, β, γ, ... , т. е. число $f(a,\ b,\ c, \ldots)$ оказалось бы положительнымъ, что противорѣчило бы условію (19).

Изложенное предложеніе имѣетъ мѣсто и для неравенствъ, только въ этомъ случаѣ для доказательства приходится пользоваться той формулировкой основной теоремы, которая дана въ пунктѣ 6.

Предположимъ, напримѣръ, что всѣ раціональныя числа a, b, c, ... , удовлетворяющія условію $\varphi(a,\ b,\ c, \ldots) > 0$, выполняютъ и неравенство $f(a,\ b,\ c, \ldots) > 0$; утверждаемъ, что это соотношеніе имѣетъ мѣсто и для ирраціональныхъ чиселъ, т. е., если $\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots) > 0$, то и $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) > 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы неравенство $\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots) > 0$ было совмѣстимо съ неравенствомъ $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots) < 0$, то можно было бы выбрать пару отрицательныхъ чиселъ g и g' и пару положительныхъ чиселъ k и k' такъ, чтобы

$$g < f(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots) < g', \quad k < \varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots) < k'.$$

Тогда мы могли бы подобрать для чиселъ α, β, γ, ... такія приближенныя значенія a, b, c, ... , чтобы число $\varphi(a,\ b,\ c, \ldots) > 0$, а число $f(a,\ b,\ c, \ldots)$ было меньше нуля, что противорѣчило бы заданному условію. Точно также число $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots)$ не можетъ быть равно нулю; для доказательства обратимся къ той формулировкѣ основной теоремы, кото-

рая дана въ пунктѣ 6. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что, если бы число $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ равнялось нулю, то можно было бы подобрать такія приближенныя значенія a, b, c, чтобы результатъ $f(a, b, c, \ldots)$ оказался отрицательнымъ числомъ, тогда какъ число $\varphi(a, b, c, \ldots)$ по прежнему имѣло бы положительное значеніе [14]).

Приведемъ теперь нѣсколько предложеній, составляющихъ частные случаи доказанной нами общей теоремы:

1) Для ирраціональныхъ чиселъ остаются въ силѣ перемѣстительный и сочетательный законы при сложеніи и умноженіи.

2) Вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію:

$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha.$$

3) Дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = \alpha.$$

4) Съ возрастаніемъ слагаемаго возрастаетъ и сумма.

5) Произведеніе положительныхъ сомножителей увеличивается съ возрастаніемъ любого изъ сомножителей, и, конечно, еще больше возрастаетъ, если всѣ множители возрастаютъ.

6) Разность двухъ чиселъ бываетъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, смотря по тому, будетъ ли вычитаемое меньше или больше уменьшаемаго.

7) Степень числа, превосходящаго единицу, возрастаетъ съ увеличеніемъ показателя и при томъ возрастаетъ безпредѣльно.

8) Степень положительной правильной дроби есть число положительное, которое съ возрастаніемъ показателя можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ.

§ 25. Безконечныя десятичныя дроби.

1. Обозначимъ черезъ $\pm I_n$ десятичную дробь съ произвольнымъ числомъ знаковъ до запятой и n знаками справа отъ запятой, такъ что $\pm I_0$, напримѣръ, означаетъ нѣкоторое цѣлое число, которое можетъ быть и нулемъ. Положимъ, что намъ указанъ рядъ дѣйствій, т. е. какой либо

[14]) Это предложеніе также не вполнѣ справедливо, какъ и то, на котрое авторъ ссылается. Справедливо только слѣдующее предложеніе: если для всѣхъ раціональныхъ значеній чиселъ a, b, $c \ldots$, при которыхъ $\varphi(a, b, c \ldots) > 0$, и $f(a, b, c \ldots) > 0$, то при ирраціональныхъ значеніяхъ чиселъ α, β, $\gamma \ldots$, при которыхъ $\varphi(\alpha, \beta, \gamma \ldots) > 0$, имѣетъ мѣсто соотношеніе $f(\alpha, \beta, \gamma \ldots) \geqslant 0$; возможность равенства не исключается. Такъ, напримѣръ, неравенство

$$(a^2 - 2)^2 + (b^2 - 2)^2 > 0.$$

справедливое при всѣхъ раціональныхъ значеніяхъ чиселъ a и b, обращается въ равенство при $a = \pm\sqrt{2}$ и $b = \pm\sqrt{2}$.

алгориѳмъ, при помощи котораго можно отъ десятичной дроби A_n перейти къ одной и только одной дроби A_{n+1}, содержащей тѣ же цифры и въ томъ же порядкѣ, что и дробь A_n, и кромѣ того еще одну прибавочную цифру справа. Предположимъ, что алгориѳмъ этотъ имѣетъ то свойство, что его можно примѣнять послѣдовательно неограниченное число разъ. Съ однимъ такимъ алгориѳмомъ, а именно съ приближеннымъ вычисленіемъ квадратнаго корня изъ неполныхъ квадратовъ, мы уже познакомились въ § 21. Подобный алгориѳмъ, или, точнѣе говоря, опредѣляемый имъ рядъ цифръ съ запятой на опредѣленномъ мѣстѣ мы называемъ безконечной десятичной дробью [15]).

Каждой безконечной десятичной дроби можетъ быть отнесено нѣкоторое число слѣдующимъ образомъ.

Пусть

$$A'_n = A_n + 10^{-n}, \qquad (1)$$

гдѣ $n > 0$, такъ что десятичная дробь A'_n получается изъ дроби A_n, если въ ней увеличить на одну единицу послѣднюю цифру (при этомъ, если эта послѣдняя цифра равна 9, то пишутъ вмѣсто нея нуль, а предпослѣднюю цифру увеличиваютъ на одну единицу). Если къ дроби A_n приписать $(n+1)$-ую цифру, то получимъ дробь A_{n+1}, такъ что

$$A_{n+1} = A_n + z10^{-n-1}, \quad A'_{n+1} = A_n + (z+1)10^{-n-1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$A_n \leq A_{n+1} < A'_{n+1} \leq A'_n. \qquad (2)$$

Такимъ образомъ, всѣ дроби $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$ порознь меньше дроби A'_n, а всѣ дроби $A'_n, A'_{n+1}, A'_{n+2}, \ldots$ больше дроби A_n; слѣдовательно, дроби A_n имѣютъ верхнюю границу, а дроби A'_n— нижнюю границу; обѣ эти границы должны необходимо совпадать, такъ какъ разность $A'_n - A_n = 10^{-n}$ при достаточно большомъ n можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой. Число α, составляющее общую границу этихъ двухъ числовыхъ комплексовъ, называется **численнымъ значеніемъ безконечной десятичной дроби**. Число α заключено между двумя дробями каждой пары A_n и A'_n; эти послѣднія называются верхнимъ и нижнимъ приближенными значеніями числа α; онѣ тѣмъ менѣе отличаются другъ отъ друга и отъ дроби α, чѣмъ больше число n. Такъ какъ

---

[15]) Правило приближеннаго вычисленія квадратнаго корня, даетъ намъ возможность послѣдовательно опредѣлить десятичные знаки корня; такъ что, если A_n есть корень, вычисленный съ приближеніемъ до n-го десятичнаго знака (приближенно меньшее его значеніе), то мы имѣемъ алгориѳмъ, дающій возможность опредѣлить A_{n+1}, т. е дробь, состоящую изъ дроби A_n и еще одного опредѣленнымъ образомъ устанавливаемаго десятичнаго знака.

числа A_n всѣ положительныя, то α также есть число положительное.

2. Подобно тому, какъ каждой безконечной десятичной дроби мы относимъ нѣкоторое положительное число α, точно такъ же для каждаго положительнаго числа α можно подобрать соотвѣтствующую безконечную десятичную дробь. Всѣ раціональныя дроби, имѣющія знаменателемъ число 10^n, расположимъ въ порядкѣ по ихъ величинѣ и наибольшую изъ нихъ, не превосходящую числа α, обозначимъ черезъ A_n, такъ что

$$A_n \leqq \alpha < A'_n. \tag{3}$$

Тогда найдется одна и только одна цифра z, удовлетворяющая неравенствамъ

$$A_{n+1} \leqq \alpha < A'_{n+1}. \tag{4}$$

Такимъ образомъ можно наращать дробь A_n, приписывая къ ней справа каждый разъ одну опредѣленную цифру, при чемъ число α будетъ представлять собою верхнюю границу дробей A_n.

3. Разсмотримъ теперь вопросъ, могутъ ли двѣ различныя безконечныя десятичныя дроби имѣть одну и ту же численную величину.

Допустимъ, что двѣ различныя десятичныя дроби съ нижними приближенными значеніями A_n и B_n имѣютъ одинаковую численную величину α. Дроби A_n и B_n, начиная съ нѣкотораго значенія указателя n, должны отличаться другъ отъ друга одной или нѣсколькими цифрами; пусть a_k и b_k обозначаютъ первыя несходныя между собою цифры дробей A_n и B_n; допустимъ еще, что $a_k < b_k$. Тогда имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} B_k - A_k &= (b_k - a_k)10^{-k}, \\ B_k - A'_k &= (b_k - a_k - 1)10^{-k} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если $n > k$, то, согласно формулѣ (2), $B_n > B_k$ и $A'_n \leqq A'_k$, такъ что

$$B_n - A'_n > (b_k - a_k - 1)10^{-k}. \tag{6}$$

Такъ какъ съ увеличеніемъ числа n лѣвая часть безпредѣльно уменьшается, а число $(b_k - a_k - 1)10^{-k}$ не мѣняется, то неравенство (6) возможно лишь при условіи: $b_k - a_k - 1 = 0$, такъ что

$$b_k = a_k + 1. \tag{7}$$

Отсюда слѣдуетъ, что при любомъ значеніи $n > k$, согласно формулѣ (6), получимъ:

$$B_n = A'_n = A_n + 10^{-n}. \tag{8}$$

Обозначивъ $(n+1)$-ыя цифры черезъ a_{n+1} и b_{n+1}, получимъ:

$$B_n + b_{n+1}10^{-n-1} = A_n + (a_{n+1} + 1)\,10^{-n-1}, \tag{9}$$

или, подставляя сюда значеніе числа B_n изъ формулы (8),

$$10^{-n} + b_{n+1}10^{-n-1} = (a_{n+1} + 1)10^{-n-1},$$

т. е.

$$a_{n+1} = b_{n+1} + 9.$$

Такъ какъ цифра a_{n+1} не можетъ превосходить девяти, то заключаемъ, что $b_{n+1} = 0$, и $a_{n+1} = 9$, если только $n \geqslant k$. Въ этомъ случаѣ обѣ десятичныя дроби A_n и B_n дѣйствительно стремятся къ одному и тому же предѣлу: къ конечной десятичной дроби B_k. Напримѣръ, десятичныя дроби 0,999 . . . , 1,000 . . . имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ одно и то же численное значеніе — единицу.

4. Сообразно этому, теорію ирраціональныхъ чиселъ можно было бы обосновать, исходя изъ понятія о безконечныхъ десятичныхъ дробяхъ. Для этого пришлось бы производить сѣченія не въ области всѣхъ раціональныхъ дробей, но лишь въ области десятичныхъ дробей. Съ одной стороны, это имѣло бы то удобство, что установленіе нонаго понятія примыкало бы непосредственно къ алгориѳму, обычно употребляемому для вычисленія ирраціональныхъ чиселъ, но за то, съ другой стороны, доказательства теоремъ были бы болѣе сложны. При первомъ способѣ изложенія (принятомъ нами) любому раціональному числу соотвѣтствуютъ два различныхъ сѣченія; при второмъ же способѣ этимъ свойствомъ обладаютъ лишь десятичныя дроби.

§ 26. Превращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

1. Обыкновенная дробь обратима въ десятичную лишь въ томъ случаѣ, если по умноженіи на нѣкоторую степень десяти, она даетъ въ произведеніи цѣлое число. Для этого необходимо и достаточно, чтобы, данная дробь въ несократимомъ видѣ m/n, имѣла въ знаменателѣ число n, не содержащее другихъ первоначальныхъ множителей, кромѣ 2 и 5, т. е. чтобы $n = 2^a 5^b$, гдѣ a и b суть цѣлыя числа; если тогда возьмемъ произвольное цѣлое число c, которое не меньше большаго изъ чисель a и b, и помножимъ нашу дробь на 10^c, то получимъ въ произведеніи цѣлое число $\frac{m}{n} . 10^c$.

Если же дробь m/n взята произвольно, то связь ея съ десятичными дробями можетъ быть установлена слѣдующимъ образомъ.

Произведя дѣленіе числа m на число n, мы получимъ частное z и остатокъ m_1, который меньше дѣлителя n, такъ что

$$m = zn + m_1. \qquad (1)$$

Здѣсь z обозначаетъ цѣлое число, положительное или нуль. Остатокъ m_1

также есть положительное число, которое меньше дѣлителя n, и равенъ нулю лишь въ томъ случаѣ, когда число m дѣлится безъ остатка на число n, т. е. когда m/n есть цѣлое число.

Оставляя тотъ же дѣлитель n, дѣлимъ на него число $10m_1$; получимъ:

$$10m_1 = \gamma_1 n + m_2 \quad \text{и} \quad 10m_1 \geqq \gamma_1 n, \tag{2}$$

такъ что $\gamma_1 < 10$. Слѣдовательно, γ_1 означаетъ нѣкоторую цифру (0, 1, 2, . . . 9). Если $m_2 = 0$, то число m/n равно десятичной дроби γ, γ_1. Если же число $m_2 > 0$, то оно меньше дѣлителя n, и мы можемъ продолжать дѣленіе по тому же правилу:

$$\begin{aligned} 10m_2 &= \gamma_2 n + m_3 \\ 10m_3 &= \gamma_3 n + m_4 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 10m_s &= \gamma_s n + m_{s+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Пока остатки $m_1, m_2, \ldots m_s$ отличны отъ нуля, числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_s$ всѣ суть цифры, т. е. не превосходятъ девяти, а число γ можетъ быть и больше девяти. Изъ равенствъ (1), (2) и (3) слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} &= \gamma + \frac{m_1}{n} \\ \frac{m_1}{n} &= \gamma_1 10^{-1} + \frac{m_2}{n} 10^{-1} \\ \frac{m_2}{n} &= \gamma_2 10^{-1} + \frac{m_3}{n} 10^{-1}, \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Отсюда найдемъ:

$$\frac{m}{n} = \quad + \gamma_1 10^{-1} + \gamma_2 10^{-2} + \ldots + \gamma_s 10^{-s} + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s}.$$

или же, представляя правую часть послѣдняго равенства въ видѣ десятичной дроби,

$$\frac{m}{n} = \gamma, \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_s + \frac{m_{s+1}}{n} 10^{-s}. \tag{4}$$

Если послѣдній остатокъ $m_{s+1} = 0$, то дробь m/n можетъ быть представлена въ видѣ десятичной дроби; это имѣетъ мѣсто лишь въ вышеупомянутомъ случаѣ, когда число n имѣетъ форму $2^a\,5^b$ (предполагая, что дробь m/n приведена къ несократимому виду). Въ другихъ случаяхъ вычисленіе, которое, очевидно, представляетъ собою не что иное, какъ

обыкновенное дѣленіе элементарной ариѳметики, можетъ быть продолжено безконечно, такъ что въ формулѣ (4) число s можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ. Въ этомъ случаѣ десятичная дробь

$$\delta_s = \zeta, \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_s \tag{5}$$

всегда меньше обыкновенной дроби

$$\gamma = \frac{m}{n}; \tag{6}$$

такъ какъ $m_{s+1} < n$, то разность $\gamma - \delta_s$ меньше дроби 10^{-s}. Слѣдовательно, разность эта тѣмъ меньше, чѣмъ больше число десятичныхъ знаковъ дроби δ_s; она можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой, если выбрать число s достаточно большимъ. Поэтому обыкновенныя дроби могутъ быть съ любой степенью точности замѣнены десятичными во всѣхъ тѣхъ приложеніяхъ, гдѣ числа вообще извѣстны лишь приблизительно: напримѣръ, въ вычисленіяхъ, гдѣ данныя суть результаты измѣреній. Десятичная дробь δ_s называется **приближеннымъ значеніемъ** обыкновенной дроби γ. Вычисленіе десятичной дроби δ_s по заданной дроби γ называется **обращеніемъ** обыкновенной дроби въ десятичную.

Въ равенствѣ (4) часто опускаютъ остатокъ $m_{s+1} / 10^s n$, вмѣсто него ставятъ многоточіе и этимъ выражаютъ, что дробь безконечна:

$$\frac{m}{n} = \zeta, \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \cdots .$$

Для вычисленія цифръ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ нѣтъ надобности приводить предварительно дробь m/n къ несократимому виду, т. е. въ этомъ отношеніи безразлично, имѣютъ ли числа m и n общаго множителя или нѣтъ.

2. Рядъ цифръ

$$Z = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \cdots$$

называется **мантиссой** дроби m/n (Gauss, Disq. arithmeticae, Art. 312).

Мантисса имѣетъ конечное число цифръ, если дробь m/n можетъ быть точно выражена въ видѣ десятичной дроби; въ противномъ случаѣ число цифръ мантиссы можно увеличивать безпредѣльно. Двѣ мантиссы

$$Z = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \cdots$$

и

$$Z' = \zeta'_1 \zeta'_2 \zeta'_3 \cdots$$

называются **отличными другъ отъ друга**, если онѣ заключаютъ въ себѣ хотя бы по одному десятичному знаку ζ_s и ζ'_s, которые отличны

другъ отъ друга по величинѣ, но занимаютъ въ мантиссахъ одно и то же мѣсто.

Дроби, различающіяся между собою цѣлымъ числомъ, имѣютъ всѣ одну и ту же мантиссу; поэтому, для того, чтобы вычислить мантиссы всѣхъ дробей съ знаменателемъ n, достаточно разсмотрѣть однѣ лишь правильныя дроби m/n.

Докажемъ слѣдующую теорему:

Отличныя другъ отъ друга правильныя дроби γ и γ' имѣютъ различныя мантиссы [16]).

Для доказательства предположимъ, что $\gamma' > \gamma$; найдемъ такое число s, чтобы

$$10^s(\gamma' - \gamma) > 1$$

(найти такое число s, всегда возможно: см. § 18.8) тогда получимъ:

$$\gamma' > \gamma + 10^{-s}. \qquad (7)$$

Положимъ, что

$$\delta_s = 0,\ \gamma_1\ \gamma_2\ \ldots\ \gamma_s,\ \delta'_s = 0,\ \gamma'_1\ \gamma'_2\ \gamma'_3\ \ldots\ \gamma'_s;$$

тогда, какъ намъ уже извѣстно,

$$\gamma > \delta_s,\ \gamma' < \delta'_s + 10^{-s};$$

принимая во вниманіе неравенство (7), найдемъ:

$$\delta'_s + 10^{-s} > \gamma' > \gamma + 10^{-s} > \delta_s + 10^{-s},$$

слѣдовательно, $\delta'_s > \delta_s$. Поэтому мантиссы Z и Z' дробей γ и γ' отличаются другъ отъ друга, по крайней мѣрѣ, въ s-мъ десятичномъ знакѣ (если не въ которомъ-нибудь изъ предыдущихъ).

Дополнимъ доказанную теорему другой, аналогичной:

Нѣтъ такой правильной дроби γ, мантисса которой состояла бы только изъ однѣхъ девятокъ.

Въ самомъ дѣлѣ, при достаточно большомъ s мы найдемъ, что $10_s(1-\gamma) > 1$, слѣдовательно, $1 > \gamma + 10^{-s}$, и a fortiori $1 > \delta_s + 10$ Если же всѣ цыфры $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_s$ были бы девятки, то мы нашли бы, что $\delta_s + 10^{-s} = 1$, что противорѣчило бы предыдущему неравенству. Поэтому, уже s-ый десятичный знакъ (если не который-нибудь изъ предыдущихъ) мантиссы дроби γ представляетъ собой цыфру, меньшую девяти.

[16]) Это есть предложеніе, обратное тому, которое доказано въ § 25, 3.

Каждая обыкновенная дробь производитъ сѣченіе въ совокупности безконечныхъ десятичныхъ дробей; поэтому и обыкновенныя дроби находятъ себѣ мѣсто въ той области чиселъ, которая опредѣляется совокупностью безконечныхъ десятичныхъ дробей.

Впослѣдствіи мы разсмотримъ подробнѣе нѣкоторыя своеобразныя особенности, присущія тѣмъ безконечнымъ десятичнымъ дробямъ, которыя соотвѣтствуютъ раціональнымъ дробямъ.

ГЛАВА V.

Отношенія.

§ 27. Измѣримость.

1. Теперь намъ предстоитъ разсмотрѣть вопросъ, какимъ образомъ числа, которыя, какъ мы уже не разъ указывали, представляютъ собой продуктъ творчества нашего духа, находятъ себѣ примѣненіе во внѣшнемъ мірѣ. Что касается чиселъ натуральнаго ряда, то ими мы пользуемся при счетѣ; это было изложено въ первой главѣ и мы не будемъ здѣсь возвращаться къ этому вопросу. Раціональныя же дроби и числа ирраціональныя находятъ себѣ примѣненіе въ томъ процессѣ, который называется измѣреніемъ.

Измѣримо все то, что производитъ на наши чувства впечатлѣнія различной интенсивности: напряженность (яркость) свѣта, температура, высота звука, сила звука, тяжесть, твердость, боль и т. п. Непосредственное чувственное воспріятіе доставляетъ намъ лишь ту неопредѣленную оцѣнку впечатлѣній, которая выражается словами „больше“ и „меньше“. Точныя измѣренія возможны лишь послѣ того, какъ между даннымъ явленіемъ, съ одной стороны, временемъ и пространствомъ, съ другой, установлена такая связь, что каждому впечатлѣнію, относящемуся къ этому явленію, соотвѣтствуетъ опредѣленное измѣненіе въ пространствѣ или во времени;—связь эта устанавливается помощью измѣрительныхъ приборовъ. Пространственныя величины мы различаемъ троякаго рода: длину, площадь и объемъ; геометрія даетъ намъ способы свести измѣреніе всѣхъ этихъ трехъ величинъ къ измѣренію длинъ.

Возможность измѣрять пространство основывается на предположеніи, что существуетъ тѣло, которое мы можемъ переносить изъ одного мѣста на другое, не измѣняя его состоянія во всѣхъ прочихъ отношеніяхъ. Подобное тѣло, называется масштабомъ. Ясно, что предположеніе

это заключаетъ въ себѣ нѣкоторое допущеніе, какъ о природѣ пространства, такъ и о свойствахъ тѣлъ, его наполняющихъ [1]).

Измѣреніе промежутковъ времени основывается на допущеніи, что можно наблюдать нѣкоторый процессъ, который одинаково протекаетъ во всякое время: таково, напримѣръ, движеніе часовой стрѣлки, если оно всегда происходитъ равномѣрно; самымъ совершеннымъ образцомъ часовъ мы считаемъ вращеніе земли вокругъ ея оси [2]).

Третью группу основныхъ величинъ составляютъ массы, которыя мы измѣряемъ помощью вѣсовъ: это измѣреніе предполагаетъ существованіе правильныхъ вѣсовъ и неизмѣняемость массъ.

Всѣ эти предположенія не совсѣмъ согласуются съ дѣйствительностью: менѣе всего съ ней расходится первое допущеніе, наиболѣе последнее: въ качествѣ идеальныхъ мѣръ приходится разсматривать лишь нѣкоторыя среднія значенія, которыя путемъ долгаго и многократнаго опыта образовались въ нашемъ представленіи, какъ результатъ взаимной компенсаціи отступленій въ ту и въ другую сторону отъ истинныхъ мѣръ.

2. Въ области чистыхъ чиселъ произвольно созданныя нами понятія „больше" и „меньше" имѣютъ отвлеченный характеръ и лишены наглядности; наоборотъ, въ области измѣряемыхъ предметовъ внѣшняго міра „большее" и „меньшее" являются уже наглядными представленіями, находящимися въ связи съ той или другой степенью или силой чувственныхъ впечатлѣній. Даже съ такими выраженіями, какъ „очень большое", „очень малое", „приблизительно" мы связываемъ нѣкоторыя представленія, хотя и не совсѣмъ опредѣленныя, напримѣръ: мы называемъ очень малыми тѣ величины, которыхъ мы не можемъ или почти не можемъ непосредственно воспринять нашими чувствами, а только съ помощью инструментовъ.

Такъ какъ никакое измѣреніе не можетъ быть выполнено съ абсолютной точностью, и, кромѣ того, наши геометрическія построенія не даютъ намъ дѣйствительныхъ точекъ, линій и поверхностей, то эмпирически полученные результаты измѣреній вполнѣ удовлетворительно представляются одними лишь раціональными числами: здѣсь никогда не сказывается надобность въ дальнѣйшемъ развитіи понятія о числѣ.

[1]) Утвержденіе это врядъ ли соотвѣтствуетъ современному взгляду на пространство и геометрію.

[2]) Это утвержденіе, кажущееся столь яснымъ на первый взглядъ, въ дѣйствительности, не имѣетъ содержанія. Входить въ подробное выясненіе этого мы не можемъ. Читатель можетъ найти обстоятельный анализъ этого вопроса въ книгѣ H. Poincaré „La Science et l'hypothèse" (имѣется русскій переводъ подъ названіемъ „Наука и Гипотеза"), а еще лучше въ статьѣ того же автора подъ заглавіемъ „Mesure du temps," напечатанной въ „Revue de Métaphysique et de Morale" за 1898 г.

Тѣмъ не менѣе мы не можемъ отказаться отъ мысли, что, напримѣръ, діагональ квадрата, или окружность круга имѣютъ опредѣленную длину, выражаемую опредѣленнымъ числомъ; то же имѣетъ мѣсто и для промежутковъ времени и вѣса: мы склонны принять, что измѣряемые объекты представляютъ собой какъ бы эквиваленты всей совокупности чиселъ *).

3. Условія измѣримости элементовъ нѣкотораго комплекса можно, на нашъ взглядъ, выразить въ слѣдующихъ положеніяхъ:

1. Два элемента a и b даннаго комплекса либо равны другъ другу, либо одинъ изъ нихъ больше, другой меньше.

2. Если a есть нѣкоторый элементъ этого комплекса, то можно указать элементы, которые меньше элемента a (безконечная дѣлимость).

3. Если a и b суть нѣкоторые элементы нашего комплекса (равные другъ другу или различные), то въ этомъ же комплексѣ существуетъ элементъ $c = a + b$, представляющій собою сумму обоихъ элементовъ и превосходящій оба слагаемыя, порознь взятыя.

При суммированіи имѣетъ мѣсто перемѣстительный и сочетательный законы сложенія (§ 7).

4. Если элементъ b меньше элемента c, то существуетъ опредѣленный элементъ $a = c - b$, имѣющій то свойство, что $a + b = c$.

5. Повторное суммированіе нѣсколькихъ равныхъ другъ другу элементовъ a приводитъ къ понятію произведенія ma, гдѣ m означаетъ число натуральнаго ряда. Относительно произведеній имѣетъ мѣсто принципъ Архимеда:

Если a и b суть произвольные два элемента нашей группы, то можно указать элементъ ma, кратный элемента a, который превосходитъ элементъ b.

Такимъ образомъ среди элементовъ измѣримой группы нѣтъ ни наибольшаго, ни наименьшаго; изъ свойствъ 2), 3) и 4) слѣдуетъ, что между двумя любыми элементами заключены еще другіе элементы. Кромѣ того, должно быть выполнено слѣдующее условіе:

6. Если a обозначаетъ какой-либо элементъ группы, а n есть число натуральнаго ряда, то существуетъ элементъ b, удовлетворяющій равенству $nb = a$. Этотъ элементъ b называется n-ой частью элемента a и

*) Понятіе о непрерывности, столь простое и наглядное въ области отвлеченныхъ чиселъ, представляетъ почти непреодолимыя трудности въ области измѣряемыхъ величинъ, т. е. въ области объектовъ внѣшняго міра.

Павелъ Дюбуа-Реймонъ (Paul du Bois-Reymond) разработалъ этотъ вопросъ въ своемъ трудѣ: „Allgemeine Functionentheorie" (Tübingen 1882). Онъ пришелъ къ тому выводу, что по этому вопросу равно возможны и равно правильны двѣ взаимно другъ друга исключающія точки зрѣнія: идеалистическая и эмпирическая.

обозначается такъ: $b = a/n$. Что существуетъ одинъ лишь элементъ b, легко заключить изъ изложенныхъ посылокъ. Дѣйствительно, если $b' > b$, то $nb' = nb + n(b' - b)$ и превосходитъ элементъ nb.

§ 28. Отношенія.

1. Соизмѣримыми называютъ такіе два элемента a и b измѣримаго комплекса, для которыхъ можно указать два натуральныхъ числа p и q, удовлетворяющихъ условію

$$qa = pb. \qquad (1)$$

Изъ равенства (1) видно, что, раздѣливъ (согласно § 27, 6) элементъ a на p частей, а элементъ b на q частей, получимъ равныя другъ другу части:

$$a/p = b/q = d, \qquad (2)$$

такъ что $a = pd$, $b = qd$. Элементъ d, слѣдовательно, есть общая мѣра элементовъ a и b (отсюда терминъ: „соизмѣримый“).

Въ этомъ случаѣ выражаются такъ: отношеніе элементовъ a и b равно отношенію чиселъ p и q.

Равенство (1) остается въ силѣ, если элементы a и b одно и то же число разъ взять слагаемымъ или раздѣлить на одно и то же число, а также, если числа p и q умножить на одно и то же число, или, наконецъ, отбросить у нихъ общаго дѣлителя. Поэтому отношеніе чиселъ p и q остается неизмѣннымъ, если не мѣняется численное значеніе дроби p/q, и такимъ образомъ отношенія всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, а слѣдовательно, и всякихъ двухъ соизмѣримыхъ элементовъ измѣримой группы можно привести въ однозначное соотвѣтствіе съ раціональными дробями.

Тогда равенство отношеній, помимо вышеприведенной формы (1), можетъ быть представлено еще такъ:

$$a : b = p : q \text{ или } a/b = p/q;$$

отношеніе a/b считается большимъ, нежели отношеніе $a'/b' = p'/q'$, если дробь p/q больше дроби p'/q'.

Элементы a и b называются соотвѣтственно числителемъ и знаменателемъ отношенія. Если $a = b$, то отношеніе ихъ $= 1$. Если дано отношеніе p/q, то величина одного изъ элементовъ a и b можетъ быть взята произвольно. Если, напримѣръ, даны: p, q и b, то, раздѣливъ элементъ pb на q частей, получимъ элементъ a, удовлетворяющій равенству (1).

2. Если фиксируемъ b, то всякому другому элементу a той же группы, соизмѣримому съ элементомъ b, будетъ такимъ образомъ отнесено

опредѣленное число p/q; самому же элементу b отвѣчаеть при этомъ число 1. Онъ называется поэтому единицей системы измѣренія. Въ выборѣ единицы мы ничѣмъ не ограничены, и руководимся лишь нашими удобствами. Однако, въ высшей степени важно, особенно для научной практики, чтобы единица была строго опредѣлена и чтобы въ любой моментъ мы имѣли возможность получить ее въ неизмѣненномъ видѣ. Конечно, съ абсолютной точностью требованіе это не можетъ быть выполнено, но путемъ обширныхъ вспомогательныхъ средствъ этому требованію стараются, по возможности, удовлетворить.

Съ древнихъ временъ за единицы времени принимають сутки *) и ихъ подраздѣленія: часы, минуты и секунды. Дѣленіе на 24 и 60 частей также относится къ глубокой древности, и мы съ нимъ настолько сроднились, что трудно даже въ будущемъ ожидать, что оно будетъ замѣнено другимъ подраздѣленіемъ, хотя бы, напримѣръ, десятичнымъ.

Что касается мѣръ длины и массы (послѣднія въ обиходѣ совпадаютъ съ мѣрами вѣса), то еще въ недалекомъ прошломъ здѣсь царило самое пестрое разнообразіе и даже неопредѣленность. Въ 1799 г. французское республиканское правительство ввело новую единицу длины—метръ. Хотя первоначально мѣру эту опредѣляли какъ одну сорокамилліонную часть земного меридіана, но въ дѣйствительности эталонъ этотъ представляетъ собою произвольно выбранный, строго опредѣленный и тщательно сохраняемый нормальный метръ. Большинство культурныхъ государствъ примкнуло къ состоявшейся въ 1875 г. интернаціональной метрической конвенціи: въ нихъ метръ служитъ узаконенной единицей длины, причемъ въ дальнѣйшихъ подраздѣленіяхъ строго проведенъ принципъ десятичной системы [3]).

На метрической единицѣ длины основанъ выборъ единицъ для мѣръ поверхностей и объемовъ, каковыми являются квадратный метръ и кубическій метръ или ихъ десятичныя доли; точно также и единица массы находится въ связи съ единицей длины: единица массы граммъ —это масса кубическаго сантиметра воды въ состояніи наибольшей плотности **).

Углы также образуютъ измѣримый комплексъ особаго рода. Измѣреніе элементовъ этого комплекса на практикѣ сводится къ измѣренію длины, а именно—къ отсчету раздѣленнаго круга.

*) Точнѣе: среднія солнечныя сутки, т. е. среднюю величину промежутка между двумя кульминаціями солнца.

[3]) Въ Россіи метрическая система введена факультативно, т. е., какъ разрѣшенная для торговой практики система мѣръ, но не обязательная: точно также обстоитъ дѣло и въ Англіи.

**) Срав. статью Runge: „Mass und Messen“ въ Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften.

Однако углы имѣютъ свою особую единицу, и даже двѣ единицы: одна употребляется для практическихъ цѣлей, другая—больше въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ. Чтобы получить первую единицу, дѣлятъ всю окружность на 360 равныхъ частей, которыя называются **градусами**. Градусъ подраздѣляется на 60 минутъ, минута въ свою очередь на 60 секундъ. Прямой уголъ содержитъ 90 градусовъ, выпрямленный уголъ—180 градусовъ. Для сокращенія градусы, минуты и секунды изображаютъ еще, напримѣръ, такъ: $57^0\ 17'\ 44{,}8''$; читаютъ 57 градусовъ, 17 минутъ, 44,8 секунды.

Второй единицей угловъ служитъ уголъ, дуга котораго по своей длинѣ равна радіусу. При такомъ выборѣ единицы уголъ въ 180 градусовъ измѣряется числомъ $\pi = 3{,}\ 14159265$, т. е. числомъ, выражающимъ длину полуокружности, радіусъ которой равенъ 1. Число 1 представляетъ собою мѣру угла въ $57^0\ 17'\ 44{,}8''$ или въ 206264,8 секунды.

Числа, выражающія собою результатъ измѣренія, могутъ быть, собственно говоря, лишь положительными. Тѣмъ не менѣе часто оказывается весьма полезнымъ употреблять и отрицательныя числа - тамъ, гдѣ между измѣряемыми величинами нужно выразить отношеніе **противоположности**. При этомъ число не будетъ, собственно говоря, выражать измѣряемой длины, но представить нѣкоторую **точку**, которую получимъ, отложивъ измѣряемую величину отъ нѣкоторой опредѣленной начальной точки. При такомъ условіи положительныя числа выразятъ точки, лежащія по одну сторону отъ начала, отрицательныя числа—точки по другую сторону отъ начала. Нагляднѣе всего это видно на измѣреніи длины и времени, хотя вышеизложенныя соображенія находятъ себѣ примѣненіе и при измѣреніи скоростей, силъ, и многихъ другихъ величинъ. При этомъ оказывается то удобство, что не только сложеніе, но и вычитаніе можетъ быть всегда выполнено.

§ 29. Физическія мѣры.

1. Измѣряемые предметы, собственно говоря, могутъ измѣряться лишь единицами того же рода, что измѣряемая величина: длины нѣкоторой длиной, времена –нѣкоторымъ промежуткомъ времени, электрическое сопротивленіе сопротивленіемъ же опредѣленнаго размѣра: на практикѣ такой способъ измѣренія является самымъ цѣлесообразнымъ и простымъ, если только не требуется величайшей степени точности. Число измѣряемыхъ величинъ, уже и теперь весьма большое, возрастаетъ безпредѣльно съ успѣхомъ науки; вслѣдствіе этого для науки въ высшей степени важно не имѣть необходимости измѣрять каждую особую величину **спеціальной единицей**, которую приходилось бы сохранять въ безусловно неизмѣнномъ со-

стояніи. Поэтому слѣдуетъ считать огромнымъ успѣхомъ новѣйшей физики то, что ей удалось свести всѣ мѣры къ тремъ основнымъ мѣрамъ: длины, времени и массы.

Впервые это было сдѣлано Гауссомъ для магнитныхъ мѣръ; его трудъ пріобрѣлъ огромное значеніе въ новѣйшемъ ученіи объ электричествѣ и въ его техническихъ приложеніяхъ.

Каждая единица мѣры, которая выражена посредствомъ трехъ основныхъ единицъ длины, времени и массы, называется абсолютной единицей, а весь комплексъ такихъ мѣръ называется абсолютной системой мѣръ.

Мы познакомимся съ этой системой на нѣкоторыхъ примѣрахъ, число которыхъ легко можно было бы увеличить.

2. Скорость. Когда тѣло движется, оно можетъ проходить одинаковый путь въ различные промежутки времени, и наоборотъ пути различной длины въ одинаковые промежутки времени, т. е. тѣло можетъ имѣть различную скорость.

Если тѣло за одинъ и тотъ же промежутокъ времени, напримѣръ, за одну секунду, одинъ разъ проходитъ путь a, другой разъ путь b, а третій разъ путь $a+b$, то скорость тѣла въ третьемъ движеніи есть сумма скоростей въ обоихъ первыхъ движеніяхъ: этимъ удостовѣряется наличность критеріевъ измѣримости комплекса скоростей (§ 27, 3).

Скорость увеличивается въ два раза, въ три раза и т. д., если отрѣзки пути, проходимые за данный промежутокъ времени, удваиваются или утраиваются, или же, если для прохожденія даннаго отрѣзка пути требуется время, въ два или три раза меньшее.

Мѣра скорости сведется къ мѣрамъ времени и длины, если примемъ за единицу скорости такую скорость, при которой тѣло проходитъ единицу длины за единицу времени.

Тѣло, проходящее путь λ за время τ, имѣетъ скорость λ/τ; частное отъ дѣленія этихъ именованныхъ чиселъ получаетъ такимъ образомъ особое значеніе, выражающее собой величину, отличную какъ отъ длины, такъ и отъ времени.

Слѣдующіе примѣры показываютъ, какъ выбранныя единицы вводятся въ обозначеніе. Предположимъ, что локомотивъ за одинъ часъ проходитъ путь въ 70 километровъ. Скорость его изображаютъ такъ:

$$70\,\frac{\text{километръ}}{\text{часъ}}$$

$$\text{или } 70000\,\frac{\text{метръ}}{\text{часъ}} = 1167\,\frac{\text{метръ}}{\text{минута}} = 19{,}45\,\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}.$$

За время полнаго вращенія земли вокругъ ея оси точка земного экватора пробѣгаетъ путь, равный окружности экватора, т. е. приблизи-

тельно 40 милліоновъ метровъ. Поэтому скорость этой точки равна

$$40\,000\,000 \frac{\text{метръ}}{\text{сутки}} = 463 \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}.$$

Какова скорость точки, географическая широта которой равна 50° 30 (Берлинъ) или 48° 35′ (Страсбургъ)?

Пѣшеходъ среднимъ числомъ проходитъ одинъ километръ за 12 минутъ. Скорость его поэтому равна

$$\frac{1 \text{ километръ}}{12 \text{ минутъ}} \text{ или } 1{,}4 \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}.$$

Разстояніе земли отъ солнца составляетъ въ среднемъ 149 милліоновъ километровъ, а длина земной орбиты содержитъ 936 милліоновъ километровъ. Этотъ путь земля проходитъ за 365 дней, что соотвѣтствуетъ скорости въ

$$29\,600 \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}},$$

или круглымъ числомъ 30 километрамъ въ секунду.

Какова скорость Меркурія, Венеры, Марса и Юпитера, если среднія разстоянія этихъ планетъ отъ солнца и періоды ихъ обращенія мы представимъ соотвѣтственно слѣдующими числами:

Меркурій	58	милліоновъ километровъ	88 дней
Венера	108	„ „	225 „
Марсъ	227	„ „	688 „
Юпитеръ	777	„ „	4333 „

Траекторіи планетъ мы принимаемъ за окружности.

Скорость звука въ сухомъ воздухѣ равна приблизительно 331 $\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}$, тогда какъ скорость свѣта равна 300 милліонамъ $\frac{\text{метръ}}{\text{секунда}}$.

3. Ускореніе. Поѣздъ, начиная двигаться, не тотчасъ получаетъ свою полную скорость, но достигаетъ ея постепенно въ теченіе нѣкотораго промежутка времени. Точно также при остановкѣ онъ не мгновенно теряетъ свою скорость, но лишь постепенно.

Падающее на землю тѣло пробѣгаетъ свой путь не съ одной и той же скоростью все время: скорость увеличивается съ приближеніемъ тѣла къ землѣ. Отсюда проистекаетъ понятіе объ ускореніи и замедленіи движенія.

З а единицу ускоренія принимаютъ такое ускореніе, при которомъ въ единицу времени скорость получаетъ приращеніе, равное единицѣ скорости.

Если въ началѣ ускореннаго движенія тѣло имѣетъ скорость, равную

нулю, а по прошествіи времени τ получаетъ скорость v, то ускореніе такого движенія равно v/τ. Если за это время тѣло прошло путь λ, то частное λ/τ должно выражать ту скорость, которую тѣло имѣло бы, если бы оно двигалось безъ ускоренія и приходило за то же время τ такой же путь λ. Но эта скорость есть средняя ариѳметическая $\frac{1}{2}v$ изъ начальной скорости нуль и скорости v въ концѣ движенія: обозначивъ ускореніе черезъ g, мы получимъ:

$$\frac{1}{2}v = \lambda/\tau, \quad g = \frac{2\lambda}{\tau^2}. \tag{1}$$

Если начальная скорость движенія равна не нулю, а v_0, то получимъ:

$$\frac{v + v_0}{2} = \lambda/\tau, \quad g = \frac{v - v_0}{\tau}. \tag{2}$$

Ускореніе падающаго тѣла называется также ускореніемъ силы тяжести. Если пренебречь сопротивленіемъ воздуха, то ускореніе это есть величина постоянная въ данномъ мѣстѣ земли для всѣхъ тѣлъ; на параллели, широта которой равна 45°, ускореніе это

$$g = 9{,}8062 \ \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}^2}.$$

Оно возрастаетъ отъ экватора къ полюсамъ; на экваторѣ оно равно 9,761, на полюсѣ 9,832. Такимъ образомъ падающее тѣло за первую секунду паденія проходитъ въ среднемъ 4,9 метра.

Чтобы узнать длину пути, пройденнаго за первыя двѣ секунды, нужно въ формулу (1) подставить $\tau = 2$; получимъ путь, равный 19,6 метра. Слѣдовательно, длина пути, пройденнаго въ продолженіе второй секунды, равна 14,7 метра.

Ускореніе тяжести мѣняется съ измѣненіемъ высоты тѣла надъ уровнемъ земли; при этомъ имѣетъ мѣсто законъ Ньютона, по которому ускореніе тяжести въ различныхъ мѣстахъ обратно пропорціонально квадратамъ разстояній этихъ мѣстъ отъ центра земли, т. е., если обозначимъ черезъ g и g_1 ускоренія тяжести въ двухъ мѣстахъ, разстоянія которыхъ отъ центра земли равны соотвѣтственно r и r_1, то

$$g : g_1 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r_1^2} = r_1^2 : r^2.$$

Каково было бы ускореніе тяжести въ мѣстѣ, которое удалено отъ земли на такое разстояніе, какъ луна, принимая длину земного радіуса и разстояніе земли отъ луны соотвѣтственно въ 858,5 миль и 52000 миль? (Такъ какъ для рѣшенія этого вопроса нужно знать лишь отношеніе

r_1/r, то единица длины можетъ быть выбрана произвольно.

$$g_1 = 9{,}8 \cdot \frac{858{,}5^2}{52000^2} = 0{,}0027 \; \frac{\text{метръ}}{\text{секунда}^2} \cdot$$

$$= 0{,}27 \; \frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда}^2}$$

4. Сила. За единицу массы выбираютъ массу кубическаго сантиметра чистой воды, которую называютъ „граммъ". Какая-нибудь масса имѣетъ численное значеніе m, если она можетъ быть уравновѣшена помощью массы, содержащейся въ m кубическихъ сантиметрахъ воды.

Массу отнюдь не слѣдуетъ смѣшивать съ вѣсомъ, который выражается произведеніемъ mg изъ массы на ускореніе силы тяжести.

Масса тѣла одинакова во всѣхъ мѣстахъ земли: вѣсъ тѣла, наоборотъ, зависитъ отъ того, въ какомъ мѣстѣ земли находится разсматриваемое тѣло: онъ уменьшается съ увеличеніемъ географической широты мѣста, а также съ увеличеніемъ разстоянія тѣла отъ земной поверхности.

Вѣсъ—это сила, съ которой можно сравнивать другія силы, напримѣръ, силу нашихъ мускуловъ. Если сила не встрѣчаетъ противодѣйствія, то она сообщаетъ тѣлу, на которое дѣйствуетъ, нѣкоторое ускореніе. Но опредѣленная сила сообщаетъ тѣлу тѣмъ меньшее ускореніе, чѣмъ больше его масса; поэтому за единицу силы можно принять такую силу, которая сообщаетъ единицѣ массы ускореніе, равное единицѣ. Если за единицу массы принятъ граммъ, за единицу длины—сантиметръ и за единицу времени—секунду, то соотвѣтствующая этому единица силы называется диной (δύναμις). Итакъ, имѣемъ:

$$\text{одна дина} = 1 \cdot \frac{\text{граммъ сантиметръ}}{\text{секунда}^2} \cdot$$

Примѣръ. Выразить въ динахъ силу, съ которой земля притягиваетъ луну.

Объемъ земли содержитъ приблизительно

$$1083 \cdot 10^{24} \text{ кубическихъ сантиметровъ*)}.$$

*) Множитель 10^{24} означаетъ, что число умножается на 10 въ степени 24, т. е. къ нему приписываютъ 24 нуля. Когда приходится имѣть дѣло съ очень большими числами, то удобно пользоваться этимъ сокращеннымъ обозначеніемъ. Конечно, въ дѣйствительности, нужно было бы приписывать не нули, а другія цифры. Поэтому указанное обозначеніе примѣняютъ въ тѣхъ лишь случаяхъ, гдѣ истинныя значенія чиселъ неизвѣстны, или же тамъ, гдѣ нѣтъ надобности ихъ знать. Количество цифръ такихъ чиселъ называютъ также порядкомъ ихъ величины. Часто приходится довольствоваться сравненіемъ порядковъ чиселъ за невозможностью сравнивать ихъ истинныя значенія.

Если бы земля состояла только изъ воды, то это же самое число выражало бы и массу земли. Но средняя плотность земли приблизительно въ 5,5 разъ больше плотности воды; слѣдовательно, масса земли въ 5,5 раза больше вышеприведеннаго числа, т. е. она равна приблизительно

$$6 \cdot 10^{27} \text{ граммамъ.}$$

Масса луны составляетъ приблизительно одну восмидесятую часть массы земли, и равна приблизительно

$$75 \cdot 10^{24} \text{ граммамъ.}$$

Умноживъ это число на выраженную въ сантиметрахъ и секундахъ величину ускоренія, сообщаемаго земнымъ притяженіемъ на разстояніи, равномъ разстоянію луны отъ земли, мы получимъ число

$$2025 \cdot 10^{22},$$

указывающее, сколько динъ содержитъ сила, съ которой земля притягиваетъ луну.

Силу можно сравнивать также съ вѣсомъ, т. е. выражать ее не въ динахъ, а въ единицахъ вѣса. За единицу силы тогда принимаютъ вѣсъ одного грамма на поверхности земли на широтѣ въ 45^0, гдѣ ускореніе тяжести

$$g_0 = 981 \frac{\text{сантиметръ}}{\text{секунда}^2}.$$

Сила, которая массѣ m граммовъ сообщаетъ ускореніе g, получитъ тогда численное значеніе mg/g_0, выражающее силу въ граммахъ.

Такимъ образомъ, чтобы выразить вѣсъ луны въ граммахъ, нужно число $2025 \cdot 10^{22}$ раздѣлить на 981, получимъ $2 \cdot 10^{22}$ граммовъ.

§ 30. Несоизмѣримыя величины.

1. До сихъ поръ мы въ нашихъ разсужденіяхъ и опредѣленіяхъ исходили изъ предположенія, что величины, отношенія которыхъ мы разсматриваемъ, соизмѣримы, такъ что эти отношенія выражаются раціональными числами: для практическихъ цѣлей можно было бы ограничиться соизмѣримыми величинами. Однако, теперь мы сдѣлаемъ шагъ впередъ, и разсмотримъ также ирраціональныя отношенія.

Пусть e будетъ элементъ нѣкотораго измѣримаго комплекса, а r нѣкоторое положительное раціональное число; изъ понятія объ измѣримости слѣдуетъ, что re, въ свою очередь, есть нѣкоторый элементъ того же комплекса. Такимъ образомъ, если a означаетъ нѣкоторый элементъ даннаго

комплекса, то мы можемъ образовать сѣченіе R/R' (§ 22, 4.), если отнесемъ къ группѣ R всѣ тѣ числа r, которыя удовлетворяютъ условію $re < a$, и къ группѣ R' тѣ числа r', которыя удовлетворяютъ неравенству $r'e > a$; при этомъ число r, удовлетворяющее равенству $re = a$, если только такое число r существуетъ, мы можемъ по произволу отнести либо къ группѣ R, либо же къ группѣ R'. Сѣченіе R/R' опредѣляетъ собою нѣкоторое число α, вообще говоря, ирраціональное: это число α мы относимъ элементу a. Мы полагаемъ при этомъ $\alpha e = a$, и говоримъ, что α есть число, измѣряющее элементъ a. Понятно, что съ измѣненіемъ элемента e, принятаго за единицу нашей системы измѣренія, мѣняется и число α. Если $\beta e = b$ есть нѣкоторый другой элементъ той же группы, и $a < b$, то имѣетъ мѣсто неравенство $\alpha < \beta$.

Итакъ, каждой парѣ a, e элементовъ измѣримаго комплекса отвѣчаетъ опредѣленное число α, измѣряющее элементъ a; это слѣдуетъ, согласно вышеизложенному, изъ тѣхъ предпосылокъ, которыя представляютъ собою опредѣленіе измѣримости. Обратное предложеніе, что при данной единицѣ e всякому числу α соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ a, численное значеніе котораго равно числу α, есть новое допущеніе, которое мы склонны принять въ силу нѣкотораго рода внутренняго созерцанія: отнынѣ мы принимаемъ эту предпосылку, которую назовемъ непрерывностью группы [4]).

Съ этой непрерывностью мы не связываемъ никакого (чувственнаго) представленія; никакой внѣшній опытъ не можетъ ни подтвердить ее, ни опровергнуть. Однако же совокупность чиселъ есть измѣримый комплексъ, дѣйствительно обладающая свойствомъ непрерывности.

2. Теперь мы перейдемъ къ общему опредѣленію отношеній.

Евклидъ (Элементы, книга V) даетъ слѣдующее опредѣленіе: Если a и b суть два элемента нѣкотораго измѣримаго комплекса, а A и B представляютъ собою два элемента нѣкотораго другого или даже того же самаго измѣримаго комплекса, то выберемъ два какихъ-либо числа натуральнаго ряда m и n. Тогда имѣетъ мѣсто одно и только одно изъ трехъ соотношеній.

$$\text{I) } ma < nb, \quad \text{II) } ma = nb, \quad \text{III) } ma > nb. \qquad (1)$$

[4]). Совершенно непонятно, почему автору понадобилось туманное „внутреннее созерцаніе" (innere Anschauung) и новый постулатъ для введенія этого понятія. Если мы возьмемъ нѣкоторый элементъ какой-либо измѣримой группы и присоединимъ къ нему всѣ соизмѣримые съ нимъ элементы, то получимъ комплексъ, не обладающій непрерывностью. Введеніе ирраціональныхъ чиселъ показываетъ, что мы имѣемъ возможность построить непрерывные комплексы въ области абстрактныхъ объектовъ. Вопросъ же о томъ, существуютъ ли реальные непрерывные комплексы, какъ авторъ справедливо указываетъ, экспериментально рѣшенъ быть не можетъ.

Если вмѣстѣ съ тѣмъ соотвѣтственно имѣютъ мѣсто соотношенія

$$\text{I)}\ mA < nB,\ \text{II)}\ mA = nB,\ \text{III)}\ mA > nB \qquad (2)$$

и это справедливо при всякихъ значеніяхъ чиселъ m и n [5]), то a относится къ b, какъ A къ B. Мы выражаемъ это равенствомъ

$$a : b = A : B. \qquad (3)$$

Замѣтимъ еще, что здѣсь мы имѣемъ дѣло только съ абсолютными (положительными) значеніями элементовъ измѣримаго комплекса.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ:

Отношеніе двухъ положительныхъ чиселъ α и β равно отношенію числа α/β къ числу 1, то есть

$$\alpha : \beta = \alpha/\beta : 1. \qquad (4)$$

Дѣйствительно, раздѣливъ обѣ части соотношеній

$$m\alpha \lesseqgtr n\beta$$

на число β, мы получимъ:

$$m\frac{\alpha}{\beta} \lesseqgtr n \cdot 1.$$

Число α/β разсматривается поэтому, какъ мѣра отношенія чиселъ α и β и всѣхъ другихъ равныхъ ему отношеній.

3. Отношеніе двухъ элементовъ a и b нѣкотораго измѣримаго комплекса равно отношенію измѣряющихъ ихъ чиселъ α и β.

Дѣйствительно, если

$$m\alpha < n\beta, \qquad (5)$$

то можно указать два такихъ раціональныхъ числа mr' и ns, которыя содержатся между числами $m\alpha$ и $n\beta$, т. е. удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$m\alpha < mr' < ns < n\beta. \qquad (6)$$

Тогда $\alpha < r'$ и $s < \beta$, такъ что, если e обозначаетъ единицу нашего комплекса, то мы имѣемъ

$$a < er', \quad es < b.$$

[5]). Т. е., если соотношеніе I) въ ряду (1) всегда влечетъ за собой соотношеніе I въ ряду (2), соотношеніе II) въ ряду (1) влечетъ за собой соотношеніе II) въ ряду (2), соотношеніе III) въ ряду (1) влечетъза собой соотношеніе III) въ ряду (2), каковы бы ни были цѣлыя числа m и n.

Отсюда, принимая во вниманіе неравенства (6), найдемъ:

$$ma < nb. \tag{7}$$

Точно также, если дано неравенство (7), то изъ него вытекаютъ неравенства (5) Дѣйствительно, мы можемъ подобрать два количества er' и es, раціонально кратныхъ единицы мѣры e (т. е. чтобы r' и s были раціональными числами), такъ, чтобы имѣли мѣсто неравенства:

$$ma < mer' < nes < nb. \tag{8}$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\alpha < r' \text{ и } s < \beta,$$

стало быть

$$m\alpha < n\beta. \tag{9}$$

Такимъ же образомъ можно показать, что неравенства $ma > nb$ и $m\alpha > n\beta$ вытекаютъ одно изъ другого; отсюда уже слѣдуетъ, что равенство $ma = nb$ всегда обусловливаетъ собою равенство $m\alpha = n\beta$, и обратно.

Поэтому частное α/β также служитъ мѣрой отношенія элементовъ a и b и не зависитъ отъ выбора единицы e. Надъ именованными числами, выражающими элементы комплекса, можно производить такія же вычисленія, какъ и надъ всякими другими числами; можно, однако, задать вопросъ, какое значеніе должны мы приписать результатамъ такихъ вычисленій.

Сложенію и вычитанію присваиваютъ обыкновенно опредѣленное значеніе лишь тогда, когда эти дѣйствія производятся надъ именованными числами одного и того же наименованія; нельзя, напримѣръ, складывать другъ съ другомъ или вычитывать промежутки времени и длины. Если же оба числа выражены посредствомъ одной и той же единицы, напримѣръ, единицы длины, то сумма или разность измѣряющихъ чиселъ представляетъ собою число, измѣряющее сумму или разность соотвѣтственныхъ величинъ, измѣренныя той же единицей.

Въ случаѣ, когда измѣряющія числа имѣютъ раціональныя значенія, предложеніе это слѣдуетъ изъ опредѣленій, которыя мы дали въ § 27; для ирраціональныхъ же чиселъ оно вытекаетъ изъ допущенія о непрерывности комплекса.

Произведеніе именованныхъ чиселъ представляетъ собою именованное число нѣкотораго новаго комплекса, единица котораго опредѣляется, какъ произведеніе единицъ умножаемыхъ величинъ; то же самое относится къ частному. Такъ напримѣръ, произведеніе двухъ мѣръ длины есть мѣра поверхности, произведеніе трехъ мѣръ длины есть мѣра объема, частное отъ дѣленія мѣры длины на мѣру времени есть опредѣленная скорость. Частное

же двухъ мѣръ относится къ одному и тому же комплексу, представляетъ собою отношеніе ихъ, а, стало быть, оно есть отвлеченное число.

§ 31. Пропорціи.

1. Пропорціей называется равенство вида

$$a : b = c : d, \tag{1}$$

гдѣ a, b, c и d обозначаютъ элементы измѣримаго комплекса. Равенство это имѣетъ смыслъ лишь въ томъ случаѣ, когда существуетъ отношеніе элементовъ a и b, и отношеніе элементовъ c и d, т. е., когда, съ одной стороны, элементы a и b, съ другой стороны, элементы c и d принадлежатъ соотвѣтственно одному и тому же комплексу; но комплексъ, къ которому относятся элементы a и b можетъ быть отличенъ отъ комплекса, которому принадлежатъ элементы c и d, напримѣръ, одинъ изъ нихъ можетъ быть системой массъ, другой—системой длинъ.

Элементы a, b, c и d называются членами пропорціи; a называется первой, b—второй, c - третьей и d—четвертой пропорціональной.

Если числа α, β, γ и δ представляютъ собою числа, измѣряющія элементы a, b, c и d, то изъ равенства (1) слѣдуетъ числовая пропорція:

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta, \tag{2}$$

или равенство

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}. \tag{3}$$

Изъ ариѳметическихъ слѣдствій этого равенства можно сдѣлать соотвѣтственныя заключенія относительно элементовъ a, b, c и d.

Любыя три изъ четырехъ чиселъ α, β, γ и δ однозначно опредѣляютъ соотвѣтствующее имъ четвертое число. Принимая во вниманіе, что каждому числовому значенію, согласно нашему допущенію, соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ комплекса измѣряемыхъ объектовъ, мы можемъ сказать:

Если изъ четырехъ членовъ пропорціи три какихъ-либо члена извѣстны, то они однозначно опредѣляютъ собою четвёртый.

2. Изъ формулы (3) можно получить по правиламъ ариѳметики слѣдующія равенства:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta};$$

сообразно съ этимъ, изъ пропорціи (1) получимъ слѣдующія пропорціи:

$$(a+b):b=(c+d):d,$$
$$(a-b):b=(c-d):d, \qquad (4)$$
$$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d).$$

Здѣсь предполагается, что $a-b$ и, слѣдовательно, также $c-d$ суть величины положительныя.

3. Изъ формулы (3) слѣдуетъ, что $\alpha/\gamma=\beta/\delta$. Сдѣлать изъ этого равенства выводъ относительно элементовъ a, b, c и d можно лишь въ томъ случаѣ, когда между элементами a и c существуетъ отношеніе, т. е., когда всѣ четыре элемента a, b, c и d принадлежатъ одному и тому же комплексу. Въ этомъ предположеніи мы получимъ:

Изъ пропорціи

$$a:b=c:d \qquad (5)$$

слѣдуетъ пропорція

$$a:c=b:d.$$

4. Если въ пропорціи (1) второй и третій члены равны другъ другу, то каждый изъ нихъ называется среднимъ пропорціональнымъ между первымъ членомъ и четвертымъ. Спрашивается, всегда ли можно опредѣлить средній пропорціональный элементъ между двумя произвольно заданными элементами a и b? Иными словами, можно ли опредѣлить элементъ x, удовлетворяющій пропорціи

$$a:x=x:b? \qquad (7)$$

Очевидно, это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда элементы a и b принадлежатъ одному и тому же комплексу. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изъ пропорціи (7) слѣдуетъ:

$$\frac{\alpha}{\xi}=\frac{\xi}{\beta}, \quad \xi^2=\alpha\beta,$$

гдѣ α, β и ξ суть числа, измѣряющія элементы a, b и x.

Положивъ $\xi=\sqrt{\alpha\beta}$, мы получаемъ значеніе ξ, удовлетворяющее числовой пропорціи:

$$\alpha:\xi=\xi:\beta. \qquad (7')$$

Отсюда уже вытекаетъ и пропорція (7). Такимъ образомъ нахожденіе средняго пропорціональнаго приводится къ извлеченію квадратнаго корня.

Если черезъ a и b обозначимъ длины двухъ отрѣзковъ, то средняя пропорціональная между этими величинами представитъ намъ сторону квадрата, равновеликаго прямоугольнику, построенному на отрѣзкахъ a и b, какъ на сторонахъ.

5. Предыдущую задачу можно развить слѣдующимъ образомъ: Опредѣлить двѣ величины x и y такъ, чтобы

$$a : x = x : y = y : b. \qquad (8)$$

Обозначивъ соотвѣтствующія числа черезъ α, ξ, η и β, имѣемъ:

$$\alpha : \xi = \xi : \eta = \eta : \beta. \qquad (9)$$

Изъ этихъ пропорцій слѣдуетъ, что

$$\alpha\eta = \xi^2, \quad \beta\xi = \eta^2 \text{ и } \alpha\beta = \xi\eta; \qquad (10)$$

слѣдовательно, имѣемъ:

$$\alpha^2\beta = \xi^3 \text{ и } \alpha\beta^2 = \eta^3. \qquad (11)$$

Отсюда найдемъ:

$$\xi = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}\ ;\ \eta = \sqrt[3]{\alpha\beta^2}. \qquad (12)$$

Найденныя значенія ξ и η удовлетворяютъ пропорціямъ (9), а слѣдовательно, и пропорціямъ (8).

Но число $\alpha^2\beta$ выражаетъ объемъ четыреугольнаго столба, имѣющаго высоту b и квадратное основаніе, сторона котораго равна a; число ξ выражаетъ длину ребра куба, объемъ котораго равенъ $\alpha^2\beta$. Такимъ образомъ посредствомъ нашей пропорціи рѣшается задача о превращеніи четырехугольнаго столба въ равновеликій ему кубъ. Комбинируя эту задачу съ задачей 4, мы можемъ превратить любой параллелопипедъ въ кубъ.

Частный случай, когда $b = 2a$, есть не что иное, какъ знаменитая Делосская задача объ удвоеніи куба*).

6. Золотое сѣченіе. Данный отрѣзокъ a раздѣлить на такія двѣ части x и $a - x$, чтобы меньшая частъ $a - x$ относилась къ большей x такъ, какъ большая часть относится ко всему отрѣзку. То есть, должна быть удовлетворена пропорція:

$$(a - x) : x = x : a; \qquad (13)$$

*) Преданіе разсказываетъ, что оракулъ, къ которому обратились жители Делоса во время свирѣпствовавшей среди нихъ эпидеміи, посовѣтовалъ имъ удвоить алтарь Аполлона, имѣвшій форму куба. Геометрическое рѣшеніе задачи приписываютъ Платону. Подробности этого преданія, а также исторію задачи можно найти въ трудѣ Кантора, т. I.

обозначивъ числа, измѣряющія элементы a и x соотвѣтственно черезъ α и ξ, получимъ уравненіе $\xi^2 = \alpha(\alpha - \xi)$, или

$$\xi(\xi + \alpha) = \alpha^2.$$

Представивъ это уравненіе въ другомъ видѣ:

$$\left(\xi + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\left(\xi + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha^2$$

и примѣняя формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, мы найдемъ

$$\left(\xi + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\alpha^2,$$

слѣдовательно,

$$\xi + \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}\,\alpha}{2}\ ^{*)}.$$

Въ примѣрахъ этого отдѣла, мы отчасти пользовались такими понятіями и теоремами, которыя мы ближе разсмотримъ лишь впослѣдствіи, въ отдѣлахъ, посвященныхъ вопросамъ геометріи и механики.

---

*) Задачѣ этой, получившей впослѣдствіи названіе „золотого сѣченія," пиѳагорійцы приписывали мистическое значеніе. Сѣченіе это, какъ наиболѣе пріятное для глазъ отношеніе, часто примѣнялось въ греческомъ строительномъ искусствѣ. Эстетическая сторона золотого сѣченія подробно разработана въ трудѣ Лука Паціоло (Luca Paciuolo) (1509): „Divina proportio"; трудъ этотъ возникъ подъ вліяніемъ Леонардо-да-Винчи (Lionardo da Vinci) и при его сотрудничествѣ.

ГЛАВА VI.

Степени и логариѳмы.

§ 32. Корни.

1. Если p есть число натуральнаго ряда и a произвольное положительное число, то существуетъ одно и только одно положительное число x, которое удовлетворяетъ условію $x^p = a$.

Что не можетъ быть болѣе одного такого числа, слѣдуетъ изъ предложенія о степеняхъ, согласно которому съ возрастаніемъ числа x возрастаетъ также x^p. Поэтому, если x отлично отъ y, то невозможно, чтобы $x^p = y^p$.

Чтобы показать существованіе одного такого числа x, мы составимъ сѣченіе X/X', относя къ комплексу X всѣ числа, p-ая степень которыхъ меньше или равна a, а къ X' числа, которыхъ p-ая степень превосходитъ a. Тогда любое число содержится либо въ X, либо въ X'; если x есть число, опредѣляемое этимъ сѣченіемъ, то $x^p = a$.

Дѣйствительно, если бы было $x^p < a$, то по теоремѣ о непрерывности (§ 24, 5) въ X' должны были бы заключаться и такія числа, которыхъ p-ая степень меньше, чѣмъ a, что противорѣчитъ опредѣленію этого комплекса; въ силу такихъ же соображеній неравенство $x^p > a$ также невозможно [1]).

Опредѣленное такимъ образомъ число x называется корнемъ p-ой степени изъ числа a и обозначается еще такъ:

$$x = \sqrt[p]{a};$$

число p называется показателемъ корня или также показателемъ степени корня. Число a, которое и само можетъ быть ирраціональнымъ, называется подкореннымъ числомъ.

---

[1]) Согласно § 24, 5, если $x^p < a$, то существуютъ числа x', большія, нежели x, также удовлетворяющія тому же неравенству. Но такъ какъ число x опредѣляется нашимъ сѣченіемъ, то числа x' принадлежатъ комплексу X'; между тѣмъ, по условію, числа комплекса X' удовлетворяютъ неравенству $(x')^p > a$.

Случай $p = 1$ не представляетъ интереса, такъ какъ при этомъ $x = a$. Корень второй степени, встрѣчающійся чаще всего, называется также корнемъ квадратнымъ; при немъ показатель 2 часто опускается, такъ что $\sqrt{a}$ обозначаетъ то же, что $\sqrt[2]{a}$ (какъ въ § 21). Корень третьей степени называется корнемъ кубичнымъ. Числа вида $\sqrt[p]{a}$ называются также радикалами.

2. Для производства вычисленій надъ радикалами служатъ двѣ формулы:

$$\sqrt[p]{a}\ \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab},\ \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{a:b},$$

которыя выражаютъ слѣдующее:

Чтобы умножить или раздѣлить другъ на друга два радикала одинаковой степени p, соотвѣтственно умножаютъ или дѣлятъ подкоренныя числа и берутъ p-ый корень изъ произведенія или частнаго.

Это легко получается изъ перемѣстительнаго закона при умноженіи, по которому имѣемъ:

$$\left(\sqrt[p]{a}\ \sqrt[p]{b}\right)^p = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p \left(\sqrt[p]{b}\right)^p = ab.$$

Для сложенія и вычитанія нельзя указать такого же простого правила.

Слѣдующія теоремы выражаютъ соотношенія между величинами корней.

3. Если $a > b$, то $\sqrt[p]{a} > \sqrt[p]{b}$ или въ словахъ: Съ возрастаніемъ подкоренного числа возрастаетъ и корень.

Дѣйствительно, если бы было $\sqrt[p]{a} \leqslant \sqrt[p]{b}$, то мы имѣли бы $\left(\sqrt[p]{a}\right)^p \leqslant \left(\sqrt[p]{b}\right)^p$, т. е. $a \leqslant b$.

$\sqrt[p]{1}$ равенъ 1; слѣдовательно, если $a > 1$, то и $\sqrt[p]{a} > 1$.

4. Если $a > 1$ и $p > q$, то $\sqrt[p]{a} < \sqrt[q]{a}$, т. е.: если подкоренное число больше 1, то и корень больше 1, но съ возрастаніемъ показателя корень уменьшается.

5. Если $a < 1$ и $p > q$, то $1 > \sqrt[p]{a} > \sqrt[q]{a}$, т. е. если подкоренное число меньше 1, то и корень меньше 1, но съ возрастаніемъ показателя корень возрастаетъ.

Три послѣднія теоремы мы соединимъ въ одно болѣе общее предложеніе.

6. Если a обозначаетъ произвольное положительное число, а c_1 и c_2 суть какія-либо два числа, удовлетворяющія соотношенію

$$c_1 < 1 < c_2,$$

то всегда имѣютъ мѣсто неравенства

$$c_1 < \sqrt[p]{a} < c_2,$$

если p достаточно велико, т. е., если оно превосходитъ нѣкоторое опредѣленное число q, зависящее отъ a, c_1 и c_2.

Всѣ эти предложенія легко доказываются на основаніи § 18. Дѣйствительно, если число a больше 1, то вмѣстѣ съ тѣмъ, согласно п. 3-му, и $\sqrt[q]{a} > 1$; если, далѣе, $p > q$, то $\left(\sqrt[p]{a}\right)^p > \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$, т. е. $a > \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$ и, слѣдовательно, $\sqrt[q]{a} > \sqrt[p]{a}$; предложеніе п. 4-го такимъ образомъ доказано. Примѣнивъ эти разсужденія къ числу, обратному относительно a, получимъ предложеніе п. 5-го.

Такъ какъ c_1 меньше, а c_2 больше 1, то, каково бы ни было число a, согласно § 18, 8, для каждаго достаточно большого показателя p имѣемъ:

$$c_1^p < a < c_2^p;$$

отсюда по п. 3. слѣдуетъ предложеніе п. 6-го.

§ 33. Общая теорія степеней.

1. Въ § 18 установлено понятіе о степени съ цѣлымъ (положительнымъ или отрицательнымъ) показателемъ. Доказательство существованія корней даетъ намъ возможность установить также понятіе о степени съ дробнымъ и даже съ ирраціональнымъ показателемъ.

Изъ понятія о степени мы вывели формулу

$$(\alpha^m)^n = \alpha^{mn} \tag{1}$$

и, кромѣ того, положили

$$\alpha^{-m} = 1 : \alpha^m, \ \alpha^0 = 1, \tag{2}$$

гдѣ m и n могутъ имѣть положительныя или отрицательныя цѣлыя значенія, а α есть произвольное число, которое мы теперь обозначаемъ гре-

ческой буквой, чтобы указать, что оно можетъ имѣть и ирраціональное значеніе.

Теперь спрашивается, что нужно подразумѣвать подъ степенью α^{μ}, если μ есть дробное число, напримѣръ, $\mu = p/q$?

Если мы при этомъ желаемъ избѣжать большихъ осложненій, то мы сначала должны ограничиться допущеніемъ, что основаніе α есть положительное число. Формула (1) даетъ намъ тогда отвѣтъ на нашъ вопросъ. Дѣйствительно, положивъ въ ней $m = \mu = p/q$, $n = q$, получимъ изъ этой формулы

$$(\alpha^{\mu})^{q} = \alpha^{p}. \tag{3}$$

Слѣдовательно, [2])

$$\alpha^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^{p}; \tag{4}$$

и если мы желаемъ, чтобы формула (3) оставалась справедливой и для отрицательныхъ значеній μ, то, измѣнивъ p на $-p$, мы получимъ

$$\alpha^{\mu} = 1 : \alpha^{-\mu}. \tag{5}$$

Согласно этому опредѣленію, для всякаго показателя μ имѣемъ

$$1^{\mu} = 1. \tag{6}$$

Относительно обобщенныхъ степеней имѣютъ мѣсто слѣдующія предложенія.

2. Каковы бы ни были показатели μ и ν,

$$\alpha^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\alpha^{\nu} \tag{7}$$

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}. \tag{8}$$

Пусть

$$\mu = \frac{m}{p}, \quad \nu = \frac{n}{q};$$

если тогда p и q суть положительныя числа, то

$$(\alpha^{\mu+\nu})^{pq} = \alpha^{mq+np} = \alpha^{mq}\alpha^{np};$$

---

[2]) Авторъ пользуется здѣсь, по существу, тѣмъ же пріемомъ, къ которому онъ прибѣгалъ въ § 18 (см. примѣчаніе 3 на стр. 63). Формула (4) представляетъ собой, конечно, только опредѣленіе; но мы необходимо должны придти къ этому опредѣленію, если мы хотимъ ввести понятіе о дробныхъ степеняхъ такъ, чтобы соотношеніе (1) осталось въ силѣ.

извлекая корень pq-ой степени, получимъ:

$$\alpha^{\mu+\nu} = \sqrt[pq]{\alpha^{mq}\alpha^{np}} = \alpha^{\mu}\alpha^{\nu},$$

чѣмъ и доказывается соотношеніе (7).

Такъ же найдемъ

$$((\alpha^{\mu})^{\nu})^{q} = (\alpha^{\mu})^{n} = \alpha^{n\mu} = \sqrt[p]{\alpha^{mn}}$$

и

$$(\alpha^{\mu\nu})^{q} = (\alpha^{\mu})^{n} = \sqrt[p]{\alpha^{mn}};$$

извлекая корень q-ой степени, получаемъ отсюда соотношеніе (8).

3. Если $\alpha > 1$ и $\mu > \nu$, то

$$\alpha^{\mu} > \alpha^{\nu}. \tag{9}$$

Дѣйствительно,

$$(\alpha^{\mu})^{pq} = \alpha^{mq}, \ (\alpha^{\nu})^{pq} = \alpha^{np};$$

если $\mu > \nu$, то $mq > np$, слѣдовательно,

$$(\alpha^{\mu})^{pq} > (\alpha^{\nu})^{pq};$$

отсюда слѣдуетъ соотношеніе (9).

4. Если $\alpha > 1$, а c есть какое-нибудь число, удовлетворяющее условію $1 < c$, то можно подобрать достаточно малое число μ_0 такимъ образомъ, что для всякаго $\mu < \mu_0$ имѣетъ мѣсто неравенство:

$$1 < \alpha^{\mu} < c. \tag{10}$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть p будетъ такое число, чтобы $c^p > \alpha$ (§ 18,8), тогда $c > \alpha^{1/p} > \alpha^{\mu}$, если $\mu < \frac{1}{p}$. Такимъ образомъ, неравенство (10) удовлетворяется при всякомъ μ, если

$$0 < \mu < \frac{1}{p}.$$

Въ случаѣ, если $\alpha < 1$, имѣютъ мѣсто соотношенія, которыя получаются изъ (9) и (10) замѣной знака $<$ знакомъ $>$ и обратно.

5. Пусть, наконецъ, $\alpha > 1$ и a, a' обозначаютъ приближенно меньшее и приближенно большее значенія числа α; кромѣ того, пусть c_1 и c_2 будутъ два числа, удовлетворяющія неравенствамъ

$$c_1 < \alpha^{\mu} < c_2. \tag{11}$$

Если тогда разность $a' - a$ достаточно мала, то имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$c_1 < a^{\mu} < a'^{\mu} < c_2. \tag{12}$$

Дѣйствительно, чтобы убѣдиться въ этомъ, нужно лишь выбрать числа a и a' такъ, чтобы выполнялись слѣдующія неравенства:

$$c_1^{1''} < a < \alpha < a' < c_2^{1''}.$$

6. Теперь легко установить понятіе о степени съ ирраціональнымъ показателемъ. Пусть будетъ ξ ирраціональное число, опредѣляемое сѣченіемъ X/X', и x, x' обозначають числа комплексовъ X и X'. Пусть α будетъ положительное число, которое мы будемъ предполагать большимъ 1. Тогда для всѣхъ значеній x и x' имѣемъ $x < x'$; слѣдовательно,

$$\alpha^x < \alpha^{x'}. \qquad (13)$$

Изъ этого слѣдуетъ, что комплексъ чиселъ a^x имѣетъ верхнюю границу, комплексъ чиселъ $a^{x'}$—нижнюю границу, при чемъ обѣ эти границы не могутъ быть различны. Дѣйствительно, обозначимъ эту нижнюю границу черезъ β, верхнюю черезъ β'; тогда число β' не можетъ быть меньше, нежели β. Въ самомъ дѣлѣ, всегда можно указать такія числа x, x', чтобы a^x и $a^{x'}$ сколь угодно мало отличались соотвѣтственно отъ β и β' [3]); поэтому, если бы было $\beta > \beta'$, то можно было бы выбрать x, x' такъ, чтобы $a^x > a^{x'}$, что противорѣчитъ соотношенію (13). Невозможно также, чтобы $\beta < \beta'$; дѣйствительно, въ такомъ случаѣ β'/β было бы неправильной дробью, и мы имѣли бы

$$1 < \beta'/\beta < \alpha^{x'-x},$$

какъ бы мы ни выбирали чиселъ x' и x. Но, согласно предложенію пункта 4-го, это невозможно, такъ какъ разность $x'—x$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой [4]).

Итакъ, подъ символомъ

$$\beta = \alpha^\xi$$

мы будемъ понимать общую границу комплексовъ, составленныхъ изъ чиселъ a^x и $a^{x'}$; такимъ образомъ мы опредѣлили степень для всякаго ирраціональнаго показателя.

7. Исходя изъ этого опредѣленія, мы можемъ доказать теорему:

Пусть $\beta = \alpha^\xi$, а b пусть означаетъ число, которое получается изъ β замѣной чиселъ α и ξ ихъ приближенными значеніями a, a', x, x'; пусть, наконецъ, c_1, c_2 будутъ два какихъ-нибудь числа, удовлетворяющія условію

$$c_1 < \alpha^\xi < c_2;$$

[3]) По самому значенію верхней и нижней границы.

[4]) Согласно указанному предложенію $a^{x'-x}$ неопредѣленно приближается къ 1 съ уменьшеніемъ показателя $x'-x$, а потому не можетъ оставаться больше дроби β'/β.

тогда имѣютъ мѣсто неравенства

$$c_1 < b < c_2,$$

если разности $x' - x$ и $a' - a$ будутъ достаточно малы.

Прежде всего изъ понятія о верхней и нижней границѣ имѣемъ:

$$c_1 < \alpha^x < \alpha^\xi < \alpha^{x'} < c_2,$$

коль скоро разность $x' - x$ становится меньше нѣкотораго достаточно малаго числа. Но тогда, согласно предложенію пункта 5-го, можно выбрать разность $a' - a$ столь малой, чтобы имѣли мѣсто соотношенія:

$$c_1 < a^x < \alpha^x < \alpha^\xi < \alpha^{x'} < a'^{x'} < c_2,$$

что и требовалось доказать.

8. Сказанное позволяетъ расширить основную теорему о непрерывности (§ 24,5) въ томъ смыслѣ, что въ ряду дѣйствій, выражаемыхъ символомъ $F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, можетъ быть и возвышеніе въ степень положительнаго основанія съ ирраціональнымъ показателемъ; отсюда слѣдуетъ далѣе, что всѣ теоремы,изложенныя нами относительно основанія съ раціональными показателями, справедливы и въ случаѣ ирраціональныхъ показателей [5]).

§ 34. Логариѳмы.

1. Согласно тому, что мы доказали въ предыдущемъ параграфѣ, если a есть положительное и x какое угодно число, то положительное число y однозначно опредѣляется уравненіемъ

$$y = a^x.$$

Точно такъ же, если даны число x и положителное число y, то уравненіемъ

$$a = y^{1/x}$$

однозначно опредѣляется число a. Естественно возникаетъ вопросъ:

16. Если a и y суть данныя положительныя числа, какъ найти число x? Или, другими словами: въ какую степень нужно возвысить положительное число a, чтобы получить данное положительное число y?.

Это число x называется логариѳмомъ числа y при основаніи a и изображается такъ:

$$x = \overset{a}{\log} y.$$

[5]) Ибо теоремы въ § 24, 6 и 7 выведены изъ этой основной теоремы.

Такъ, число 2 есть логариѳмъ 4 при основаніи 2, логариѳмъ 64 при основаніи 2 есть 6, а 3 есть логариѳмъ 1000 при основаніи 10. Логариѳмъ единицы равенъ нулю при всякомъ основаніи, потому что $a^0 = 1$ при всякомъ a.

Такъ какъ и 1^x равно единицѣ при всякомъ x, то, при основаніи 1 имѣетъ логариѳмъ только число 1, и при томъ этимъ логариѳмомъ можетъ служить совершенно произвольное число. Поэтому основаніемъ 1 не пользуются для практическихъ цѣлей. Мы примемъ, что основаніе больше единицы, хотя это само по себѣ не является необходимостью. Такъ какъ при этомъ предположеніи для положительныхъ чиселъ x a^x всегда больше, а для отрицательныхъ чиселъ x—всегда меньше единицы, и такъ какъ, кромѣ того, $a^{-x} = 1/a^x$, то неправильныя дроби имѣютъ положительные, а правильныя—отрицательные логариѳмы, и два обратныя другъ другу числа y и $1/y$ имѣютъ логариѳмы, равные по абсолютной величинѣ, но различающіеся знаками.

2. Что при данныхъ числахъ y и a всегда существуетъ логариѳмъ, мы покажемъ снова съ помощью сѣченія. Соединимъ всѣ числа x, для которыхъ $a^x < y$, въ комплексъ X, а числа x', для которыхъ $a^{x'} > y$, въ комплексъ X'. Тогда любое число x' больше любого числа x, и мы имѣемъ сѣченіе X/X', которое опредѣляетъ нѣкоторое число ξ. Если бы число a^ξ было больше числа y, то можно было бы указать такое число x, для котораго $y < a^x < a^\xi$, что было бы несогласно съ опредѣленіемъ чиселъ x; точно также a^ξ не можетъ быть менѣе y; слѣдовательно,

$$a^\xi = y.$$

Итакъ, всякое положительное число y при всякомъ положительномъ основаніи, отличномъ отъ 1, имѣетъ одинъ и только одинъ логариѳмъ.

3. Основныя формулы для производства вычисленій съ логариѳмами получаются изъ соотвѣтствующихъ формулъ для степеней. Эти послѣднія мы представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}, \quad a^{x_1-x_2} = a^{x_1}/a^{x_2}, \quad a^{\mu x} = (a^x)^\mu,$$

гдѣ x, x_1, x_2, μ суть любыя положительныя или отрицательныя, раціональныя или ирраціональныя числа. Введемъ обозначенія:

$$a^x = y, \quad a^{x_1} = y_1, \quad a^{x_2} = y_2,$$

гдѣ y, y_1, y_2 суть произвольныя, но исключительно положительныя числа; въ такомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$x = \log y, \quad x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2,$$

гдѣ для простоты общее основаніе a не обозначено. Тогда получимъ:

$$x_1 + x_2 = \log(y_1 y_2),\ \ x_1 - x_2 = \log\frac{y_1}{y_2},\ \ \mu x = \log(y^\mu),$$

т. е. для любыхъ положительныхъ чиселъ y, y_1, y_2 и для любого положительнаго или отрицательнаго показателя μ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$\log y_1 + \log y_2 = \log(y_1 y_2)$$
$$\log y_1 - \log y_2 = \log\frac{y_1}{y_2}$$
$$\mu \log y = \log(y^\mu).$$

Словами эти формулы выражаются такъ:

Логариѳмъ произведенія равенъ суммѣ логариѳмовъ сомножителей.

Логариѳмъ частнаго равенъ разности между логариѳмомъ дѣлимаго и логариѳмомъ дѣлителя.

Логариѳмъ степени равенъ произведенію изъ логариѳма основанія степени на ея показателя.

4. Если a и b суть положительныя числа, то, по опредѣленію логариѳма, имѣемъ

$$a = b^{\overset{b}{\log} a};$$

слѣдовательно, если x есть произвольное, а y—положительное число,

$$a^x = b^{x \overset{b}{\log} a} = y,$$

то

$$x = \overset{a}{\log} y, \quad x \overset{b}{\log} a = \overset{b}{\log} y;$$

поэтому,

$$\overset{b}{\log} y = \overset{b}{\log} a \overset{a}{\log} y.$$

Посредствомъ этой формулы можно перейти отъ одного основанія a къ другому основанію b.

Если умножить логариѳмы всѣхъ положительныхъ чиселъ, взятыхъ при основаніи a, на одно и то же число $\overset{b}{\log} a$, то получатся логариѳмы тѣхъ же чиселъ, взятыхъ при основаніи b.

5. Если $y = a^x$, т. е. x есть логариѳмъ числа y, то y называется также числомъ (Numerus), соотвѣтствующимъ логариѳму x (при ос-

нованіи a), такъ что каждое изъ двухъ равенствъ

$$x = \overset{a}{\log} y,\ y = \overset{a}{\text{num}}\, x$$

представляетъ собой слѣдствіе другого. Основаніе a иногда не обозначается, если это не можетъ вести къ недоразумѣнію.

§ 35. Неперовы логариѳмы.

1. Благодаря необыкновенному облегченію, которое доставляютъ логариѳмы при практическихъ вычисленіяхъ, они играли огромную роль въ развитіи науки, особенно въ развитіи измѣрительныхъ отраслей естествознанія; въ этомъ отношеніи ихъ можно, пожалуй, сравнить съ десятичной системой счисленія.

Исторически, однако, ученіе о логариѳмахъ развилось не изъ систематическаго обобщенія понятія о возвышеніи въ степень и объ обращеніи этого дѣйствія, а изъ сравненія ариѳметической и геометрической прогрессіи; впрочемъ, принципіально это сводится къ тому же.

Ариѳметической прогрессіей называется послѣдовательный рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое послѣдующее число получается путемъ прибавленія къ предыдущему одного и того же числа, называемаго разностью ариѳметической прогрессіи. Геометрическая прогрессія есть рядъ чиселъ, каждый членъ котораго получается умноженіемъ предыдущаго на одного и того же множителя—знаменателя геометрической прогрессіи.

2. Разсмотримъ, напримѣръ, слѣдующую маленькую таблицу; первая строка содержитъ числа натуральнаго ряда, образующія ариѳметическую прогрессію. Соотвѣтствующія мѣста во второй строкѣ занимаютъ послѣдовательно возрастающія степени числа 2, образующія геометрическую прогрессію:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

; (1)

предъ нами таблица логариѳмовъ съ основаніемъ 2. Въ первой строкѣ находится логариѳмъ числа, стоящаго подъ нимъ. Таблицей можно пользоваться слѣдующимъ образомъ: напримѣръ, чтобы найти произведеніе 8.64, мы складываемъ логариѳмы чиселъ 8 и 64, т. е. 3 и 6; получимъ 9, которому соотвѣтствуетъ число (numerus) 512.

Эту таблицу можно продолжить и въ лѣвую сторону:

—4	—3	—2	—1	0	1
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

(2)

Если бы мы пожелали, напримѣръ, вычислить по этой таблицѣ произведеніе $\frac{1}{8} \cdot 512$, мы должны были бы найти число, котораго логариѳмъ есть $9 - 3 = 6$, и получили бы правильный результатъ.

Подобная таблица съ указаніями ея примѣненія дана впервые въ „Arithmetica integra" Михаила Штифеля (Michael Stifel около 1544 г.).

3. Таблица логариѳмовъ въ этомъ видѣ имѣетъ лишь ограниченное примѣненіе, такъ какъ изъ нея можно узнать логариѳмы лишь немногихъ чиселъ, которыя слѣдуютъ другъ за другомъ съ большими, постоянно возрастающими промежутками.

Неперъ (John Neper) и до него еще Бюрги (Joost Bürgi) старались устранить этотъ недостатокъ, уменьшая разность ариѳметической прогрессіи, и принимая вмѣстѣ съ тѣмъ знаменатель геометрической прогрессіи близкимъ къ 1. Этимъ можно достигнуть того, что въ извѣстныхъ предѣлахъ произвольно заданное число заключается какъ въ ариѳметической, такъ и въ геометрической прогрессіи; по крайней мѣрѣ, если въ таблицѣ нѣтъ самого числа, то въ ней имѣется близко подходящее къ нему приближенное значеніе *).

Пусть Δ обозначаетъ нѣкоторую малую величину; составимъ двѣ прогрессіи—одну ариѳметическую, другую геометрическую слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{l} 0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,\ 4\Delta,\ 5\Delta,\ \ldots, \\ 1,\ 1+\Delta,\ (1+\Delta)^2,\ (1+\Delta)^3,\ (1+\Delta)^4,\ (1+\Delta)^5,\ \ldots. \end{array} \qquad (3)$$

Каждое положительное число заключается между двумя сосѣдними членами первой строки, и содержится такимъ образомъ въ этой строкѣ съ погрѣшностью, не превышающей $\frac{1}{2}\Delta$; каждое число, большее единицы, расположено между двумя числами второй строки, напримѣръ, между $(1+\Delta)^n$

---

*) I. Бюрги (1552—1632 или 1633) родился въ Швейцаріи, былъ на службѣ у ландграфа Вильгельма IV въ Касселѣ, и позднѣе жилъ въ Прагѣ. Уже между 1603 и 1611 г.г. онъ вычислилъ подобную таблицу подъ названіемъ „Progress tabulen", но такъ какъ онъ держалъ ее въ тайнѣ, то и лишился пріоритета. Первый трудъ Непера появился въ 1614 г.; Неперъ первый употребляетъ терминъ „логариѳмы" („Descriptio mirifici logarithmorum canonis"). Для построенія подобныхъ таблицъ при тогдашнемъ состояніи науки требовались огромныя вычисленія.

и $(1+\Delta)^{n+1}$; максимумъ ошибки составляетъ здѣсь $\frac{1}{2}\Delta(1+\Delta)^n$, а потому возрастаетъ вмѣстѣ съ числомъ.

Чтобы перемножить два числа второй строки

$$a=(1+\Delta)^m \text{ и } b=(1+\Delta)^n,$$

складываютъ соотвѣтствующія числа первой строки

$$\alpha=m\Delta,\quad \beta=n\Delta$$

и отыскиваютъ во второй строкѣ число $ab=(1+\Delta)^{m+n}$, соотвѣтствующее суммѣ $\alpha+\beta=(m+n)\Delta$.

Вмѣсто возрастающей геометрической прогрессіи можно вычислить убывающую 1, $1-\Delta$, $(1-\Delta)^2$, $(1-\Delta)^3$, ... но при этомъ получаются лишь числа, меньшія единицы *).

4. Пусть

$$a=(1+\Delta)^m,\quad \alpha=m\Delta,$$

тогда

$$a=(1+\Delta)^{\frac{\alpha}{\Delta}}$$

и α есть логариѳмъ числа a при основаніи

$$E=(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}.$$

Такимъ образомъ таблица (3) есть таблица логариѳмовъ при основаніи E.

Неперъ положилъ въ основаніе своей таблицы число

$$\Delta=0{,}0000001$$

и получилъ поэтому

$$E=(1{,}0000001)^{10000000}.$$

По таблицѣ Непера логариѳмъ числа 2 при указанномъ основаніи оказывается равнымъ 0,693146922, а по новѣйшимъ таблицамъ такъ называемый натуральный логариѳмъ 2, т. е. логариѳмъ 2 при основаніи

$$e=2{,}71828182846\ldots$$

почти совпадаетъ съ вышеприведеннымъ; именно онъ равенъ 0,693147180.

*) Такъ, дѣйствительно, Неперъ и составилъ свою таблицу, которая сперва предназначалась для тригонометрическихъ величинъ, меньшихъ 1.

Такимъ образомъ основаніе неперовыхъ логариѳмовъ очень мало разнится отъ числа e.

§ 36. Бригговы логариѳмы.

1. Есть еще другой способъ пополнять два ряда соотвѣтствующихъ другъ другу членовъ ариѳметической и геометрической прогрессіи. Если имѣемъ при любомъ основаніи логариѳмы двухъ чиселъ

$$x_1 = \log y_1, \quad x_2 = \log y_2, \tag{1}$$

то изъ § 34 слѣдуетъ:

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \log \sqrt{y_1 y_2}; \tag{2}$$

число $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ называется среднимъ ариѳметическимъ обоихъ чиселъ x_1, x_2, а $\sqrt{y_1 y_2}$ — среднимъ геометрическимъ чиселъ (положительныхъ) y_1, y_2, такъ что содержаніе формулы (2) можетъ быть изложено такъ:

Среднее ариѳметическое логариѳмовъ двухъ чиселъ есть логариѳмъ средняго геометрическаго этихъ двухъ чиселъ.

Если $x_1 < x_2$, то и $y_1 < y_2$ и, кромѣ того,

$$x_1 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2$$

$$y_1 < \sqrt{y_1 y_2} < y_2.$$

Поэтому, если извѣстенъ рядъ логариѳмовъ, то простымъ извлеченіемъ квадратнаго корня можно вычислить логариѳмы сколькихъ угодно промежуточныхъ чиселъ и такимъ образомъ строить таблицу логариѳмовъ, постоянно сгущая интервалы между послѣдовательными числами. Таковъ, въ дѣйствительности, и былъ тотъ путь, которымъ были вычислены первыя таблицы логариѳмовъ. Возьмемъ, напримѣръ, таблицы (1) и (2) § 35; слѣдуя этому правилу, получимъ при основаніи 2:

$$0{,}5 = \log \sqrt{2} = \log 1{,}41421,$$

$$1{,}5 = \log \sqrt{8} = \log 2{,}82842,$$

$$0{,}25 = \log \sqrt[4]{2} = \log 1{,}18920.$$

Этимъ способомъ можно составить таблицу логариѳмовъ при любомъ основаніи. Генрихъ Бриггъ (Henry Briggs), современникъ и другъ

Непера первый понялъ, какія удобства представляетъ основаніе 10, и вычислилъ таблицу при этомъ основаніи; таблица эта была напечатана въ 1617—1624 гг. Поэтому логариѳмы эти называются **Бригговыми логариѳмами**. Преимущество этого основанія состоитъ въ слѣдующемъ:

Если какое-нибудь число, выраженное по десятичной системѣ счисленія, будь то цѣлое число или десятичная дробь, имѣетъ m цифръ (до запятой), то по своей величинѣ это число заключается между 10^{m-1} и 10^m, и, слѣдовательно, его Бригговъ логариѳмъ содержится между $m-1$ и m (включая нижній предѣлъ $m-1$.)

Легко поэтому указать **цѣлую** часть логариѳма, т. е. число, стоящее до запятой: для этого достаточно уменьшить на 1 число цифръ заданнаго числа, находящихся до запятой. Это число называется **характеристикой** логариѳма; обыкновенно оно въ таблицахъ вовсе не приводится. Слѣдующіе за запятой десятичные знаки называются **мантиссой** логариѳма. Въ таблицахъ дается лишь мантисса. Если въ таблицѣ ищутъ по данному логариѳму соотвѣтствующее число, то отыскиваютъ данную мантиссу и находятъ соотвѣтствующее ей число; въ этомъ числѣ нужно оставить передъ запятой столько цифръ, чтобы число ихъ превышало на 1 характеристику логариѳма. Числа, меньшія, чѣмъ 1, т. е. числа, въ которыхъ въ десятичной системѣ передъ запятой стоитъ нуль, имѣютъ отрицательные логариѳмы. Чтобы вычисленія приходилось дѣлать только съ положительными числами, мантиссу всегда берутъ положительной, и лишь характеристика можетъ быть отрицательной; а именно, правильную дробь, логариѳмъ которой нужно взять, умножаютъ предварительно на надлежащимъ образомъ выбранную степень десяти [6]), а изъ логариѳма полученнаго такимъ образомъ числа вычитываютъ показатель этой степени десяти. Напримѣръ:

$$\log \text{brigg. } 1/3 = -\log 3 = -0{,}4771212547,$$

$$0{,}5228787453 - 1,$$

$$\log \text{brigg. } 0{,}003657 = 0{,}5631249603 - 3\,.$$

Таблица Бригга появилась въ свѣтъ въ 1617—1624 гг. Въ нихъ даны были логариѳмы съ 14 десятичными знаками, но имѣлись большіе пробѣлы. Послѣдніе были устранены въ 10-значныхъ таблицахъ Адріана Влака (Adrian Vlack, 1628). Таблицы Влака даютъ десятизначные логариѳмы всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 100000.

На опытѣ было замѣчено, что въ большинствѣ случаевъ нѣтъ необходимости примѣнять десятизначныя таблицы, и поэтому наиболѣе рас-

[6]) Эту степень нужно выбрать, такъ чтобы по умноженіи получить неправильную дробь; такъ въ первомъ изъ двухъ приведенныхъ ниже примѣровъ $\frac{1}{3}$ достаточно помножить на 10, а во второмъ примѣрѣ 0,003657 слѣдуетъ помножить на 10^3.

пространенными таблицами являются семизначныя. Въ 1793 г. Вега (Vega) издалъ такія таблицы, которыя въ послѣдовавшей затѣмъ обработкѣ Гюльзе (Hülse) разошлись въ большомъ числѣ изданій. Послѣ нашли, что и семизначные логариѳмы слишкомъ громоздки для многихъ цѣлей, въ частности для цѣлей педагогическихъ (для упражненія въ примѣненіи логариѳмовъ) а также и въ примѣненіи къ естественнымъ наукамъ въ случаяхъ, не требующихъ особенно большой точности; изданы были шести, пяти и даже четырехзначныя таблицы. Изъ множества трудовъ этого рода, составители которыхъ стремятся обыкновенно облегчить употребленіе логариѳмовъ типографскими пріемами, отмѣтимъ здѣсь таблицы, принадлежащія авторамъ: Schrön, Bremiker, Wittstein, Greve, F. G. Gauss, Heyer, Schülke.

Наоборотъ, иногда не только въ естественныхъ наукахъ—въ астрономіи въ особенности,—но и при изслѣдованіяхъ въ области теоріи чиселъ, бываютъ случаи, когда и семизначныя таблицы оказываются недостаточно точными; поэтому математику необходимо пріобрѣсти навыкъ въ употребленіи болѣе точныхъ таблицъ. Среди послѣднихъ самой цѣнной и сравнительно наиболѣе доступной является „Thesaurus logarithmorum“ Вега; это сочиненіе, изданное въ 1794 г. въ Лейпцигѣ, содержитъ полную десятизначную таблицу бригговыхъ логариѳмовъ и, кромѣ того, замѣчательную таблицу Вольфрама (Wolfram), въ которой даны натуральные логариѳмы чиселъ до 10009 съ 48-ю десятичными знаками.

Каждое число можетъ быть представлено въ видѣ произведенія его первоначальныхъ множителей, и логариѳмъ его можетъ быть полученъ сложеніемъ логариѳмовъ простыхъ чиселъ; поэтому если предположить извѣстнымъ разложеніе чиселъ на ихъ первоначальныхъ множителей, то достаточно имѣть таблицу, содержащую лишь логариѳмы простыхъ чиселъ. Въ послѣдней части таблицы Вольфрама это упрощеніе, затрудняющее, конечно, нѣсколько пользованіе таблицей, нашло себѣ примѣненіе.

Въ виду рѣдкости и дороговизны Thesaurus'а, въ 1896 г. во Флоренціи появилось фотоцинкографическое воспроизведеніе его, болѣе доступное по цѣнѣ.

§ 37. Интерполяція.

1. Въ каждой распространенной логариѳмической таблицѣ во введеніи даются указанія, какъ ею пользоваться; упражненіе и опытъ научаютъ нѣкоторымъ мелкимъ упрощеніямъ. Здѣсь мы остановимся лишь на одномъ пунктѣ, имѣющемъ болѣе общее значеніе,—на такъ называемой интерполяціи.

Семизначныя таблицы, напримѣръ, даютъ непосредственно мантиссы, вычисленныя съ семью знаками, для всѣхъ чиселъ до 99999 включительно, т. е. для всѣхъ пятизначныхъ чиселъ.

Логариѳмъ семизначнаго числа можетъ быть найденъ непосредственно изъ таблицы лишь, когда обѣ послѣднія цифры суть нули. Но отъ семизначной таблицы мы вправѣ требовать, чтобы она давала намъ логариѳмы всѣхъ семизначныхъ чиселъ съ одинаковой точностью.

Такъ же точно и данный логариѳмъ, соотвѣтствующее которому число мы желаемъ опредѣлить, вообще говоря, не можетъ быть точно найденъ въ таблицѣ; между тѣмъ, бываетъ нужно найти точно семь цифръ этого числа.

Дѣлается это посредствомъ интерполяціи, основанной на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Пусть будетъ $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ рядъ чиселъ, составляющихъ ариѳметическую прогрессію съ разностью D:

$$x - x_1 = x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \ldots = D$$

и пусть будетъ

$$\begin{aligned} y &= \log x, \\ y_1 &= \log x_1, \quad y_1 - y = \Delta, \\ y_2 &= \log x_2, \quad y_2 - y_1 = \Delta_1, \\ y_3 &= \log x_3, \quad y_3 - y_2 = \Delta_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Разности $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ не равны другъ другу, но постепенно убываютъ, какъ это видно изъ таблицъ. Такъ какъ это убываніе происходитъ чрезвычайно медленно, то безъ замѣтной погрѣшности можно принять, что и числа y внутри достаточно малаго промежутка составляютъ ариѳметическую прогрессію; это предположеніе въ дѣйствительности не совсѣмъ справедливо, но при пользованіи нашей семизначной таблицей никогда не влечетъ сколь-нибудь замѣтной ошибки.

Положимъ, что нужно отыскать логариѳмъ $y + \beta$ нѣкотораго числа $x + \alpha$, лежащаго между x и x_1, такъ что α есть дробная часть числа D; согласно сдѣланному предположенію, β окажется такой же частью числа Δ, такъ что

$$\beta = \frac{\Delta}{D} \alpha \qquad (2)$$

Для облегченія вычисленія въ таблицахъ подъ заголовкомъ P. P.

(Partes proportionales, пропорціональныя части) даны разности Δ и произведенія:

$$\frac{\Delta}{10}, \frac{2\Delta}{10}, \ldots, \frac{9\Delta}{10}$$

съ той степенью точности, съ которой производятся вычисленія.

Изъ тѣхъ же таблицъ можно по данному числу β найти число α по формулѣ

$$\alpha = \frac{D}{\Delta}\beta.$$

Для этого нужно лишь выполнить небольшое дѣленіе, либо по сокращенному способу, либо съ помощью вспомогательныхъ таблицъ P. P.

Такъ какъ разности Δ наиболѣе велики у меньшихъ чиселъ (ниже 10000), то въ этихъ частяхъ таблицы интерполяція даетъ наименѣе точные результаты; поэтому нѣкоторыя таблицы продолжены за предѣлы пятизначныхъ чиселъ и эти дополнительные логариѳмы даются съ 8 десятичными знаками. У Вега таблицы продолжены до 107999.

2. Въ десятичныхъ таблицахъ „Thesaurus" даны непосредственно логариѳмы всѣхъ пятизначныхъ чиселъ. Интерполяція и здѣсь выполняется согласно тѣмъ же основнымъ положеніямъ. Но чтобы использовать эту таблицу вполнѣ, не всегда бываетъ достаточно принять, что промежуточные логариѳмы образуютъ ариѳметическую прогрессію.

Тогда принимаютъ, что разности Δ, Δ_1, $\Delta_2, \ldots$ не одинаковы, но составляютъ ариѳметическую прогрессію и для логариѳмовъ y получается такимъ образомъ ариѳметическая прогрессія второго порядка [7]).

Если мы пожелаемъ воспользоваться этимъ предположеніемъ, чтобы отыскать по таблицѣ логариѳмъ $y+\beta$ нѣкотораго числа $x+\alpha$, заключающійся между двумя послѣдовательными логариѳмами таблицы y и y_1, то нужно положить

$$\beta = m\alpha + m'\alpha(D-\alpha)$$

и опредѣлить числа m и m' такимъ образомъ, чтобы для x_1 и x_2, т. е. при $\alpha = D$ и $\alpha = 2D$ изъ этой формулы получались правильныя значе-

[7]) Подъ ариѳметической прогрессіей второго порядка разумѣютъ рядъ чиселъ, послѣдовательныя разности которыхъ, образуютъ обыкновенную ариѳметическую прогрессію. Таковъ, напримѣръ, рядъ чиселъ 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22....

[8]) Достаточное обоснованіе этого требуетъ пространныхъ разсужденій, которыя относятся къ „теоріи конечныхъ разностей", дисциплинѣ, въ которой исчер-

нія $y_1 = y + \Delta$ и $y_2 = y + \Delta + \Delta_1$ [8]). Отсюда слѣдуетъ:

$$m = \frac{\Delta}{D}$$

$$\Delta + \Delta_1 = 2mD - 2m'D^2$$

$$2m'D^2 = \Delta - \Delta_1 = \Delta';$$

такимъ образомъ наращеніе β дается формулой

$$\beta = \frac{\Delta}{D}\alpha + \frac{\alpha(D-\alpha)\Delta'}{2D^2}. \qquad (3)$$

Число $\Delta - \Delta_1 = \Delta'$ называется второй разностью. Вліяніе послѣдней сказывается на послѣдней цифрѣ логариѳма, иногда даже на предпослѣдней, но не дальше.

Если примемъ, что y есть десятизначное, а x пятизначное цѣлое число (безъ десятичныхъ дробей), то нужно положить $D = 1$ и $\alpha = 0{,}abcde$, гдѣ буквы a, b, c, d, e обозначаютъ соотвѣтственно цифры, занимающія 6ое, 7ое, 8ое, 9ое и 10ое мѣста въ данномъ числѣ $x + \alpha$. Такъ какъ Δ' есть число, очень малое въ сравненіи съ разностью Δ, то во второмъ членѣ правой части формулы (3) достаточно взять число α лишь съ двумя цифрами [9]).

Если N есть число, логариѳмъ котораго отыскивается, а n есть число, изображаемое пятью первыми цифрами числа N, то изъ таблицы находимъ точно $\log n$ съ десятью знаками, а изъ формулы (3) получается:

$$\log N = \log n + 0{,}abcde\,\Delta + \frac{1}{2}\,0{,}ab(1 - 0{,}ab)\,\Delta'. \qquad (4)$$

Въ этой формулѣ число N надо понимать такъ, что пять цифръ числа n стоятъ впереди запятой. Въ зависимости отъ дѣйствительнаго положенія запятой, каждый разъ выбирается соотвѣтственная характеристика.

Если число N изображается болѣе, чѣмъ десятью цифрами, то одиннадцатая изъ нихъ можетъ быть принята во вниманіе при выполненіи умноженія во второмъ членѣ.

Ищемъ, напримѣръ, десятизначный бригговъ логариѳмъ числа e

$$e = 2{,}71828182846.$$

пывающимъ образомъ изслѣдуется вопросъ объ интерполяціи. Мы должны сказать, что въ томъ сжатомъ видѣ, въ какомъ эта теорія здѣсь изложена, въ ней, конечно, трудно вполнѣ разобраться; но развитіе ея выходитъ за предѣлы настоящаго сочиненія.

[9]) Если, напримѣръ, намъ нужно отыскать логариѳмъ числа 32,89716534, то мы принимаемъ за x цѣлое число 32897, за α число 0,16534, за y логариѳмъ числа x изъ таблицы, а β опредѣляется формулой (3); перенесеніе же запятой вліяетъ только на характеристику. Это авторъ и выражаетъ въ общемъ видѣ формулой (4).

Въ таблицѣ находимъ десятизначные логариѳмы слѣдующихъ пяти послѣдовательныхъ чиселъ:

		Δ	Δ'
log 27182 =	4342814081		
3 =	2973851	159770	
4 =	3133615	764	6
5 =	3293373	758	6
6 =	3453126	753	5

Нужно получить сокращеннымъ способомъ произведенія:

$$0{,}8182846 \times 159770$$

и

$$\frac{1}{2} 0{,}82 \times 0{,}18 \times 6 .$$

Получается:

```
4342814081
    127816
      1597 . 7
      1278 . 16
        31 . 95
        12 . 78
              64
               9
              45
0,4342944818 . 77 ;
```

въ результатѣ первыя десять цифръ точны. Вторая разность даетъ здѣсь только приблизительно половину единицы послѣдняго десятичнаго разряда; она принимается во вниманіе лишь при особенно точныхъ вычисленіяхъ. Вторыя разности возрастаютъ съ уменьшеніемъ чиселъ, логариѳмы которыхъ отыскиваются.

Для упрощенія умноженій въ таблицѣ помѣщаются еще вспомогательныя таблички; ихъ устройство и примѣненіе излагается во введеніи къ таблицамъ.

Рѣшеніе обратной задачи—по данному логариѳму найти соотвѣтствующее число—производится по формулѣ (2), если принимаютъ въ разсчетъ лишь первую разность. Для того, чтобы принять во вниманіе и вторую разность, нужно было бы вывести формулу, аналогичную формулѣ (3); но это требуетъ обширныхъ предварительныхъ вычисленій при самомъ составленіи таблицъ.

Вообще говоря, чѣмъ больше промежутки между числами, логариѳмы которыхъ даны въ таблицѣ непосредственно, тѣмъ важнѣе принять

во вниманіе вторую разность. Напримѣръ, можно построить вполнѣ удовлетворительную четырехзначную таблицу логариѳмовъ, помѣщающуюся на половинѣ страницы, выписавши логариѳмы всѣхъ двухзначныхъ чиселъ. Съ помощью этой таблицы можно дѣлать вычисленія съ точностью до четвертаго десятичнаго знака, но при этомъ часто необходимо бываетъ принять въ разсчетъ вторую разность.

§ 38. Примѣры.

Дадимъ теперь нѣкоторые примѣры логариѳмическихъ вычисленій, при которыхъ для полученія искомаго результата необходимо пользоваться болѣе точными таблицами. Пусть

$$e = 2{,}71828182846 \qquad (1)$$

основаніе натуральныхъ логариѳмовъ,

$$\pi = 3{,}14159265359 \qquad (2)$$

Лудольфово (Ludolf) число. Съ точностью до десятаго знака находимъ:

$$\log(\pi \log e) = 0{,}1349341840\ ^{*}). \qquad (3)$$

Изъ нѣкоторыхъ теоретическихъ соображеній, которыя не могутъ быть здѣсь приведены **), слѣдуетъ, что число

$$z = e^{\pi\sqrt{19}} \qquad (4)$$

отличается отъ ближайшаго большаго цѣлаго числа меньше, чѣмъ на $\frac{1}{4}$. Какое это цѣлое число?

Изъ формулы (4) имѣемъ:

$$\log\log z = \log\sqrt{19} + \log(\pi \log e).$$

Пользуясь десятичной таблицей, найдемъ

$$\log\sqrt{19} = 0{,}6393768005\,,$$

а въ виду соотношенія (3)

$$\log\log z = 0{,}7743109845.$$

*) Необходимыя для вычисленія этого числа данныя находятся на послѣдней страницѣ соч. Vega „Sammlung mathematischer Tafeln“, изд. Hülsse (Berlin 1865).

**) H. Weber, „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen“, стр. 247, 355, 405. Braunschweig 1891.

Разыскавъ два раза подъ рядъ соотвѣтствующее число, мы получимъ:

$$\log z = 5{,}94717865$$

$$z = 885479{,}8.$$

Такимъ образомъ искомое число

$$A = 885480.$$

Доказательствомъ правильности результата (обоснованіе его не можетъ быть здѣсь приведено) служитъ то обстоятельство, что $A - 744$ должно оказаться полнымъ кубомъ; и въ самомъ дѣлѣ оказывается

$$A - 744 = 884736 = 96^3.$$

Есть еще нѣкоторыя другія числа, обладающія подобными свойствами, а именно:

$$z = e^{\pi\sqrt{13}}, \quad e^{\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\pi\sqrt{163}}.$$

Ихъ значенія отличаются отъ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ цѣлыхъ чиселъ A еще менѣе, чѣмъ въ предыдущемъ примѣрѣ, такъ что, напримѣръ, третье изъ нихъ имѣетъ послѣ запятой 12 девятокъ. Для перваго изъ этихъ трехъ чиселъ точное вычисленіе посредствомъ Thesaurus'а даетъ

$$A = 884736744.$$

Другія два числа выходятъ далеко за предѣлы Thesaurus'а. Ихъ можно однако, вычислить, пользуясь тѣмъ обстоятельствомъ, что и числа

$$z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{43}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{67}}, \quad e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{163}},$$

очень мало, хотя и не въ такой степени, какъ z, отличаются отъ нѣкоторыхъ цѣлыхъ чиселъ B и, кромѣ того,

$$A = B^3 + 744.$$

Такимъ образомъ получимъ, напримѣръ,

$$e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{13}} = 960{,}000042$$

или $B = 960$, а въ двухъ другихъ случаяхъ

$$B = 5280, \quad B = 640320.$$

Примѣры эти иллюстрируютъ нѣкоторыя, глубоко сокрытыя ариѳметическія свойства, присущія числамъ 19, 43, 67, 163, и никакимъ другимъ.

ГЛАВА VII.

Уравненія первой степени.

§ 39. Уравненія первой степени съ однимъ и двумя неизвѣстными.

Въ § 17 мы показали, что необходимость ввести дробныя числа была вызвана рѣшеніемъ слѣдующей задачи:

1. Даны числа a и b; найти число x, удовлетворяющее условію

$$ax = b. \qquad (1)$$

Мы видѣли, что, если a и b суть произвольныя цѣлыя или дробныя числа и, кромѣ того, $a \neq 0$, то существуетъ одно и только одно число, удовлетворяющее поставленному требованію. Если же $a = 0$, и $b \neq 0$, то нѣтъ ни одного числа, которое выполняло бы условіе (1). Наконецъ, когда $a = 0$, $b = 0$, то всякое число x удовлетворяетъ условію (1).

Послѣ того, какъ мы ввели дробныя и ирраціональныя числа, числа a и b могутъ имѣть дробныя и ирраціональныя значенія.

Въ сборникахъ для упражненій находится множество задачъ, въ которыхъ требуется выразить посредствомъ такого рода равенства вопросъ изъ обыденной жизни или изъ какой-нибудь отрасли науки. Въ унаслѣдованной нами отъ древнихъ грековъ антологіи находится множество прекрасныхъ задачъ этого рода, изложенныхъ въ формѣ эпиграммъ *).

Равенство (1) называется уравненіемъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; нахожденіе же неизвѣстнаго числа x называется рѣшеніемъ уравненія.

Не всегда, однако, условія, при помощи которыхъ должны быть найдены неизвѣстныя, бываютъ столь просты, какъ въ приведенномъ при-

*) Ариѳметическія эпиграммы греческой антологіи собраны и изданы съ рѣшеніями въ нѣмецкомъ переводѣ Циркелемъ (Zirkel) въ программной работѣ гимназіи въ Боннѣ за 1853 г.

мѣрѣ: иногда, например, неизвѣстныхъ чиселъ бываетъ нѣсколько, и условія, которымъ они должны удовлетворять, выражены посредствомъ нѣсколькихъ уравненій. Мы сперва займемся слѣдующей болѣе общей задачей.

2. Даны числа a, b, c, a', b', c'. Найти неизвѣстныя числа x, y, удовлетворяющія двумъ уравненіямъ:

$$\begin{array}{l|cc} ax + by = c & b' & -a' \\ a'x + b'y = c' & -b & a \end{array} \qquad (2)$$

(Два уравненія съ двумя неизвѣстными).

Для рѣшенія этой задачи можно поступить слѣдующимъ образомъ. Умножаемъ всѣ члены обоихъ уравненій на написанныхъ сбоку множителей: одинъ разъ соотвѣтственно на b', $-b$, другой разъ соотвѣтственно на $-a'$, a; каждый разъ складываемъ полученные результаты и тогда найдемъ:

$$\begin{aligned} (ab' - ba')\,x &= cb' - bc' \\ (ab' - ba')\,y &= -ca' + ac', \end{aligned} \qquad (3)$$

т. е. два уравненія, каждое съ однимъ неизвѣстнымъ. Въ обоихъ уравненіяхъ неизвѣстныя x и y имѣютъ одинъ и тотъ же коэффиціентъ

$$\Delta = ab' - ba'. \qquad (4)$$

Этотъ коэффиціентъ называется *детерминантомъ* системы уравненій (2) и иногда изображается еще такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

3. *Если детерминантъ не равенъ нулю, то есть одна и только одна пара чиселъ x, y, удовлетворяющихъ уравненіямъ* (2):

$$x = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad y = \frac{-ca' + ac'}{\Delta}. \qquad (6)$$

Въ изложенномъ способѣ рѣшенія уравненій (2) мы *исключали* изъ обоихъ уравненій попеременно каждое изъ неизвѣстныхъ, и потому этотъ способъ называется *способомъ исключенія*. Можно рѣшать уравненія еще иначе, такъ называемымъ *способомъ подстановки*, отличающимся большей постепенностью.

Если о коэффиціентахъ a, b, a', b' извѣстно, что одинъ изъ нихъ не равенъ нулю, то мы можемъ, не нарушая общности, считать отличнымъ отъ нуля любой изъ четырехъ коэффиціентовъ, напримѣръ b': мы можемъ, вѣдь, написать на второмъ мѣстѣ любое изъ двухъ уравненій, а затѣмъ обозначить черезъ y любое изъ двухъ неизвѣстныхъ.

Итакъ пусть b' не равно нулю Если бы число x было извѣстно, то посредствомъ второго изъ уравненій (2) мы нашли бы значеніе неизвѣстного y:

$$y = \frac{c' - a'x}{b'}. \tag{7}$$

Если подставить это значеніе неизвѣстнаго y въ первое изъ уравненій (2), то посредствомъ простыхъ вычисленій получимъ:

$$\Delta x = cb' - bc'. \tag{8}$$

Если число Δ отлично отъ нуля, то значеніе неизвѣстнаго x окажется такое же, какъ и выше (6). Затѣмъ изъ уравненія (7) получается выраженіе для неизвѣстнаго y, которое также совпадаетъ съ формулой (6).

И при этомъ способѣ рѣшенія ясно, что въ случаѣ, когда $\Delta = 0$, $cb' - bc' \neq 0$, нѣтъ ни одного значенія для неизвѣстнаго x, которое удовлетворяло бы условію (8); слѣдовательно, уравненія (2) въ этомъ случаѣ не имѣютъ рѣшенія. Если же и $\Delta = 0$ и $cb' - bc' = 0$, то въ уравненіи (8) значеніе неизвѣстнаго x ничѣмъ не опредѣляется; въ этомъ случаѣ для x можно взять произвольное значеніе, а соотвѣтствующее значеніе для неизвѣстнаго y получится изъ уравненія (7): любая пара чиселъ, полученная такимъ образомъ, удовлетворяетъ уравненіямъ (2).

Наконецъ, когда всѣ коэффиціенты a, b, a', b', суть нули, то уравненія (2) имѣютъ смыслъ лишь при условіи, что и числа c и c' суть нули. Но тогда уравненія удовлетворяются произвольными значеніями неизвѣстныхъ x и y. Соединяя все сказанное, приходимъ къ слѣдующему выводу:

4. Если детеминантъ уравненій (2) равенъ нулю, то послѣднія либо противорѣчатъ другъ другу и не имѣютъ ни одного рѣшенія, либо же одно изъ двухъ уравненій представляетъ собой слѣдствіе другого, и въ этомъ случаѣ уравненія имѣютъ безчисленное множество рѣшеній.

§ 40. Уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными.

1. Займемся вопросомъ объ уравненіяхъ первой степени въ нѣсколько болѣе общемъ видѣ. Разсмотримъ систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстным x, y, z:

$$\begin{array}{l|ll} ax + by + cz = e, & & \\ a'x + b'y + c'z = e', & c'' & -b'' \\ a''x + b''y + c''z = e'', & -c' & b' \end{array} \tag{1}$$

двѣнадцать коэффиціентовъ a, b, c, e, ... суть данныя числа.

Если всѣ девять коэффиціентовъ a, b, ... c'' равны нулю, то имѣетъ мѣсто одно изъ двухъ: либо коэффиціенты e, e', e'' не всѣ равны нулю, и тогда уравненія заключаютъ въ себѣ противорѣчіе, либо же $e = e' = e'' = 0$, и тогда уравненія не даютъ никакихъ условій для опредѣленія неизвѣстныхъ x, y, z.

Будемъ разсматривать каждую пару изъ трехъ уравненій (1), какъ систему двухъ уравненій первой степени попеременно относительно каждой изъ трехъ паръ неизвѣстныхъ: y и z, z и x, x и y. Тогда изъ девяти коэфиціентовъ

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \qquad (2)$$

мы составимъ для девяти указанныхъ системъ уравненій девять детерминантовъ:

$$\begin{aligned} \alpha &= b'c'' - c'b'', & \beta &= c'a'' - a'c'', & \gamma &= a'b'' - b'a'', \\ \alpha' &= b''c - c''b, & \beta' &= c''a - a''c, & \gamma' &= a''b - b''a, \\ \alpha'' &= bc' - cb', & \beta'' &= ca' - ac', & \gamma'' &= ab' - ba'. \end{aligned} \qquad (3)$$

Если всѣ коэффиціенты (2) равны нулю, то и всѣ детерминанты (3) суть нули. Разсмотримъ случай, когда всѣ детерминанты (3) равны нулю, но коэффиціенты (2) не всѣ суть нули; легко видѣть, что въ этомъ случаѣ либо уравненія (1) другъ другу противорѣчатъ, либо два изъ нихъ представляютъ собой слѣдствія третьяго. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что коэффиціентъ c'' отличенъ отъ нуля; тогда послѣднее изъ уравненій (1) дастъ намъ:

$$z = \frac{e'' - a''x - b''y}{c''}; \qquad (4)$$

подставивъ это значеніе неизвѣстнаго z въ первыя два уравненія системы (1) и пользуясь обозначеніями (3), получимъ:

$$\begin{aligned} \beta'x - \alpha'y &= ec'' - ce'' \\ -\beta x + \alpha y &= e'c'' - c'e'', \end{aligned} \qquad (5)$$

Слѣдовательно, если $\alpha = \beta = \alpha' = \beta' = 0$, но правыя части уравненій (5) не равны нулю, то наши уравненія оказываются невозможными; если же и $ec'' - ce'' = 0$, $e'c'' - c'e'' = 0$, то уравненія (5) удовлетворяется при произвольныхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ x и y; значеніе неизвѣстнаго z, соотвѣтствующее каждой системѣ значеній x и y, получится подстановкой изъ уравненія (4).

2. Разсмотримъ теперь случай, когда не всѣ детерминанты (3) равны нулю; постановка вопроса останется не менѣе общей, чѣмъ до сихъ поръ, если примемъ, что отличный отъ нуля детерминантъ есть $\alpha = b'c'' - c'b''$. Тогда, считая величину x извѣстной, опредѣлимъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) неизвѣстныя y и z; по формуламъ § 39, 3 получимъ:

$$\begin{aligned} \alpha y &= \quad e'c'' - e''c' + \beta x \\ \alpha z &= -e'b'' + e''b' + \gamma x. \end{aligned} \tag{6}$$

Полученныя отсюда значенія неизвѣстныхъ y и z подставимъ въ первое изъ уравненій (1). Получимъ:

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha''$$

Снова вводимъ обозначеніе

$$\Delta = a\alpha + b\beta + c\gamma, \tag{7}$$

или, принимая во вниманіе формулы (3),

$$\begin{aligned} \Delta = ab'c'' &- ac'b'' \\ + bc'a'' &- ba'c'' \\ + ca'b'' &- cb'a''. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда

$$\Delta x = e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha''. \tag{9}$$

Отсюда вполнѣ опредѣляется величина неизвѣстнаго x, если только детерминантъ Δ отличенъ отъ нуля; значенія неизвѣстныхъ y и z получатся тогда съ помощью формулъ (6).

Если же $\Delta = 0$, то уравненіе (9) возможно лишь при условіи

$$e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'' = 0; \tag{10}$$

но въ этомъ случаѣ уравненіе (9) ничѣмъ не ограничиваетъ значенія неизвѣстнаго x; величина x можетъ быть взята произвольно; значенія неизвѣстныхъ y и z найдутся изъ уравненій (6).

Величина Δ и здѣсь называется детерминантомъ системы (1), и часто обозначается еще такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Разсматривая формулу (8), находимъ, что величина Δ останется безъ измѣненія, если замѣнить соотвѣтственно коэффиціенты b на a', c на a'' и c' на b'', такъ что можно писать и такъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \\ c, & c', & c'' \end{vmatrix}$$

Девять величинъ: $\alpha = b'c'' - c'b''$, . . . опредѣляемыя равенствами (3), называются **минорами** детерминанта Δ.

3. Изложенное въ двухъ предыдущихъ пунктахъ сводится къ слѣдующему.

Если детерминантъ системы (1) отличенъ отъ нуля, то неизвѣстныя x, y, z опредѣляются ею однозначно. Если же $\Delta = 0$, то уравненія (1) либо противорѣчатъ другъ другу, либо одно, или два, или всѣ три неизвѣстныя остаются произвольными; число неизвѣстныхъ, получающихъ произвольныя значенія, зависитъ отъ того, будетъ ли одна изъ величинъ (3) отлична отъ нуля,— или же всѣ онѣ равны нулю, но одинъ изъ коэффиціентовъ (2) отличенъ отъ нуля,—или, наконецъ, всѣ коэффиціенты (2) обращаются въ нуль.

4. Детерминантъ Δ выражается любой изъ шести слѣдующихъ формулъ:

$$\begin{aligned} \Delta = a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' &= a\alpha + b\beta + c\gamma \\ = b\beta + b'\beta' + b''\beta'' &= a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' \qquad (12) \\ = c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma'' &= a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma''. \end{aligned}$$

Эти шесть формулъ получаются изъ выраженія (8), если въ послѣднемъ соединить въ группы члены, имѣющіе множителемъ соотвѣтственно a, a' и a'', либо b, b' и b'', либо c, c' и c'', либо a, b, c и т. д., и принять во вниманіе обозначенія (3).

Далѣе имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned} b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' &= 0, \\ c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' &= 0, \\ c\beta + c'\beta' + c''\beta'' &= 0, \\ a\beta + a'\beta' + a''\beta'' &= 0, \qquad (13) \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' &= 0, \\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

Непосредственнымъ вычисленіемъ обнаружимъ справедливость перваго изъ равенствъ (13). Получимъ тождество:

$$b(b'c''-c'b'')+b'(b''c-c''b)+b''(bc'-cb')=0.$$

Чтобы убѣдиться въ справедливости прочихъ равенствъ (13), достаточно въ написанномъ тождествѣ всевозможными способами замѣщать другъ другомъ буквы a, b, c.

Съ помощью соотношеній (12) и (13) систему (1) можно рѣшить непосредственно способомъ исключенія. Для этого умножаемъ уравненія (1) три раза соотвѣтственно на множителей, указанныхъ ниже, и складываемъ каждый разъ почленно полученные результаты:

$$\begin{array}{llll} ax+by+cz=e & \alpha & \beta & \gamma \\ a'x+b'y+c'z=e' & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a''x+b''y+c''z=e'' & \alpha'' & \beta'' & \gamma''. \end{array}$$

Пользуясь соотношеніями (12) и (13), найдемъ:

$$\begin{aligned} \Delta x &= e\alpha+e'\alpha'+e''\alpha'', \\ \Delta y &= e\beta+e'\beta'+e''\beta'', \\ \Delta z &= e\gamma+e'\gamma'+e''\gamma''. \end{aligned} \qquad (14)$$

Первое изъ этихъ равенствъ совпадаетъ съ полученнымъ раньше равенствомъ (9). Два другія равенства совпадаютъ съ тѣми, которыя получатся изъ формулъ (6), если подставимъ вмѣсто x его значеніе изъ равенства (9); въ этомъ легко убѣдиться вычисленіемъ, котораго нѣтъ надобности здѣсь приводить.

Если нѣкоторыя величины имѣютъ въ какомъ-либо заданіи аналогичныя значенія и при рѣшеніи съ каждой изъ этихъ величинъ приходится поступать одинаково, то такой способъ рѣшенія называется **симметричнымъ**; такимъ образомъ изложенный выше способъ исключенія можетъ быть названъ **симметричнымъ**, чего нельзя сказать о способѣ подстановки.

5. Изложенная выше теорія уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными x, y, z, допускаетъ геометрическое толкованіе (мы предполагаемъ извѣстными основныя свѣдѣнія изъ аналитической геометріи трехъ измѣреній въ томъ размѣрѣ, какъ они изложены во второмъ томѣ настоящаго сочиненія). Любыя три числа x, y, z могутъ быть разсматриваемы, какъ координаты нѣкоторой точки въ пространствѣ. Всѣ точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію первой степени

$$ax+by+cz=e$$

лежатъ въ одной плоскости, если только не всѣ коэффиціенты a, b, c

равны нулю. Точки, координаты которыхъ удовлетворяютъ, какъ предыдущему уравненію, такъ еще и другому

$$a'x + b'y + c'z = e',$$

лежатъ въ обѣихъ плоскостяхъ и образуютъ поэтому прямую, по которой обѣ плоскости пересѣкаются. Если дано еще третье уравненіе

$$a''x + b''y + c''z = e'',$$

то всѣ три уравненія удовлетворяются координатами точки, въ которой пересѣкаются три плоскости, или, вѣрнѣе, координатами всѣхъ точекъ, одновременно лежащихъ на этихъ трехъ плоскостяхъ.

Если детерминантъ Δ отличенъ отъ нуля, то три плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ.

Если же $\Delta = 0$, но миноры (3) не всѣ равны нулю, тогда имѣетъ мѣсто одно изъ двухъ: либо равенство (10) справедливо, и, слѣдовательно, одна изъ трехъ величинъ x, y, z остается произвольной, либо же равенство (10) не справедливо. Въ первомъ случаѣ три плоскости пересѣкаются по прямой; во второмъ случаѣ нѣтъ ни одной точки, которая принадлежала бы всѣмъ тремъ плоскостямъ; плоскости пересѣкаются попарно по тремъ параллельнымъ прямымъ подобно боковымъ гранямъ трехугольной призмы, или же двѣ плоскости параллельны другъ другу и пересѣкаются съ третьей по параллельнымъ прямымъ.

Если, наконецъ, всѣ миноры (3) обращаются въ нуль, то лѣвыя части уравненій (1) отличаются другъ отъ друга лишь нѣкоторымъ постояннымъ множителемъ, и наши три плоскости либо параллельны, либо совпадаютъ: въ первомъ случаѣ онѣ не имѣютъ ни одной общей точки, во второмъ случаѣ—безчисленное множество ихъ.

§ 41. Однородныя уравненія.

1. Однородныя уравненія составляютъ особый классъ уравненій первой степени. Сюда относятся такія уравненія, каждый членъ которыхъ содержитъ которое-нибудь изъ неизвѣстныхъ. Таковы, напримѣръ, уравненія вида

$$ax + by + cz = 0.$$

Очевидно, что подобныя уравненія удовлетворяются, если положить $x = y = z = 0$. Такое рѣшеніе называется несобственнымъ. Если же, по крайней мѣрѣ, одно неизвѣстное отлично отъ нуля, то рѣшеніе называется собственнымъ. Тогда всѣ члены уравненія можно раздѣлить

на неизвѣстное, отличное отъ нуля, за каковое примемъ, напримѣръ, z, и получится уравненіе, содержащее лишь отношенія x/z, y/z.

Итакъ, однородныя уравненія выражаютъ условія, связывающія не самыя неизвѣстныя, но лишь отношенія неизвѣстныхъ къ одному изъ нихъ.

Разсмотримъ сначала систему двухъ однородныхъ уравненій:

$$\begin{array}{ll} a'x + b'y + c'z = 0, & \mid \quad b'' \; -a'' \\ a''x + b''y + c''z = 0 & \mid -b' \quad a' \end{array}$$

Способомъ, указаннымъ въ § 39, мы можемъ опредѣлить отсюда отношенія x/z, y/z; для этого умножаемъ всѣ члены уравненій на множителей, написанныхъ сбоку, и полученные результаты складываемъ. Тогда найдемъ:

$$(a'b'' - b'a'')x + (c'b'' - b'c'')z = 0,$$
$$(a'b'' - b'a'')y + (a'c'' - c'a'')z = 0,$$

или, пользуясь обозначеніями § 40,(3),

$$\gamma x - \alpha z = 0, \quad \gamma y - \beta z = 0.$$

Если исключить случай, когда $\alpha = \beta = \gamma = 0$, найдемъ:

$$\frac{x}{z} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta};$$

эти уравненія можно представить и въ слѣдующемъ видѣ:

$$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma.$$

2. Разсмотримъ теперь систему трехъ однородныхъ уравненій:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \qquad (1) \\ a''x + b''y + c''z &= 0. \end{aligned}$$

Опредѣливъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій отношенія $x:z$ и $y:z$, подставляемъ ихъ въ первое уравненіе. Тогда найдемъ:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Delta = 0.$$

Если же $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то детерминантъ Δ во всякомъ случаѣ равенъ нулю [1]).

[1]) Эта оговорка необходима потому, что при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ отношенія двухъ неизвѣстныхъ къ третьему изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) опредѣлены быть не могутъ (§ 40, 4).

Итакъ, система трехъ однородныхъ уравненій съ тремя неизвѣстными лишь въ томъ случаѣ имѣетъ собственное рѣшеніе, когда детерминантъ Δ обращается въ нуль.

Если $\Delta = 0$, а миноры α, β, γ не всѣ равны нулю, то мы получимъ рѣшеніе, указанное въ пунктѣ 1.

Если же $\alpha = \beta = \gamma = 0$, то изъ двухъ послѣднихъ уравненій (1) одно есть слѣдствіе другого; отношенія двухъ неизвѣстныхъ къ третьему опредѣляются тогда при помощи первыхъ двухъ уравненій (1).

3. Въ аналитической геометріи однородное уравненіе первой степени выражаетъ плоскость, проходящую черезъ начало координатъ. Двѣ такія плоскости всегда имѣютъ общую прямую, которая также проходитъ черезъ начало координатъ.

Уравненіе $\Delta = 0$ представляетъ собой условіе, которому должны удовлетворять коэффиціенты уравненій (1), если выражаемыя ими 3 плоскости пересѣкаются всѣ по одной прямой.

4. Изъ вышеизложенныхъ разсужденій ясно, какимъ образомъ можно обобщить задачу о рѣшеніи линейныхъ уравненій. Если дана система уравненій первой степени съ произвольнымъ числомъ неизвѣстныхъ $x, y, z, \ldots$, то посредствомъ одного изъ уравненій, въ которомъ коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ при x, не равенъ нулю, выражаютъ неизвѣстное x при помощи прочихъ неизвѣстныхъ. Подставивъ это выраженіе неизвѣстнаго x во всѣ прочія уравненія данной системы, получимъ новую систему, въ которой число неизвѣстныхъ по крайней мѣрѣ на единицу меньше, такъ какъ неизвѣстное x въ нее не входитъ.

Продолжая тотъ же процессъ, мы исключаемъ изъ уравненій всѣ неизвѣстныя, пока таковыя остаются. Но послѣ этого мы можемъ получить равенства, содержащія лишь извѣстныя величины; равенства эти либо выполняются, либо не выполняются. Въ послѣднемъ случаѣ система не имѣетъ рѣшеній. Если же равенства выполняются, то неизвѣстныя иногда могутъ быть всѣ вполнѣ опредѣлены, иногда же нѣкоторыя остаются произвольными. Съ увеличеніемъ числа неизвѣстныхъ и уравненій вычисленія усложняются, и вмѣстѣ съ тѣмъ становится труднѣе усмотрѣть общіе законы, которые здѣсь имѣютъ мѣсто. Къ счастью, Якоби (Jacobi) своей теоріей детерминантовъ создалъ алгориѳмъ, при помощи котораго общія свойства линейныхъ уравненій получаютъ чрезвычайно изящное выраженіе. Теорія эта, однако, выходитъ за предѣлы настоящаго сочиненія *).

*) Jacobi, „De formatione et proprietatibus determinantium". Crelle's „Journal für Mathematik", Bd. 22 (1841). Baltzer, „Theorie und Anwendung der Determinanten". 4 изд. Leipzig 1875.

На русскомъ языкѣ наиболѣе обстоятельнымъ сочиненіемъ по теоріи детерминантовъ является сочиненіе проф. Ващенко-Захарченко, „Теорія опредѣлителей

§ 42. Приложенія.

Линейныя уравненія весьма часто примѣняются въ геометріи и естественныхъ наукахъ. Разсмотримъ сперва простой примѣръ изъ химіи, такъ называемый косвенный анализъ. Обозначимъ черезъ A, B и P три химическихъ элемента и черезъ AP и BP два химическихъ соединенія, въ которыхъ на каждый атомъ одного элемента приходится одинъ атомъ другого. Дана смѣсь соединеній AP и BP, при чемъ извѣстны:

1) общій вѣсъ g смѣси,

2) вѣсъ q всего входящаго въ смѣсь вещества P.

Требуется найти содержащіяся въ смѣси вѣсовыя количества соединеній AP и BP.

Обозначивъ искомыя количества соотвѣтственно черезъ x и y, имѣемъ одно уравненіе

$$x + y = g. \qquad (1)$$

Второе уравненіе можно составить, основываясь на законахъ теоретической химіи. Если черезъ a, b и p обозначимъ соотвѣтственно атомные вѣса элементовъ A, B и P, то молекулярный вѣсъ соединенія AP выразится числомъ $a + p$, число же молекулъ въ x вѣсовыхъ единицахъ этого соединенія есть $x:(a + p)$. Вѣсъ всѣхъ атомовъ элемента P, содержащихся въ соединеніи AP, есть $\frac{px}{a+p}$, а въ соединеніи BP вѣсовое количество того же элемента выразится черезъ $\frac{py}{b+p}$. Такъ какъ число q обозначаетъ вѣсъ всего находящагося въ смѣси вещества P, то можемъ составить второе уравненіе:

$$\frac{x}{a+p} + \frac{y}{b+p} = \frac{q}{p}. \qquad (2)$$

Изъ уравненій (1) и (2) можно опредѣлить числа x и y (за исключеніемъ того случая, когда $a = b$)

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a+p}{p} \cdot \frac{gp - q(b+p)}{a-b} \\ y &= \frac{b+p}{p} \cdot \frac{q(a+p) - gp}{a-b}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Изложенная задача имѣетъ для химика важное практическое значеніе: часто случается, что не составляетъ большой трудности выдѣлить изъ смѣси элементъ P и количественно его опредѣлить, тогда какъ от-

и теорія формъ".— Кіевъ, 1877. Кромѣ того, Проф. Ярошенко. „Теорія опредѣлителей". Одесса. 1871.

дѣленіе элементовъ A и B другъ отъ друга сопряжено съ несравненно большими затрудненіями.

2. Примѣры. Имѣемъ, напримѣръ, три грамма смѣси хлористаго калія и хлористаго натрія и найдено, что вѣсъ хлора, содержащагося въ смѣси, есть 1,7 грамма; числа a, b, p обозначаютъ соотвѣтственно атомные вѣса калія, натрія и хлора:

$$a = 39{,}1, \qquad b = 23, \qquad p = 35{,}4$$
$$a - b = 16{,}1, \quad a + p = 74{,}5, \quad b + p = 58{,}4,$$
$$g = 3, \qquad q = 1{,}7.$$

Находимъ приближенно:

$$x = \frac{74{,}5 \,.\, (3 \,.\, 35{,}4 - 1{,}7 \,.\, 58{,}4)}{35{,}4 \,.\, 16{,}1} = \frac{74{,}5 \,.\, 6{,}9}{35{,}4 \,.\, 16{,}1} = 0{,}9;$$

$$y = \frac{58{,}4 \,.\, (1{,}7 \,.\, 74{,}5 - 3 \,.\, 35{,}4)}{35{,}4 \,.\, 16{,}1} = \frac{58{,}4 \,.\, 20{,}4}{35{,}4 \,.\, 16{,}1} = 2{,}1.$$

Иногда, вмѣсто атомовъ, могутъ быть даны атомныя группы. Напримѣръ, имѣемъ два грамма смѣси углекислаго кальція (CaC_3O) и углекислаго стронція ($SrCO_3$), а углекислоты (CO_2) во всей смѣси находится 0,7 грамма. Обозначимъ вѣса атомныхъ группъ CO_2, CaO и SrO соотвѣтственно черезъ p, b и a. Тогда

$$a = 103{,}6 \qquad a - b = 47{,}6$$
$$b = 56 \qquad a + p = 147{,}6$$
$$p = 44 \qquad b + p = 100$$
$$g = 2, \quad q = 0{,}7.$$

Изъ формулъ (3) получимъ приближенно:

$$x = 1{,}3,$$
$$y = 0{,}7.$$

3. Изложенный пріемъ непримѣнимъ въ томъ случаѣ, когда число веществъ, составляющихъ данную смѣсь, болѣе двухъ. Въ этомъ можно убѣдиться слѣдующимъ образомъ. Въ смѣси соединеній AP, BP и CP замѣнимъ элементъ P другимъ элементомъ P', и получимъ смѣсь изъ соединеній AP', BP' и CP'. Обозначимъ вѣсовыя количества обѣихъ смѣсей соотвѣтственно черезъ g и g', атомные вѣса элементовъ—черезъ a, b, c, p, p'; вѣса вещества P въ первой смѣси и P' во второй обозначимъ черезъ q и q'. Числа x, y, z означаюгъ вѣсовыя количества веществъ A, B и C, нахо-

дящіяся въ каждой смѣси. Имѣемъ 4 уравненія:

$$\frac{a+p}{a}x+\frac{b+p}{b}y+\frac{c+p}{c}z=g$$

$$\frac{a+p'}{a}x+\frac{b+p'}{b}y+\frac{c+p'}{c}z=g'$$

$$\frac{p}{a}x\quad+\quad\frac{p}{b}y\quad+\quad\frac{p}{c}z\;=q$$

$$\frac{p'}{a}x\quad+\quad\frac{p'}{b}y\quad+\quad\frac{p'}{c}z\;=q'.$$

Изъ этихъ четырехъ уравненій невозможно выбрать трехъ такихъ, которыя были бы независимы другъ отъ друга. Изъ двухъ послѣднихъ уравненій слѣдуетъ, что $\frac{q}{p}=\frac{q'}{p'}$, такъ что эти два уравненія сводятся къ одному лишь слѣдующему:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{q}{p};$$

изъ двухъ же первыхъ уравненій при помощи послѣдняго получаемъ:

$$x+y+z=g-q=g'-q'.$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ всего лишь два независимыхъ уравненія; для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ этого недостаточно.

4. Покажемъ теперь, какъ примѣняются линейныя уравненія для изслѣдованія вопроса о развѣтвленіи электрическаго тока въ системѣ проволокъ. Мы предполагаемъ извѣстными понятія о силѣ тока и сопротивленіи цѣпи; замѣтимъ лишь, что сопротивленіе отрѣзка проволоки можно измѣрять его длиной, если на всемъ протяженіи разсматриваемой системы проволока сдѣлана изъ одного и того же матеріала и имѣетъ одну и ту же толщину.

Силу тока можно разсматривать, какъ количество электричества, протекающее за единицу времени черезъ поперечное сѣченіе цѣпи. Если въ какой нибудь части цѣпи мы выберемъ одно направленіе за положительное, то сила тока въ зависимости отъ его направленія выражается положительнымъ или огрицательнымъ числомъ.

Рѣшимъ слѣдующую задачу. Дана сѣть проволокъ; въ нее входитъ въ опредѣленномъ мѣстѣ токъ данной силы, который развѣтвляется по проволокамъ и выходитъ изъ сѣти въ другой вполнѣ опредѣленной точкѣ. Спрашивается, какова сила тока въ каждой части сѣти?

Кирхгофъ установилъ два закона, которые даютъ возможность рѣ-

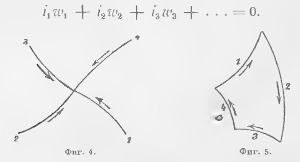
шить нашу задачу посредствомъ линейныхъ уравненій. Законы эти слѣдующіе.

1. Если въ какой либо точкѣ сѣти (такъ называемой узловой точкѣ) пересѣкаются нѣсколько проволокъ, въ которыхъ сила тока равна соотвѣтственно i_1, i_2, i_3, . . . (силу тока будемъ выражать положительнымъ числомъ, если токъ направленъ въ проволокѣ къ узловой точкѣ), то имѣетъ мѣсто равенство:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \ldots = 0.$$

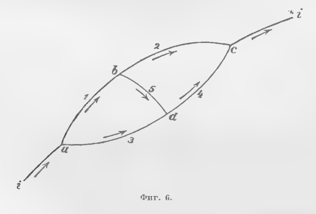
2. Для каждой замкнутой группы проволокъ 1, 2, 3, . . . , сопротивленія которыхъ обозначены черезъ w_1, w_2, w_3, . . . , имѣетъ мѣсто равенство:

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 + i_3 w_3 + \ldots = 0.$$



Фиг. 4. Фиг. 5.

3. Изложенными законами воспользуемся для разсмотрѣнія такъ называемаго Уитстонова мостика, который употребляется для измѣренія сопротивленій. Существенную часть этого мостика составляетъ система проволокъ, схематически изображенная на фигурѣ 6.



Фиг. 6.

Буквами a, b, c и d обозначены узловыя точки. Черезъ точку a въ систему вводится токъ силы i, и такой же силы токъ выходитъ черезъ точку c. Въ огрѣзкахъ проволоки, отмѣченныхъ цифрами 1, 2, 3, 4, 5,

сила тока равна соотвѣтственно i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, а сопротивленіе есть w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, при чемъ въ каждомъ отрѣзкѣ проволоки положительное направленіе тока указано стрѣлкой.

Согласно съ первымъ закономъ, мы имѣемъ для четырехъ узловыхъ точекъ слѣдующія четыре уравненія:

$$\begin{aligned} i = i_1 + i_3 = i_2 + i_4, \\ i_5 = i_1 - i_2 = i_4 - i_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Система эта сводится лишь къ тремъ независимымъ уравненіямъ, такъ какъ изъ перваго ряда равенствъ слѣдуетъ, что

$$i_1 - i_2 - i_4 - i_3.$$

Разсматривая контуры abd, bcd и $abcd$, мы въ силу второго закона можемъ составить соотвѣтственно слѣдующія три уравненія:

$$\begin{aligned} i_5 w_5 = i_3 w_3 - i_1 w_1 \\ i_5 w_5 = i_2 w_2 - i_4 w_4 . \end{aligned} \tag{5}$$

Третье уравненіе $i_1 w_1 + i_2 w_2 = i_3 w_3 + i_4 w_4$ представляетъ собою лишь слѣдствіе первыхъ двухъ.

Изъ уравненій (4) получимъ:

$$i_4 = i - i_2, \quad i_3 = i - i_1, \quad i_5 = i_1 - i_2.$$

Подставивъ эти значенія величинъ i_4, i_3 и i_5 въ уравненія (5), найдемъ:

$$\begin{aligned} i_1(w_1 + w_3 + w_5) - i_2 w_5 = i w_3, \\ - i_1 w_5 + i_2(w_2 + w_4 + w_5) = i w_4; \end{aligned}$$

отсюда можно опредѣлить величины i_1 и i_2.

Чаще всего одна изъ узловыхъ точекъ, напримѣръ d, устанавливается такимъ образомъ, чтобы сила тока $i_5 = 0$. Этотъ результатъ достигается весьма точно. Вслѣдствіе перемѣщенія узловой точки d сопротивленія w_3 и w_4 мѣняютъ свою величину. Такъ какъ $i_5 = 0$, то изъ уравненій (4) получимъ равенства: $i_1 = i_2$ и $i_3 = i_4$. При помощи послѣднихъ двухъ равенствъ и уравненій (5) найдемъ соотвѣтствующее этому случаю соотношеніе:

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4 .$$

Эта формула примѣняется для вычисленія одной изъ величинъ w_1, w_2, w_3 и w_4 посредствомъ трехъ другихъ*).

*) Kirchhoff, Poggendorff's Annalen, Bd. 72 (1847);
W. Ahrens, Mathematische Annalen, Bd. 49.

ГЛАВА VIII.

Квадратныя уравненія и мнимыя числа.

§ 43. Квадратныя уравненія.

1. Въ седьмой главѣ мы разсмотрѣли лишь такія уравненія, въ которыя неизвѣстныя входятъ только въ первой степени, а произведенія неизвѣстныхъ вовсе не входятъ. Поэтому мы и назвали эти уравненія уравненіями первой степени. Вслѣдствіе тѣхъ примѣненій, которыя эти уравненія находятъ въ геометріи, ихъ называютъ еще линейными уравненіями.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію такихъ уравненій, которыя содержатъ неизвѣстныя не только въ первой степени, но и во второй. Сперва мы займемся уравненіями этого типа, содержащими лишь одно неизвѣстное; они называются уравненіями второй степени, а также квадратными уравненіями. Покажемъ, какъ рѣшаются такія уравненія.

2. Квадратное уравненіе имѣетъ слѣдующую форму:

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Коэффиціенты a, b и c представляютъ собою данныя числа, а x есть неизвѣстное число, для котораго нужно найти значеніе, удовлетворяющее уравненію (1). Такое значеніе неизвѣстнаго x называется корнемъ уравненія. Не будемъ пока касаться вопроса, имѣетъ ли данное уравненіе корни вообще и сколько оно имѣетъ корней.

Коэффиціентъ a будемъ считать отличнымъ отъ нуля, потому что въ противномъ случаѣ уравненіе (1) имѣло бы видъ $bx + c = 0$, т. е. представляло бы собою линейное уравненіе, котораго мы здѣсь уже не будемъ болѣе разсматривать. Умноживъ всѣ члены уравненія (1) на произвольный множитель g, мы получимъ новое уравненіе $gax^2 + gbx + gc = 0$, которое удовлетворяется тѣми же значеніями неизвѣстнаго x, что и уравненіе (1). Выбравъ $g = \frac{1}{a}$, мы упростили бы уравненіе, такъ какъ коэффиціентъ при неизвѣстномъ x^2 сдѣлается равнымъ единицѣ. Цѣлесооб-

разнѣе, однако, выбрать для множителя g другое значеніе, именно $g = 4a$. Мы получимъ тогда уравненіе:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0;$$

въ силу же тождества $(2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$, мы можемъ представить его въ видѣ:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0.$$

Для сокращенія вводимъ обозначеніе

$$b^2 - 4ac = D, \tag{2}$$

и наше уравненіе приметъ слѣдующій видъ:

$$(2ax + b)^2 = D.$$

Извлекая изъ обѣихъ частей уравненія квадратный корень, мы сведемъ наше квадратное уравненіе къ линейному

$$2ax + b = \sqrt{D}.$$

Такъ какъ квадраты двухъ чиселъ, имѣющихъ одну и ту же абсолютную величину, но различные знаки, равны другъ другу, то мы получимъ еще слѣдующее уравненіе:

$$2ax + b = -\sqrt{D}.$$

Оба уравненія ничѣмъ не отличаются другъ отъ друга, если $D = 0$. Такъ какъ до сихъ поръ мы не знаемъ такихъ чиселъ, квадраты которыхъ суть отрицательныя числа, то мы будемъ различать три случая.

1) D есть число отрицательное; уравненіе не имѣетъ ни одного корня.

2) $D = 0$; уравненіе имѣетъ одинъ корень $x = -b/2a$.

3) D есть положительное число; уравненіе имѣетъ два корня:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \\ x_2 &= -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} \end{aligned} \tag{3}$$

Такимъ образомъ отъ значенія числа D зависитъ, будетъ ли квадратное уравненіе имѣть одинъ корень, или два, или ни одного корня. Замѣнимъ въ формулѣ (2) числа a, b и c соотвѣтственно числами ga, gb и gc, гдѣ g есть произвольное число, отличное отъ нуля; вмѣсто числа D мы теперь будемъ имѣть число g^2D съ такимъ же знакомъ, что и число D;

вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ мѣсто тотъ же случай 1, 2 или 3. Такимъ образомъ квадратное уравненіе не опредѣляетъ числа D, оставляя при немъ множителя, представляющаго собой квадратъ неопредѣленнаго числа; но выраженіе $ax^2 + bx + c$ вполнѣ опредѣляетъ число D[1]).

Мы будемъ называть число D дискриминантомъ выраженія $ax^2 + bx + c$.

Введемъ новыя обозначенія коэффиціентовъ квадратнаго уравненія (1) и представимъ его въ слѣдующей формѣ:

$$x^2 + 2ax + b = 0\,. \qquad (4)$$

Для этого уравненія число $D = 4(a^2 - b)$; если $D > 0$, уравненіе имѣетъ два корня:

$$x_1 = -a - \sqrt{a^2 - b}$$

$$x_2 = -a + \sqrt{a^2 - b}.$$

§ 44. Мнимыя числа.

1. Для того, чтобы не было квадратнаго уравненія, не имѣющаго корней, приходится снова расширить понятіе о числѣ. Мы вводимъ такъ называемыя мнимыя числа. Введеніе этихъ чиселъ въ науку оказалось весьма плодотворнымъ; благодаря имъ почти всѣ отрасли математики выигрываютъ въ полнотѣ и законченности. Что касается дальнѣйшаго расширенія понятія о числѣ, то въ немъ въ настоящее время не чувствуется настоятельной потребности.

2. Всѣ разсмотрѣнныя нами до сихъ поръ числа, положительныя и отрицательныя, раціональныя и ирраціональныя, мы будемъ называть вещественными числами. Мы будемъ соединять вещественныя числа въ пары; каждую такую пару, составленную изъ вещественныхъ чиселъ a и b, мы будемъ обозначать символомъ (a, b). Эти числовые символы мы будемъ называть мнимыми или комплексными числами. Основная мысль здѣсь та же, которой мы руководились выше, когда мы посредствомъ цѣлыхъ чиселъ устанавливали понятіе о дробяхъ; но правила дѣйствій надъ новыми числами, которыя мы теперь вводимъ, совершенно иныя. Въ установленіи этихъ

[1]) Въ трехчленѣ $ax^2 + bx + c$ коэффиціенты имѣютъ вполнѣ опредѣленныя значенія, которыми опредѣляется дискриминантъ $b^2 - 4ac$. Въ уравненіи же

$$ax^2 + bx + c = 0$$

коэффиціенты a, b и c могутъ быть замѣнены пропорціональными имъ числами ga, gb, gc, отчего дискриминантъ, какъ указано въ текстѣ, пріобрѣтаетъ множителя g^2.

правилъ мы ничѣмъ не стѣснены; къ этому мы и перейдемъ.

1) Два комплексныхъ числа $\alpha = (a, b)$ и $\alpha' = (a', b')$ мы будемъ считать **равными** въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $a = a'$, и $b = b'$ *).

2) Чтобы имѣть возможность представить вещественное число, какъ частный случай комплекснаго, мы примемъ, что $(a, 0) = a$ [2]). Отсюда слѣдуетъ, что $(0, 0) = 0$.

3) **Сложеніе и вычитаніе** опредѣляются слѣдующимъ образомъ:

$$(a, b) \pm (a', b') = (a \pm a', b \pm b'). \qquad (1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что **сочетательный** и **перемѣстительный** законы сложенія остаются справедливыми и для комплексныхъ чиселъ, что вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію, что при $b = b' = 0$ сложеніе и вычитаніе комплексныхъ чиселъ приводятся соотвѣтственно къ тѣмъ же дѣйствіямъ надъ вещественными числами [3]).

*) Для комплексныхъ чиселъ не принято устанавливать понятія „больше" и „меньше". Лишь въ очень рѣдкихъ случаяхъ приходится пользоваться этими понятіями; ихъ можно тогда опредѣлять различнымъ образомъ. Можно, напримѣръ, условиться считать, что число (a, b) больше числа (a', b'), если $a > a'$ или если $a = a'$ и $b > b'$.

[2]) Это значитъ подъ символомъ $(a, 0)$ мы будемъ разумѣть то же, что и подъ символомъ a.

[3]) Остановимся нѣсколько подробнѣе на вопросѣ о введеніи мнимыхъ чиселъ Въ § 27,2 дроби были опредѣлены, какъ символы вида $\frac{m}{n}$; были установлены условія равенства и неравенства ихъ и правила дѣйствій надъ ними; было обнаружено, что дѣйствія эти подчинены тѣмъ же формальнымъ законамъ, что и дѣйствія надъ *цѣлыми числами*.

Этого же пути авторъ, слѣдуя Гамильтону, придерживается и здѣсь. Вводятся новые символы (a, b), гдѣ a и b суть вещественныя числа. Такимъ образомъ, получается комплексъ новыхъ символовъ, которые мы называемъ комплексными числами. Мы устанавливаемъ условія равенства и неравенства этихъ чиселъ и правила дѣйствій надъ ними, именно: подъ суммой двухъ мнимыхъ чиселъ (a, b) и (a', b') мы уславливаемся разумѣть число $(a + a', b + b')$. Тогда ясно, что законы сочетательный и перемѣстительный остаются въ силѣ, дѣйствительно:

$$[(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = ((a + a') + a'', (b + b') + b'')$$

$$(a, b) + [(a', b') + (a'', b'')] = (a + (a' + a''), b + (b' + b''))$$

И такъ какъ

$$(a + a') + a'' = a + (a' + a''), \quad (b + b') + b'' = b + (b' + b''),$$

то

$$[(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a, b) + [(a', b') + (a'', b'')].$$

Аналогичнымъ образомъ устанавливаются остальныя дѣйствія надъ комплексными числами и доказывается, что они слѣдуютъ тѣмъ же формальнымъ законамъ что и вещественныя числа.

4) Умноженіе опредѣляется равенствомъ

$$(a,\ b)(a',\ b') = (aa' - bb',\ ab' + ba'). \qquad (2)$$

При $b = 0$ и $b' = 0$ дѣйствіе это сведется къ умноженію вещественныхъ чиселъ. Законы сочетательный и перемѣстительный остаются въ силѣ.

Возвышеніе въ степень съ цѣлымъ и положительнымъ показателемъ выполняется посредствомъ умноженія, повтореннаго соотвѣтственное число разъ.

5) Дѣленіе разсматривается, какъ дѣйствіе, обратное умноженію.

Даны два комплексныхъ числа $(a,\ b)$ и $(a',\ b')$; требуется найти третье число $(x,\ y)$, удовлетворяющее равенству:

$$(a,\ b)(x,\ y) = (a',\ b'). \qquad (3)$$

Если такое число существуетъ, то оно представитъ собою частное $(a',\ b')/(a,\ b)$.

Изъ равенствъ (2) и (3) и опредѣленія 1) имѣемъ:

$$\begin{aligned} ax - by &= a' \\ bx + ay &= b'. \end{aligned} \qquad (4)$$

Для нахожденія чиселъ x и y нужно рѣшить два уравненія первой степени по правиламъ, даннымъ въ § 39.

Детерминантъ Δ этой системы равенъ суммѣ $a^2 + b^2$; онъ обращается въ нуль лишь въ томъ случаѣ, когда числа a и b одновременно равны нулю, т. е. когда число $(a,\ b)$ есть нуль. Поэтому мы исключимъ случай, когда дѣлитель равенъ нулю, подобно тому, какъ мы это сдѣлали при дѣленіи вещественныхъ чиселъ.

Изъ уравненій (4) получаемъ:

$$x = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-a'b + ab'}{a^2 + b^2}. \qquad (5)$$

Такимъ образомъ дѣленіе однозначно опредѣляется слѣдующей формулой:

$$\frac{(a',b')}{(a,b)} = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2},\ \frac{-a'b + ab'}{a^2 + b^2}\right).$$

Дѣленіе вещественныхъ чиселъ содержится здѣсь, какъ частный случай.

Установленныя такимъ образомъ опредѣленія четырехъ дѣйствій надъ комплексными числами вполнѣ согласованы съ понятіями о соотвѣтствующихъ дѣйствіяхъ надъ вещественными числами; мало того, теоремы, выведенныя нами, какъ слѣдствія изъ опредѣленій, относящихся къ

вещественнымъ числамъ, остаются справедливыми и для комплексныхъ чиселъ.

3. Исходя изъ основныхъ опредѣленій, можно получить для комплексныхъ чиселъ весьма простыя обозначенія.

Согласно опредѣленіямъ 3), 2) и 4), имѣемъ:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b), \tag{7}$$

или

$$(a, b) = a + b\,(0, 1). \tag{8}$$

Такимъ образомъ любое комплексное число можетъ быть представлено посредствомъ вещественныхъ множителей и одного лишь мнимаго числа (0,1). Для сокращенія вводятъ обозначенія

$$(0, 1) = i, \quad (-1)\,i = -i. \tag{9}$$

Число i называется мнимой единицей.

Изъ равенства (8) получимъ:

$$(a, b) = a + bi. \tag{10}$$

Благодаря этому, мы можемъ оставить обозначеніе (a, b), которымъ мы временно пользовались; число a называется вещественной частью, bi или ib—мнимой частью комплекснаго числа $a + bi$. Мнимая часть называется положительной или отрицательной въ зависимости отъ того, будетъ ли число b положительное или отрицательное. Мнимое число, вещественная часть котораго равна нулю, т. е. число bi, называется чисто мнимымъ. Числа $a + bi$ и $a - bi$, въ которыхъ вещественныя части одинаковы, а мнимыя отличаются лишь знаками, называются сопряженными мнимыми числами.

Подставивъ въ формулу (2) $a = a' = 0$, $b = b' = +1$ или -1, получимъ:

$$i^2 = -1, \quad (-i)^2 = -1\,. \tag{11}$$

Поэтому число i называется еще корнемъ квадратнымъ изъ -1, т. е.

$$i = \sqrt{-1}\,. \tag{12}$$

Такимъ образомъ въ области мнимыхъ чиселъ существуютъ и такія числа, квадраты которыхъ представляютъ собой отрицательныя числа; сообразно этому, въ области мнимыхъ чиселъ корни квадратнаго уравненія x_1 и x_2 (§ 43, (3)) имѣютъ опредѣленныя значенія и въ случаѣ отрицательнаго дискриминанта.

4. Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующія формулы для сложенія, вы-

читанія, умноженія и дѣленія мнимыхъ чиселъ:

$$(a+bi)\pm(a'+b'i)=(a\pm a')+i(b\pm b'),$$
$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'-bb'+i(ab'+ba'), \quad (13)$$
$$\frac{a'+b'i}{a+bi}=\frac{aa'+bb'+i(ab'-ba')}{a^2+b^2};$$

Эти формулы содержатся въ общихъ правилахъ дѣйствій надъ дробями и буквенными выраженіями [4]).

Изъ приведенныхъ формулъ слѣдуетъ, что результатъ вычисленій надъ мнимыми числами всегда можно представить въ видѣ выраженія $A+Bi$, гдѣ A и B обозначають вещественныя числа. Если при вычисленіяхъ замѣнимъ каждое число сопряженнымъ ему числомъ, то въ результатѣ получится число $A-Bi$, сопряженное съ результатомъ, полученнымъ раньше. Отсюда слѣдуетъ, что равенство, содержащее мнимыя числа, не нарушится, если замѣнить въ обѣихъ частяхъ его число i числомъ $-i$.

§ 45. Извлеченіе квадратнаго корня изъ мнимыхъ чиселъ.

Мы показали уже, какъ выполняются въ области комплексныхъ чиселъ такъ называемыя раціональныя дѣйствія, т. е. сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе; такимъ образомъ изложенная выше теорія линейныхъ уравненій остается справедливой и для комплексныхъ чиселъ. Чтобы развить для этихъ чиселъ также теорію квадратныхъ уравненій, мы должны предварительно установить понятіе о корнѣ квадратномъ изъ комплекснаго числа. Итакъ, мы ставимъ слѣдующій вопросъ.

Дано комплексное число $a+bi$; найти другое комплексное число $x+yi$, квадратъ котораго равенъ числу $a+bi$. Иными словами, если число $x+yi$ удовлетворяетъ уравненію

$$a+bi=(x+yi)^2, \quad (1)$$

то мы называемъ его корнемъ квадратнымъ изъ числа $a+bi$ и обозначаемъ символомъ

$$x+yi=\sqrt{a+bi}.$$

Въ правой части уравненія (1) выполнимъ дѣйствіе; согласно опре-

[4]) Это значитъ: дѣйствія совершаются здѣсь по тѣмъ правиламъ, по которымъ они производятся надъ буквенными выраженіями, и въ результатѣ i^2 замѣняется черезъ -1. Въ частности, правая часть послѣдняго равенства (13) можетъ быть получена изъ лѣвой, если мы числителя и знаменателя умножимъ на $a-bi$, затѣмъ выполнимъ дѣйствія въ числителѣ и знаменателѣ, какъ надъ буквенными выраженіями, и въ результатѣ замѣнимъ i^2 черезъ -1.

дѣленію равенства комплексныхъ чиселъ, уравненіе (1) равносильно двумъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Итакъ, намъ нужно опредѣлить неизвѣстныя x и y изъ двухъ уравненій степени выше первой. Изъ второго уравненія мы получаемъ для неизвѣстнаго y выраженіе $b/2x$, которое подставимъ въ первое уравненіе. Получимъ уравненіе, содержащее одно лишь неизвѣстное x:

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

или

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Хотя это уравненіе четвертой степени, но, благодаря своей спеціальной формѣ, оно можетъ быть легко рѣшено: оно превращается въ квадратное уравненіе, если за неизвѣстное примемъ не число x, но число x^2. Рѣшая уравненіе относительно x^2, мы получимъ по формуламъ (3) § 43:

$$x_1{}^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad x_2{}^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Замѣтимъ, что x должно быть вещественнымъ числомъ, такъ что x^2 есть положительное число. Такъ какъ $a^2 < a^2 + b^2$, то $a < \sqrt{a^2 + b^2}$, и $a - \sqrt{a^2 + b^2} < 0$; поэтому для неизвѣстнаго x^2 мы можемъ взять лишь второй корень. Такимъ образомъ для неизвѣстнаго x мы получимъ два значенія, одно положительное, другое отрицательное:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\,. \qquad (3)$$

Число x обращается въ нуль только въ томъ случаѣ, когда $b = 0$ и a есть отрицательное число (потому что тогда $+\sqrt{a^2} = -a$, такъ что $a + \sqrt{a^2} = 0$). Въ этомъ частномъ случаѣ значеніе неизвѣстнаго y опредѣляется непосредственно первымъ изъ уравненій (2):

$$y = \pm \sqrt{-a}\,.$$

Если же число x отлично отъ нуля, то, подставивъ его значеніе во второе уравненіе (2), получимъ линейное уравненіе относительно неизвѣстнаго y. Каждому значенію неизвѣстнаго x соотвѣтствуетъ одно лишь значеніе неизвѣстнаго y; при $b > 0$ значенія обоихъ неизвѣстныхъ имѣютъ одинаковые знаки, при $b < 0$ — различные.

2. Тотъ же результатъ можно получить слѣдующимъ, болѣе изящнымъ способомъ.

Возвышаемъ обѣ части каждаго изъ уравненій (2) въ квадратъ; получимъ:

$$x^4+y^4-2x^2y^2=a^2$$
$$4x^2y^2=b^2;$$

складывая почленно полученныя уравненія и замѣчая, что $x^4+y^4+2x^2y^2=$ $=(x^2+y^2)^2$, найдемъ:

$$x^2+y^2=+\sqrt{a^2+b^2};$$

прибавляя къ этому уравненію и вычитывая изъ него почленно первое изъ уравненій (2), мы получимъ:

$$x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}, \quad y^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2};$$

каковы бы ни были значенія вещественныхъ чиселъ a и b, полученныя выраженія неизвѣстныхъ x^2 и y^2 имѣютъ положительныя значенія, такъ какъ $+\sqrt{a^2+b^2}>a$. Такимъ образомъ для неизвѣстныхъ x и y найдемъ по два рѣшенія:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}, \quad y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Комбинируя полученныя рѣшенія, мы получимъ четыре пары значеній неизвѣстныхъ x и y: двѣ пары съ одинаковыми знаками и двѣ съ противоположными. Изъ этихъ четырехъ комбинацій допустимы либо только первыя двѣ, если b есть число положительное,—либо же только вторыя двѣ, если b есть число отрицательное.

Такимъ образомъ оказывается, что квадратный корень изъ комплекснаго числа имѣетъ два значенія, различающіяся лишь знаками, т. е. символъ $\sqrt{a+bi}$ двузначенъ. Подъ нимъ разумѣютъ либо безразлично которое нибудь изъ двухъ значеній квадратнаго корня, либо же одно опредѣленное; въ послѣднемъ случаѣ должно быть оговорено, о которомъ изъ двухъ корней идетъ рѣчь: напримѣръ, двузначность можетъ быть устранена требованіемъ, чтобы вещественная часть корня, т. е. число x, была положительнымъ числомъ.

Теорія корней высшихъ степеней изъ комплексныхъ чиселъ, а также логариѳмовъ и степеней съ комплексными показателями будетъ изложена ниже.

§ 46. Функціи второй степени.

1. Послѣ того какъ введены комплексныя числа, становится всегда возможнымъ рѣшить уравненіе второй степени независимо отъ того, будетъ ли дискриминантъ величина положительная или отрицательная; мы можемъ рѣшить уравненіе 2-ой степени даже въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты его и дискриминантъ суть числа комплексныя. Мы всегда получимъ два корня за исключеніемъ того случая, когда дискриминантъ обращается въ нуль; въ послѣднемъ случаѣ уравненіе имѣетъ всего одинъ корень.

Выраженіе

$$ax^2 + bx + c,$$

въ которомъ число x имѣетъ произвольное значеніе, называется функціей второй степени отъ x. Мы будемъ обозначать это выраженіе символомъ $f(x)$, гдѣ буква f для краткости замѣняетъ слово „functio". Числа a, b и c называются коэффиціентами функціи, а число x—ея аргументомъ. Эта функція обращается въ нуль лишь въ томъ случаѣ, когда аргументъ x получаетъ одно изъ двухъ значеній x_1 и x_2 (§ 43, (3)), а именно:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; \quad (D = b^2 - 4ac).$$

Изъ этихъ выраженій легко найдемъ:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{D}}{a},$$
$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Отсюда получимъ:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + x\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\,[x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2];$$

слѣдовательно,

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2). \qquad (1)$$

Полученный результатъ выражается слѣдующимъ образомъ:

Функція второй степени можетъ быть представлена въ видѣ произведенія изъ одного численнаго множителя a и двухъ множителей первой степени: $x - x_1$ и $x - x_2$.

Изъ выраженія (1) легко усмотрѣть, что $f(x)$ обращается въ нуль при $x = x_1$ или $x = x_2$. Однако, равенство (1) справедливо при всѣхъ

значеніяхъ аргумента, и поэтому оно называется **тождествомъ**. Числа x_1 и x_2, которыя мы назвали корнями уравненія $f(x)=0$, называютъ также **корнями функціи** $f(x)$.

2. Чтобы найти разложеніе (1), нужно знать корни квадратнаго уравненія $f(x)=0$; предложеніе о возможности такого разложенія по существу тождественно съ предложеніемъ, доказаннымъ раньше, что всякое квадратное уравненіе имѣетъ два корня. Однако, первое предложеніе (о разложеніи функцій) имѣетъ то преимущество предъ послѣднимъ, что не допускаетъ исключенія для случая, когда дискриминантъ обращается въ нуль. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ оба линейныхъ множителя выраженія (1) тождественны, такъ что мы получимъ:

$$f(x)=a(x-x_1)^2,$$

т. е. при $D=0$ функція второй степени обращается въ **квадратъ линейной функціи**.

Чтобы вполнѣ согласовать оба предложенія, говорятъ, что въ томъ **случаѣ, когда дискриминантъ уравненія обращается въ нуль, оба корня его, которые вообще отличны одинъ отъ другого, дѣлаются равными**; число x_1 называется тогда **двойнымъ корнемъ**.

3. Примемъ коэффиціентъ a равнымъ 1; тогда квадратная функція приметъ слѣдующій видъ:

$$f(x)=x^2+bx+c; \qquad (2)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ:

$$x_1+x_2=-b, \quad x_1x_2=c, \quad (x_1-x_2)^2=D.$$

Такимъ образомъ, **если коэффиціентъ при x^2 равенъ единицѣ, то коэффиціентъ при x представляетъ сумму корней, взятую съ обратнымъ знакомъ; членъ же, не содержащій x, равенъ произведенію корней, а дискриминантъ — квадрату ихъ разности.**

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что равенство $x_1=x_2$ есть условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы дискриминантъ D обратился въ нуль.

4. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что задача о нахожденіи двухъ неизвѣстныхъ чиселъ, когда даны ихъ сумма и произведеніе, сводится къ рѣшенію нѣкотораго **квадратнаго уравненія**. Если x и y обозначаютъ неизвѣстныя числа и дано, что

$$\begin{aligned} x+y&=a,\\ xy&=b, \end{aligned} \qquad (3)$$

то числа x и y представляютъ собою корни квадратнаго уравненія

$$z^2-az+b=0;$$

значеніе неизвѣстнаго x можетъ быть представлено любымъ изъ двухъ корней этого уравненія, при чемъ другой корень дастъ значеніе неизвѣстнаго y, такъ что предложенная задача рѣшается однозначно. Уравненія (3) могутъ быть рѣшены и непосредственно. Для этого обѣ части перваго уравненія возводимъ въ квадратъ, обѣ части второго—умножаемъ на четыре и вычитываемъ почленно изъ перваго уравненія. Мы получимъ:

$$(x+y)^2-4xy=a^2-4b,$$

или

$$(x-y)^2=a^2-4b.$$

Отсюда

$$x-y=\sqrt{a^2-4b};$$

слѣдовательно,

$$2x=a+\sqrt{a^2-4b},\quad 2y=a-\sqrt{a^2-4b}.$$

Если мы возьмемъ квадратный корень со знакомъ минусъ, то неизвѣстныя x и y помѣняются своими значеніями.

Если даны разность и произведеніе неизвѣстныхъ, т. е.

$$x-y=a,\quad xy=b,$$

то, подобно предыдущему, найдемъ:

$$(x-y)^2+4xy=a^2+4b;$$

или

$$(x+y)^2=a^2+4b.$$

Отсюда

$$x+y=\sqrt{a^2+4b}$$

и, слѣдовательно,

$$2x=a+\sqrt{a^2+4b},\quad 2y=-a+\sqrt{a^2+4b}.$$

Если мы возьмемъ выраженіе $\sqrt{a^2+4b}$ со знакомъ минусъ, то неизвѣстное x приметъ значеніе, которое раньше имѣло неизвѣстное $-y$, а неизвѣстное y получитъ значеніе, которое имѣло неизвѣстное $-x$. Такимъ образомъ эта задача допускаетъ два различныхъ рѣшенія.

5. Если коэффиціенты квадратнаго уравненія суть числа вещественныя, то корни его все таки могутъ быть комплексными числами, когда дискриминантъ уравненія представляетъ собою отрицательное число. Такъ какъ $\sqrt{D}$ въ этомъ случаѣ есть чисто мнимое число, то, представивъ одинъ корень въ видѣ $\alpha+\beta i$, гдѣ α и β суть вещественныя числа, мы получимъ для другого корня значеніе $\alpha-\beta i$.

Итакъ, если квадратное уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ одинъ комплексный корень, то второй его корень есть также число комплексное, сопряженное съ первымъ корнемъ.

Если же нѣкоторыми коэффиціентами квадратнаго уравненія служатъ мнимыя числа, то корни этого уравненія могутъ быть хотя и комплексными, но не сопряженными числами; оно и очевидно, такъ какъ мы можемъ составить функцію второй степени $(x-\alpha)(x-\beta)$, корнями которой служатъ произвольныя два числа α и β.

§ 47. Геометрическое изображеніе комплексныхъ чиселъ.

1. Мы видѣли, что совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ можно представить геометрически посредствомъ точекъ прямой линіи; равнымъ образомъ и комплексныя числа могутъ быть изображены точками двумѣрной области, напримѣръ, плоскости.

Вообразимъ себѣ плоскость и на ней двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя; послѣднія называются координатными осями: одну изъ нихъ называютъ осью x-овъ, другую—осью y-овъ. Точку пересѣченія обѣихъ осей мы будемъ называть точкой нуля или началомъ координатъ и будемъ ее разсматривать, какъ изображеніе числа нуль. Считая отъ начала координатъ, мы будемъ на обѣихъ осяхъ произвольно различать двѣ стороны: положительную и отрицательную. Согласимся разъ на всегда считать ось x-овъ направленной съ запада на востокъ, а ось y-овъ—съ юга на сѣверъ; восточную половину первой и сѣверную второй мы будемъ называть положительными (нужно представить себѣ географическую карту). Каждая ось дѣлитъ плоскость на двѣ полуплоскости: изъ нихъ положительной полуплоскостью называютъ ту, которая содержитъ положительную половину другой оси; вторая полуплоскость называется отрицательной.

Выберемъ еще нѣкоторую единицу длины (остановимся, напримѣръ, на сантиметрѣ); на координатныхъ осяхъ отложимъ, считая отъ начала, два числа x и y въ видѣ двухъ отрѣзковъ, направленія которыхъ возьмемъ въ зависимости отъ знаковъ чиселъ x и y. Изъ концовъ отложенныхъ отрѣзковъ возставимъ къ обѣимъ осямъ перпендикуляры, которые пересѣкутся въ опредѣленной точкѣ z нашей плоскости. Отрѣзки x и y называются координатами точки z: отрѣзокъ x называется ея абсциссой, отрѣзокъ y—ординатой.

Четыре квадранта нашей плоскости различаются знаками координатъ x и y:

1-й квадрантъ: x имѣетъ положительное значеніе, y также имѣетъ положительное значеніе;

2-й квадрантъ: x имѣетъ отрицательное значенiе, y имѣетъ положительное значенiе;

3-й квадрантъ: x имѣетъ отрицательное значенiе, y имѣетъ отрицательное значенiе;

4-й квадрантъ: x имѣетъ положительное значенiе, y имѣетъ отрицательное значенiе.

Точку z разсматриваютъ, какъ изображенiе мнимаго числа

$$z = x + yi. \tag{1}$$

Такимъ образомъ каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ одно мнимое число и, наоборотъ, каждое мнимое число изображается одной и только одной точкой плоскости.

Выше мы видѣли, что вещественныя числа могутъ быть изображены на прямой линiи какъ въ видѣ точекъ, такъ и въ видѣ отрѣзковъ, при чемъ положительнымъ числамъ соотвѣтствуютъ отрѣзки, направленные въ одну сторону, напримѣръ, вправо, а отрицательнымъ числамъ—отрѣзки, направленные въ противоположную сторону. Подобнымъ же образомъ комплексныя числа можно наглядно представить въ видѣ орiентированныхъ отрѣзковъ опредѣленной величины и опредѣленнаго направленiя, при чемъ приходится различать не два только направленiя, но всѣ возможныя направленiя въ плоскости.

Фиг. 7.

Такимъ образомъ представленный на фигурѣ 7 отрѣзокъ $0z$, имѣющiй направленiе, указанное стрѣлкой, является изображенiемъ комплекснаго числа z.

Весьма цѣлесообразнымъ является предложенное Вейерштрассомъ (Weierstrass) обозначенiе, согласно которому длина отрѣзка $0z = r$, независимо отъ его направленiя, называется абсолютной величиной[1] комплекснаго числа z. Численное значенiе этой величины выражается формулой

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \tag{2}$$

это легко усмотрѣть изъ прямоугольнаго треугольника, въ которомъ координаты x и y служатъ катетами, а отрѣзокъ r—гипотенузой.

Направленiе отрѣзка $0z$ опредѣляется угломъ, который онъ образуетъ съ какимъ-нибудь напередъ установленнымъ направленiемъ, напримѣръ, съ положительной осью x-овъ.

Угломъ этимъ измѣряется поворотъ, который долженъ совершить отрѣзокъ, чтобы отъ направленiя положительной оси x-овъ перейти въ положенiе $0z$; мы будемъ считать вращенiе положительнымъ, если оно направлено отъ

[1]) Часто абсолютную величину комплекснаго числа называютъ его модулемъ.

положительной оси x-овъ къ положительной оси y-овь (т. е. противъ направленія часовой стрѣлки: съ востока черезъ сѣверъ къ западу и югу).

Въ тѣхъ случаяхъ, когда разсматривается не самое вращеніе отрѣзка $0z$, а лишь его положеніе, послѣднее всегда опредѣляется однозначно угломъ, взятымъ въ интервалѣ въ 360°, напримѣръ, отъ 0° до 360°, или отъ —180° до + 180°.

Этотъ уголъ мы будемъ называть **фазой**[2]) комплекснаго числа z. Къ одному и тому же положенію отрѣзка $0z$, а стало быть, къ **одной и той же фазѣ** приводитъ любое изъ безчисленнаго множества вращеній, отличающихся другъ отъ друга на цѣлое (положительное или отрицательное) число окружностей.

Вмѣсто градуснаго измѣренія угловъ часто употребляется ихъ дуговое измѣреніе (§ 28). Тогда уголь въ 180° выражается числомъ π, а полный оборотъ—числомъ 2π; при этомъ подъ фазой подразумѣвается уголъ, находящійся въ предѣлахъ отъ 0 до 2π, или въ предѣлахъ отъ $-\pi$ до $+\pi$.

2. Цѣлесообразность геометрическаго изображенія комплексныхъ чиселъ при помощи отрѣзковъ опредѣленнаго направленія особенно проявляется въ той наглядности, которую при этомъ получаютъ основныя дѣйствія: сложеніе и вычитаніе.

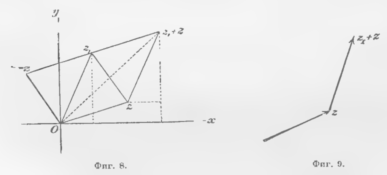
Согласно опредѣленію, которое дано въ § 44 п. 4, сумма двухъ комплексныхъ чиселъ

$$z = x + yi, \quad z_1 = x_1 + y_1 i$$

представится такъ:

$$z_1 + z = x_1 + x + i(y_1 + y).$$

Такимъ образомъ полученная сумма изобразится точкой, координаты которой равны $x_1 + x$ и $y_1 + y$; точка эта, какъ видно изъ фиг. 8., есть



Фиг. 8. Фиг. 9.

четвертая вершина параллелограма, тремя другими вершинами котораго служатъ точки 0, z и z_1; при этомъ точка $z + z_1$ и начало координатъ составляютъ концы одной и той же діагонали разсматриваемаго параллелограма.

[2]) Гораздо употребительнѣе терминъ **аргументъ** комплекснаго числа.

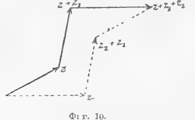
Подобнымъ же образомъ и разность $z_1 - z$ представится четвертой вершиной параллелограма, въ которой остальными вершинами служатъ точки 0, z, z_1; но при этомъ вершина $z_1 - z$ противолежитъ вершинѣ z.

Изъ построенія слѣдуетъ, что положеніе точки $z_1 + z$ опредѣлится, если отложить отрѣзокъ z_1 въ соотвѣтствующемъ ему направленіи, начиная отъ конца отрѣзка z; такое же построеніе приходится повторять при нахожденіи суммы какого угодно числа слагаемыхъ

$$z + z_1 + z_2 + $$

При этомъ получится ломанная линія съ вершинами z, $z + z_1$, $z + z_1 + z_2$ и т. д., которая составлена изъ отрѣзковъ, имѣющихъ каждый соотвѣтствующую длину и соотвѣтствующее направленіе. Конечная вершина этой ломанной и представитъ собою искомую сумму.

Если при сложеніи мы переставимъ нѣкоторыя слагаемыя, то въ результатѣ мы получимъ ломанную линію другого вида, но положеніе последней вершины ея не измѣнится; въ этомъ обстоятельствѣ сказывается переместительный законъ сложенія (фиг. 10).



Фиг. 10.

Вычитаніе какого нибудь отрѣзка можно замѣнить прибавленіемъ отрѣзка, имѣющаго противоположное направленіе. Такимъ образомъ мы можемъ построить разность $z_1 - z$, если отъ конца отрѣзка z_1 отложимъ отрѣзокъ z въ направленіи, противоположномъ тому, которое онъ собственно имѣетъ.

3. Чтобы выразить комплексное число при помощи его фазы и абсолютной величины, пользуются тригонометрическими функціями $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Геометрическая теорія этихъ функцій обстоятельно изложена во второмъ томѣ этого сочиненія; простѣйшія свойства этихъ функцій мы здѣсь предполагаемъ извѣстными.

Припомнимъ, что въ прямоугольномъ треугольникѣ съ острымъ угломъ ϑ отношеніе катета, лежащаго противъ этого угла, къ гипотенузѣ называется синусомъ угла ϑ, а отношеніе катета, прилежащаго къ углу ϑ, къ гипотенузѣ—косинусомъ этого угла; функціи эти обозначаются символами $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$. Между этими двумя функціями имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \cos\vartheta, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin\vartheta,$$

$$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1.$$

Если разсматриваемый уголъ больше прямого, то названныя функціи

связаны между собой слѣдующими равенствами:

$$\sin(\pi - \vartheta) = \sin\vartheta, \qquad \cos(\pi - \vartheta) = -\cos\vartheta$$
$$\sin(\vartheta + \pi) = -\sin\vartheta, \quad \cos(\vartheta + \pi) = -\cos\vartheta.$$

Такимъ образомъ во всѣхъ четырехъ квадрантахъ функціи $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ имѣютъ соотвѣтственно такіе же знаки, какъ координаты x и y (п. 1). Кромѣ того, имѣемъ еще:

$$\sin(\vartheta + 2\pi) = \sin\vartheta, \quad \cos(\vartheta + 2\pi) = \cos\vartheta,$$
$$\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta, \quad \cos(-\vartheta) = \cos\vartheta;$$

всѣ вращенія, которыя приводятъ къ одной и той же фазѣ, имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ и одинъ и тотъ же косинусъ.

Мы будемъ еще пользоваться формулами сложенія:

$$\cos(\vartheta + \vartheta_1) = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 - \sin\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta + \vartheta_1) = \sin\vartheta \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\cos(\vartheta - \vartheta_1) = \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta \sin\vartheta_1,$$
$$\sin(\vartheta - \vartheta_1) = \sin\vartheta \cos\vartheta_1 - \cos\vartheta \sin\vartheta_1.$$

Замѣтимъ также формулу, которая выражаетъ соотношеніе между сторонами треугольника a, b и c и косинусомъ одного изъ угловъ треугольника:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

гдѣ черезъ α обозначенъ уголъ, лежащій противъ стороны a.

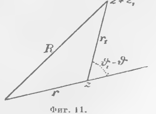
4. Разсмотримъ теперь прямоугольный треугольникъ, изображенный на фигурѣ 7, съ гипотенузой r и катетами x и y. Имѣемъ:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta,$$

а слѣдовательно,

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Эта формула остается справедливой независимо отъ того, въ которомъ изъ четырехъ квадрантовъ находится точка z. Формула эта сохраняетъ смыслъ и тогда, если черезъ ϑ обозначимъ не фазу, но величину того вращенія, которое приводитъ къ точкѣ z[3]).



Фиг. 11.

5. Обозначимъ черезъ z и z_1 два комплексныхъ числа, которыя имѣютъ абсолютныя величины соотвѣтственно r и r_1 и фазы ϑ и ϑ_1. Абсолютную величину суммы $z + z_1$ назовемъ черезъ R. Изъ треугольника со сторонами R, r и r_1, гдѣ между сторонами r

[3]) Эта величина можетъ, слѣдовательно, отличаться отъ ϑ на 2π

и r_1 заключенъ уголъ $\pi-(\vartheta_1-\vartheta)$, имѣемъ:

$$R^2 = r_1^2 + r^2 + 2rr_1\cos(\vartheta_1 - \vartheta);$$

это отношеніе можетъ быть выражено двояко слѣдующимъ образомъ:

$$R^2 = (r_1 + r)^2 - 2rr_1[1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta)],$$
$$R^2 = (r_1 - r)^2 + 2rr_1[1 + \cos(\vartheta_1 - \vartheta)].$$

Такъ какъ косинусь любого угла по своей абсолютной величинѣ не превышаетъ единицы, то множители $1-\cos(\vartheta_1-\vartheta)$ и $1+\cos(\vartheta_1-\vartheta)$ никогда не бываютъ отрицательными: слѣдовательно, R^2 меньше, чѣмъ $(r_1+r)^2$ и больше, чѣмъ $(r_1-r)^2$. Отсюда слѣдуетъ предложеніе:

Абсолютная величина суммы никогда не превышаетъ суммы абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ и никогда не бываетъ меньше ихъ разности.

Въ этомъ нельзя не усмотрѣть выраженія извѣстной геометрической теоремы: во всякомъ треугольникѣ одна сторона меньше суммы двухъ другихъ сторонъ и больше разности ихъ.

Абсолютная величина суммы равна суммѣ абсолютныхъ величинъ слагаемыхъ лишь въ томъ случаѣ, когда $\vartheta_1 = \vartheta$: она равна разности послѣднихъ, когда уголъ $\vartheta_1 - \vartheta$ равенъ двумъ прямымъ. Въ обоихъ этихъ случаяхъ отношеніе $z/z_1 = \pm r/r_1$, слѣдовательно, есть вещественное число; знакъ плюсъ нужно взять для перваго случая, знакъ минусъ—для второго.

6. Дадимъ теперь геометрическую интерпретацію умноженія и дѣленія комплексныхъ чиселъ. Изъ чиселъ

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$
$$\text{и} \quad z_1 = r_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$$

мы составимъ произведеніе zz_1 и частное z_1/z по формуламъ § 44, п. 4. Имѣемъ:

$$zz_1 = rr_1[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - \sin\vartheta\sin\vartheta_1) + i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1 + \sin\vartheta\cos\vartheta_1)],$$
$$\frac{z_1}{z} = \frac{r_1}{r}[(\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1) + i(\cos\vartheta\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta\cos\vartheta_1)].$$

Согласно формуламъ сложенія, которыя приведены въ п. 3, мы получимъ:

$$\begin{aligned} zz_1 &= rr_1[\cos(\vartheta_1+\vartheta) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta)] \\ \frac{z_1}{z} &= \frac{r_1}{r}[\cos(\vartheta_1-\vartheta) + i\sin(\vartheta_1-\vartheta)]. \end{aligned} \tag{10}$$

Формулы (10) мы видоизмѣнимъ слѣдующимъ образомъ. Пусть

$$zz_1 = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\frac{z_1}{z} = R'(\cos\theta' + i\sin\theta');$$

тогда

$$R = rr_1, \quad R' = \frac{r_1}{r}.$$

Если для фазъ будемъ брать, какъ мы условились выше, углы въ интервалѣ отъ 0 до 2π, то разность $\vartheta_1 - \vartheta$ можетъ быть отрицательной, но во всякомъ случаѣ она превышаетъ -2π; сумма же $\vartheta_1 + \vartheta$ можетъ превышать 2π, но она меньше 4π. Такъ что

$$\begin{aligned} \theta &= \vartheta_1 + \vartheta, && \text{если } \vartheta_1 + \vartheta < 2\pi \\ &= \vartheta_1 + \vartheta - 2\pi, && \text{„ } \vartheta_1 + \vartheta \geqslant 2\pi \\ \theta' &= \vartheta_1 - \vartheta, && \text{„ } \vartheta_1 \geqslant \vartheta \\ &= \vartheta_1 - \vartheta + 2\pi, && \text{„ } \vartheta_1 < \vartheta. \end{aligned}$$

Отсюда слѣдуетъ:

Абсолютная величина произведенія или частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ равна произведенію или частному абсолютныхъ величинъ этихъ чиселъ.

Фаза произведенія или частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ отличается отъ суммы или разности фазъ данныхъ чиселъ лишь на цѣлое число окружностей.

7. Вышеизложенное даетъ способъ построить произведеніе комплексныхъ чиселъ.

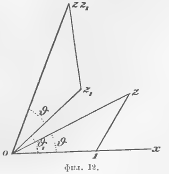
На положительной оси x-овъ отложимъ отрѣзокъ 1 (т. е. единицу длины) и построимъ треугольникъ $(0, z_1, z_2)$, подобный треугольнику $(0, 1, z)$. По извѣстной теоремѣ изъ теоріи подобныхъ треугольниковъ имѣемъ:

$$r_2 : r_1 = r : 1,$$

откуда $r_2 = rr_1 = R$; уголъ $z_2 0 1 = \vartheta + \vartheta_1 = \theta$.

Такимъ образомъ точка z_2 является изображеніемъ произведенія zz_1.

Точно также можно представить частное $z_2/z = z_1$ посредствомъ подобныхъ треугольниковъ $(0 1 z)$ и $(0 z_1 z_2)$. Число z_2/z изобразится точкой, имѣющей относительно точки z_2 такое же положеніе, какое занимаетъ точка 1 относительно точки z.



Фиг. 12.

8. Пусть $\vartheta_1 = \vartheta$ и $r_1 = r$. Тогда изъ формулы умноженія (п. 6, (10)) получимъ:

$$z^2 = r^2(\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta);$$

положивъ въ той же формулѣ $z_1 = z^2$, $r_1 = r^2$, и $\vartheta_1 = 2\vartheta$, получимъ:

$$z^3 = r^3(\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta).$$

При помощи совершенной индукціи легко доказать справедливость общей формулы:

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta). \qquad (11)$$

Для этого нужно въ формулѣ (10) подставить: $z_1 = z^n$, $r_1 = r^n$ и $\vartheta_1 = n\vartheta$.

Если мы во второй изъ двухъ формулъ (10) положимъ:

$$z_1 = 1, \quad r_1 = 1 \quad \text{и} \quad \vartheta_1 = 0,$$

то получимъ:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\vartheta - i \sin\vartheta).$$

Если въ той же формулѣ возьмемъ, кромѣ того, дѣлителемъ не число z, а число z^n, то, согласно формулѣ (11), мы должны замѣнить модуль r и фазу ϑ соотвѣтственно черезъ r^n и $n\vartheta$, такъ что окончательно найдемъ:

$$z^{-n} = r^{-n}(\cos n\vartheta - i \sin n\vartheta).$$

Такимъ образомъ, формула (11) справедлива при всякомъ цѣломъ n какъ положительномъ, такъ и отрицательномъ.

Формула (11) извѣстна подъ названіемъ формулы Муавра (Moivre). Посредствомъ нея можно получить любую степень комплекснаго числа съ цѣлымъ показателемъ. Позже мы покажемъ, какъ можно воспользоваться этой формулой для опредѣленія степени, когда показатель не есть цѣлое число.

Въ заключеніе, скажемъ два слова объ историческомъ развитіи теоріи мнимыхъ чиселъ. Давно уже было извѣстно, что нѣкоторыя уравненія не имѣютъ ни одного корня въ области чиселъ, надъ которыми оперировали. Столь же давно стали дѣлать условно вычисленія надъ выраженіями, содержащими знакъ $\sqrt{-1}$, такъ, какъ будто онъ дѣйствительно представляетъ собою число. Напримѣръ, Карданусъ (Hieronymus Cardanus 1501 –1576) знаетъ уже, что отрицательные корни уравненій имѣютъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ опредѣленный смыслъ, но онъ еще не въ состояніи приписать какой нибудь смыслъ такимъ символамъ, какъ $\sqrt{-1}$. У Декарта (Decartes, 1596—1650) мы уже встрѣчаемъ термины „вещественные корни“

и „мнимые корни.“ Въ такомъ видѣ вопросъ о мнимыхъ числахъ находился вплоть до XIX-го столѣтія, хотя къ этому времени мнимыя числа все чаще и чаще примѣнялись въ вычисленіяхъ; много занимались этими формальными вычисленіями между прочими Лейбницъ, Ньютонъ, Даламберъ и въ особенности Эйлеръ. Долгое время мнимыя числа считались чѣмъ-то загадочнымъ, пока не выработалось сознаніе, что эти числа представляютъ результатъ вполнѣ законнаго и цѣлесообразнаго расширенія созданнаго нашимъ духомъ понятія о числѣ; тогда убѣдились, что эти числа имѣютъ такой же реальный смыслъ, какъ и вещественныя числа, такъ какъ, подобно послѣднимъ, они служатъ для выраженія извѣстнаго рода соотношеній между вещами. Это было выяснено, главнымъ образомъ, работами Коши (Cauchy) и Гаусса (Gauss); послѣднему мы обязаны изложенной выше геометрической интерпретаціей мнимыхъ чиселъ[6]).

[6]) Abraham de Moivre, 1667—1754; будучи протестантомъ, онъ послѣ отмѣны Нантскаго эдикта эмигрировалъ изъ Франціи, жилъ и работалъ въ Лондонѣ, въ кругу Ньютона; въ 1730 г. появился его трудъ „Miscellanea analytica,“ въ которомъ находится приведенная нами формула.

Gauss. Göttinger gelehrte Anzeigen, 23 April 1831, въ статьѣ „Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda“. Въ 1880 г. было опубликовано письмо Гаусса къ Бесселю (Bessel), помѣченное 1811 г.; въ этомъ письмѣ изложены весьма важныя соображенія относительно даннаго вопроса.

Cauchy, Analyse algébrique (1821), Exercices d'analyse, т. III (1844).

Изъ новѣйшихъ сочиненій по этому вопросу упомянемъ:

Heine, Die Elemente der Functionentheorie, Crelles Journal, т. 74 (1871).

ГЛАВА X.

Перестановки и сочетанія:

§ 48. Перестановки.

1. Предположимъ, что мы имѣемъ комплексъ, содержащій конечное число предметовъ. Обозначимъ это число черезъ n; какъ мы уже раньше видѣли, это число можетъ быть отсчитано различными способами; другими словами, мы можемъ различнымъ образомъ ассоціировать (сопрягать) элементы нашего комплекса съ числами $1, 2, 3, \ldots . n$, или, еще иначе, предметы нашего комплекса можно различными способами расположить.

Одинъ единственный элементъ допускаетъ, естественно, только одно расположеніе; два элемента a и b могутъ быть расположены двояко: ab и ba; три элемента a, b и c могутъ быть расположены шестью способами: abc, acb, bac, bca cab и cba. Эти шесть перестановокъ можно получить слѣдующимъ образомъ: пишемъ на первомъ мѣстѣ поочередно каждый изъ трехъ элементовъ a, b и c и каждый разъ располагаемъ послѣ перваго элемента прочіе два двумя возможными способами.

Эти различныя размѣщенія называются перестановками изъ n элементовъ нашего комплекса. Какъ показываютъ приведенные примѣры, эти перестановки, въ свою очередь, образуютъ нѣкоторый комплексъ, состоящій изъ конечнаго числа элементовъ; это предложеніе мы сейчасъ докажемъ способомъ математической индукціи, при чемъ доказательство дастъ намъ еще способъ опредѣлить число перестановокъ изъ n элементовъ.

Итакъ, допустимъ, что число перестановокъ изъ $n-1$ элементовъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ конечно; обозначимъ это число черезъ $\pi(n-1)$. Присоединимъ къ нашему комплексу еще n-тый элементъ a_n. Въ каждой изъ имѣющихся у насъ $\pi(n-1)$ перестановокъ изъ $n-1$ элементовъ мы можемъ помѣстить новый элементъ a_n на первомъ, на второмъ, на третьемъ, ... или, наконецъ, на n-томъ мѣстѣ. Такимъ образомъ каждая перестановка изъ $n-1$ элементовъ дастъ n перестановокъ изъ n элементовъ, и всѣ получаемыя перестановки отличны другъ отъ друга.

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\Pi(n) = n\,\Pi(n-1). \qquad (1)$$

Мы видѣли, что $\Pi(1) = 1$ и $\Pi(2) = 2$; слѣдовательно, по формулѣ (1), $\Pi(3) = 2.3$, и вообще (въ силу совершенной индукціи)

$$\Pi(n) = 1.2.3\ldots n; \qquad (2)$$

т. е. число перестановокъ изъ n элементовъ равно произведенію всѣхъ чиселъ отъ 1 до n.

Это произведеніе имѣетъ еще особое названіе: факультетъ n-го порядка (n—факультетъ), и обозначается слѣдующимъ символомъ:

$$1.2.3\ldots n = n!$$

Такимъ образомъ, мы вполнѣ опредѣлили число перестановокъ въ комплексѣ, состоящемъ изъ n элементовъ.

Формулу (1) можно представить въ болѣе общемъ видѣ. Если подъ m будемъ подразумѣвать натуральное число, которое меньше числа n, то имѣемъ:

$$\Pi(n) = (m+1)(m+2)\ldots n\,\Pi(m). \qquad (3)$$

Если увеличивать число n, то число $\Pi(n)$ возрастаетъ очень быстро, напримѣръ:

$\Pi(1) = 1$, $\Pi(2) = 2$, $\Pi(3) = 6$, $\Pi(4) = 24$, $\Pi(5) = 120$,
$\Pi(6) = 720$, $\Pi(7) = 5040$, $\Pi(8) = 40320$, $\Pi(9) = 362880$,
$\Pi(10) = 3\,628\,800$.

Относительно того, въ какой мѣрѣ быстро увеличивается число $\Pi(n)$ съ возрастаніемъ числа n мы докажемъ слѣдующее предложеніе.

2. Каково бы ни было положительное число $a > 1$, можно указать такое число m, что $\Pi(n) > a^n$, коль скоро $n > m$.

Для доказательства выберемъ произвольное цѣлое число $p > a$; тогда $\frac{a}{p} = \Theta$ есть положительная правильная дробь; возьмемъ теперь цѣлое число $n > p$; имѣемъ:

$$\frac{a}{p+1} < \Theta, \quad \frac{a}{p+2} < \Theta, \ldots \frac{a}{n} < \Theta.$$

Перемножая эти неравенства почленно, получимъ:

$$\frac{a^{n-p}}{(p+1)(p+2)\ldots n} < \Theta^{n-p}.$$

Помноживъ обѣ части полученнаго неравенства на $a^p/\Pi(p)$ и пользуясь формулой (3), получимъ:

$$\frac{a^n}{\Pi(n)} < \frac{a^p\Theta^n}{\Theta^p\,\Pi(p)}. \qquad (4)$$

Согласно предложенію, изложенному въ § 18, 8, можно подобрать достаточно большое число m такъ, чтобы

$$\Theta^n < \Theta^p a^{-p} \pi(p)$$

для всякаго $n > m$.

Поэтому при достаточно большихъ значеніяхъ числа n правая часть неравенства (4) обращается въ правильную дробь и, слѣдовательно, $\frac{a^n}{\pi(n)} < 1$, т. е.

$$\pi(n) > a^n, \qquad (5)$$

что и требовалось доказать.

3. Подъ многосторонникомъ, (n-сторонникомъ) разумѣютъ замкнутую ломанную линію, состоящую изъ n отрѣзковъ, попарно сходящихся въ каждой вершинѣ; отрѣзки эти (стороны) могутъ иногда взаимно перекрещиваться, какъ это бываетъ у такъ называемыхъ звѣздныхъ многосторонниковъ. Мы можемъ теперь рѣшить такую задачу: сколько n-сторонниковъ можно построить на данныхъ n точкахъ, какъ на вершинахъ. Въ каждомъ многосторонникѣ мы можемъ любую вершину считать первой, такъ что при построеніи нашихъ многосторонниковъ мы можемъ выбрать любую изъ данныхъ n точекъ за общую ихъ начальную вершину; прочія же $n-1$ точекъ можно брать въ различной послѣдовательности столькими различными способами, сколько единицъ содержится въ числѣ $\pi(n-1)$. Всего получится, однако, не $\pi(n-1)$ многосторонниковъ, а вдвое меньше, т. е. $\frac{1}{2}\pi(n-1)$. Въ самомъ дѣлѣ, одна и та же фигура получится, если мы будемъ брать вершины въ одной послѣдовательности и въ противоположной послѣдовательности, такъ что одинъ многосторонникъ приходится не на одну перестановку вершинъ, но на двѣ перестановки. Такимъ образомъ изъ трехъ точекъ можно получить одинъ лишь трехсторонникъ изъ четырехъ точекъ—три четырехсторонника, изъ пяти точекъ —двѣнадцать пятисторонниковъ, изъ шести точекъ—шестьдесять шестисторонниковъ, и т. д. Читатель легко можетъ выяснить себѣ расположеніе этихъ многосторонниковъ посредствомъ простыхъ чертежей.

§ 49. Четныя и нечетныя перестановки.

1. Будемъ обозначать элементы нѣкотораго комплекса числами натуральнаго ряда 1, 2, 3, . . . , n. Среди всѣхъ возможныхъ перестановокъ этихъ элементовъ есть одна такая: $E = 1, 2, 3, \ldots, n$, въ которой числа расположены въ той же послѣдовательности, какъ и въ натуральномъ ряду. Назовемъ эту перестановку главной или основной перестановкой. Всякую другую перестановку мы будемъ обозна-

чать такъ:

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n;$$

здѣсь буквы $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ означаютъ числа того же ряда $1, 2, 3, \ldots, n$, но расположенныя въ другой послѣдовательности.

Напримѣръ, при $n = 3$ мы имѣемъ шесть перестановокъ:

$$A_1 = 1,2,3, \qquad A_4 = 1,3,2,$$
$$A_2 = 2,3,1, \qquad A_5 = 2,1,3,$$
$$A_3 = 3,1,2, \qquad A_6 = 3,2,1.$$

Чтобы получить изъ главной перестановки E какую-нибудь перестановку A, поступаютъ слѣдующимъ образомъ. Если $a_1 = 1$, то первый элементъ главной перестановки оставляютъ на прежнемъ мѣстѣ. Если же a_1 отлично отъ 1, то мы перемѣщаемъ въ перестановкѣ E элементы a_1 и 1 одинъ на мѣсто другого. Тогда элементъ a_1 окажется на надлежащемъ мѣстѣ, котораго мы болѣе не будемъ мѣнять. Послѣ того, какъ элементъ a_1 займетъ принадлежащее ему въ перестановкѣ A первое мѣсто, мы аналогичнымъ образомъ помѣняемъ мѣстами элементы 2 и a_2; чтобы получить требуемую перестановку A, потребуется выполнить не болѣе $n-1$ подобныхъ замѣщеній [1]). Такое взаимное замѣщаніе двухъ элементовъ называется **транспозиціей**. Такимъ образомъ любую перестановку можно получить изъ главной путемъ ряда послѣдовательныхъ транспозицій. Точно также посредствомъ транспозицій можно получить любую заданную перестановку, исходя не изъ главной перестановки, а изъ какой либо другой. Это можно выполнить безконечнымъ числомъ способовъ: напримѣръ, можно сперва сдѣлать какое угодно число совершенно произвольныхъ транспозицій, а потомъ ужъ дѣйствовать планомѣрно вышеописаннымъ образомъ.

2. Тѣ $n!$ перестановокъ, которыя получаются изъ n элементовъ $1, 2, 3, \ldots n$, можно раздѣлить на два класса, исходя изъ слѣдующихъ соображеній.

Если въ какой нибудь перестановкѣ меньшее число стоитъ не впереди большаго, а позади его, то говорятъ, что соотвѣтствующіе элементы составляютъ **инверсію**. Напримѣръ, въ перестановкѣ A два элемента a_i и a_k при $i < k$ составляютъ инверсію, если $a_i > a_k$, и не составляютъ инверсіи, если $a_i < a_k$. Поэтому, за исключеніемъ главной перестановки E, не имѣющей ни одной инверсіи, всякая перестановка имѣетъ **опредѣленное число инверсій**. Напримѣръ, перестановка

[1]) Напримѣръ, чтобы изъ главной перестановки $E = 1, 2, 3, 4$, получить перестановку 3, 1, 4, 2, нужно сначала замѣстить другъ другомъ элементы 1 и 3; получимъ перестановку 3, 2, 1, 4; теперь нужно здѣсь замѣстить другъ другомъ элементы 2 и 1, получимъ: 3, 1, 2, 4; остается перемѣстить элементы 2 и 4, послѣ чего получимъ требуемую перестановку 3, 1, 4, 2.

$n, n-1, n-2, \ldots, 1$ имѣетъ слѣдующее число инверсій:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1=\frac{1}{2}n(n-1).\ [2]$$

Это —наибольшее число инверсій, которымъ можетъ обладать какая либо перестановка нашего комплекса. Въ вышеприведенномъ примѣрѣ $n=3$; перестановки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 имѣютъ инверсій соотвѣтственно 0, 2, 2, 1, 1 и 3. По числу инверсій мы подраздѣляемъ перестановки каждаго комплекса на два класса.

Четными перестановками называются такія, которыя имѣютъ четное число (включая сюда и нуль) инверсій.

Нечетными перестановками называются такія, которыя имѣютъ нечетное число инверсій.

При $n=3$ перестановки A_1, A_2 и A_3 суть четныя, а перестановки A_4. A_5 и A_6—нечетныя.

3. Если мы въ какой нибудь перестановкѣ перемѣстимъ два элемента одинъ на мѣсто другого, то количество инверсій этой перестановки измѣнится на нечетное число.

Справедливость этого предложенія легко обнаружить слѣдующимъ образомъ. Примемъ, что въ перестановкѣ A элементъ a_g находится впереди элемента a_k (т. е. $g<k$): замѣняя другъ другомъ элементы a_g и a_k, мы этимъ совершенно не измѣняемъ инверсій, которыя они образуютъ съ элементами, стоящими впереди элемента a_g или позади элемента a_k.

Если черезъ a_l обозначимъ элементъ, который находится въ перестановкѣ A между элементами a_g и a_k, то двѣ пары элементовъ a_g, a_l и a_l, a_k либо не даютъ ни одной инверсіи, либо образуютъ одну, либо же двѣ инверсіи; при замѣщеніи другъ другомъ элементовъ a_g и a_k двѣ пары a_k, a_l, и a_l, a_g образуютъ соотвѣтственно либо двѣ инверсіи, либо одну, либо же не даютъ ни одной, такъ что число этихъ инверсій разсматриваемой перестановки или увеличилось на два, или осталось безъ перемѣны, или же уменьшилось на два; во всякомъ случаѣ, стало быть, оно измѣняется на четное число. Наконецъ, если пара a_g, a_k образуетъ инверсію, то пара a_k, a_g не даетъ ни одной инверсіи, и наоборотъ, если пара a_g, a_k не образуетъ инверсіи, то пара a_k, a_g образуетъ одну инверсію; число инверсій, такимъ образомъ, измѣняется еще на 1. Этимъ и подтверждается справедливость нашего предложенія.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ:

4. Число четныхъ перестановокъ равно числу нечетныхъ,

[2]) Въ этой перестановкѣ каждый элементъ образуетъ инверсію съ каждымъ изъ послѣдующихъ элементовъ: такимъ образомъ элементъ n образуетъ съ послѣдующими элементами $n-1$ инверсій, элементъ $n-1$ образуетъ $n-2$ инверсій и т. д.

т. е. тѣхъ и другихъ въ каждомъ комплексѣ имѣется по $\frac{1}{2}n!$ Дѣйствительно, мы можемъ во всѣхъ перестановкахъ A замѣстить другъ другомъ два какихъ либо опредѣленныхъ элемента, напримѣръ 1 и 2; тогда, съ одной стороны, каждая четная перестановка перейдетъ въ нечетную и, обратно, каждая нечетная перестановка—въ четную; но такъ какъ въ общемъ мы получимъ всѣ тѣ же перестановки, которыя мы имѣли раньше, то необходимо заключить, что четныхъ перестановокъ столько же, сколько нечетныхъ.

5. Будемъ выводить помощью транспозицій всевозможныя перестановки даннаго комплекса изъ n элементовъ изъ главной перестановки; въ какомъ бы порядкѣ мы ни вели этотъ процессъ, всякая четная перестановка получится послѣ четнаго числа транспозицій, а всякая нечетная перестановка—путемъ нечетнаго числа транспозицій. Въ самомъ дѣлѣ, главная перестановка, не имѣя ни одной инверсіи, принадлежитъ къ четнымъ перестановкамъ, а каждая транспозиція измѣняетъ количество инверсій на нечетное число.

Изложенныя теоремы вмѣстѣ съ нѣкоторыми другими составляютъ основанія теоріи детерминантовъ.

§ 50. Составленіе перестановокъ.

1. Какъ мы видѣли выше, изъ любыхъ n элементовъ можно составить $n!$ перестановокъ A. Хотя эти перестановки не представляютъ собою численныхъ величинъ, все же онѣ поддаются математической обработкѣ; въ области перестановокъ можно установить правила дѣйствій, имѣющія аналогію съ правилами обыкновенной ариѳметики, хотя и существенно отличающіяся отъ послѣднихъ въ нѣкоторыхъ пунктахъ. Эти дѣйствія надъ перестановками имѣютъ огромное значеніе для алгебры; мы сейчасъ разсмотримъ ихъ вкратцѣ, такъ какъ эти своеобразныя дѣйствія при всей своей важности имѣютъ совершенно элементарный характеръ; къ тому же они представляютъ собою прекрасный примѣръ свободнаго творчества въ области понятія о числахъ и дѣйствіяхъ надъ ними.

2. Чтобы перейти отъ основной перестановки

$$E = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

къ какой либо другой перестановкѣ

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

нужно замѣнить элементъ 1 элементомъ a_1, элементъ 2—элементомъ $a_2, \ldots$, элементъ n—элементомъ a_n. Это дѣйствіе называется субсти-

гуціей [3]); для наглядности его изображають такъ:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

т. е. подъ каждымъ элементомъ пишутъ тотъ элементъ, которымъ его замѣняютъ. Эта субституція обозначается одной какой либо буквой, напримѣръ буквой S, такъ что символъ (1) читается такъ: субституція S. Такимъ образомъ посредствомъ субституціи S мы переходимъ отъ главной перестановки E къ перестановкѣ A.

Когда мы производимъ субституцію, то безразлично, въ какой послѣдовательности мы замѣняемъ прежніе элементы $1, 2, 3, \ldots, n$ новыми элементами $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; можно, напримѣръ, замѣнить сперва элементъ 1 элементомъ a_1, а потомъ элементъ 2 элементомъ a_2; но можно также сперва замѣнить элементъ 2 элементомъ a_2, а потомъ уже элементъ 1—элементомъ a_1, такъ что субституцію S можно представить еще такъ:

$$\begin{pmatrix} 2, & 1, & 3, & \ldots. & n \\ a_2, & a_1, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix},$$

и, вообще, въ символѣ (1) можно переставлять любыя двѣ пары цифръ (т. е. любыя вертикали), при чемъ значеніе символа отъ этого не измѣняется, потому что послѣ такой перестановки онъ выражаетъ ту же субституцію, что и до нея. [4])

Какой либо элементъ b изъ ряда $1, 2, 3, \ldots, n$ послѣ субституціи S замѣнится элементомъ a_b, такъ что если обозначимъ какую либо перестановку нашего комплекса черезъ

$$B = b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n,$$

то субституцію S можно представить еще такъ:

$$S = \begin{pmatrix} b_1, & b_2. & & , b_n \\ a_{b_1}, & a_{b_2}, & & , a_{b_n} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

[3]) Нѣкоторые русскіе авторы употребляютъ терминъ подстановка, другіе въ томъ же значеніи -терминъ перестановка; въ виду того, что русская терминологія, такимъ образомъ, не установилась, мы рѣшили сохранить терминъ субституція (какъ и выше терминъ транспозиція), принятый во всей европейской литературѣ.

[4]) Это важно очень хорошо себѣ уяснить Символы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

выражаютъ одну и ту же субституцію, именно ту, которая замѣняетъ элементъ 1 элементомъ 2, элементъ 2 элементомъ 3 и элементъ 3 элементомъ 1. Субституція опредѣляется, такимъ образомъ, только тѣмъ, какимъ элементомъ она замѣняетъ каждый элементъ комплекса.

Однако, перестановка A сравнительно со всѣми другими перестановками находится въ особенной связи съ субституціей S; именно, она получается при помощи субституціи S изъ основной перестановки E.

3. Если мы будемъ выполнять замѣну элементовъ, выражаемую субституціей S, исходя не изъ главной перестановки E, но изъ какой либо другой перестановки B, то, какъ показываетъ формула (2), мы при этомъ получимъ нѣкоторую перестановку

$$M = a_{b_1}, \ a_{b_2}, \ \ldots, \ a_{b_n}; \qquad (3)$$

мы могли бы обозначить эту перестановку черезъ A_b; однако, предпочитаютъ пользоваться другимъ символомъ, а именно

$$M = BA. \qquad (4)$$

Понятно, что выражаемое символомъ BA дѣйствіе не есть умноженіе, какъ мы его привыкли понимать. [5])

4. Мы только что познакомились со способомъ получить изъ двухъ данныхъ перестановокъ A и B опредѣленную третью; другими словами, въ области перестановокъ мы устанавливаемъ правило дѣйствія, аналогичное правиламъ дѣйствій въ ариѳметикѣ. Для обозначенія этого дѣйствія мы выбрали знакъ умноженія, какъ наиболѣе простой (съ не меньшимъ правомъ можно было бы употреблять знакъ сложенія); однако, чтобы избѣжать недоразумѣній, мы будемъ называть это дѣйствіе не умноженіемъ, но составленіемъ [6]) или соединеніемъ перестановокъ. Важно замѣтить, что это дѣйствіе можно производить лишь надъ такими перестановками, которыя состоятъ изъ опредѣленнаго числа элементовъ, при чемъ эти послѣдніе не мѣняются въ предѣлахъ нашего разсужденія.

[5]) Итакъ, подъ символомъ BA мы разумѣемъ перестановку, которая получается изъ перестановки B посредствомъ той же субституціи, при помощи которой перестановка A получается изъ основной перестановки E.

Пусть, напримѣръ,

$$B = 3, 1, 2; \ A = 2, 1, 3:$$

тогда субституція

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix},$$

переобразующая перестановку E въ перестановку A, замѣщаетъ элементы 1, 2, 3 соотвѣтственно элементами 2, 1, 3. Если мы произведемъ это замѣщеніе въ перестановкѣ B, то получимъ перестановку

3, 2, 1.

Эта, именно, перестановка и выражается въ настоящемъ случаѣ символомъ BA. Въ текстѣ ниже приведенъ еще примѣръ.

[6]) Почти во всей литературѣ принятъ, однако, терминъ умноженіе перестановокъ.

Чтобы выяснить процессъ составленія перестановокъ на простомъ примѣрѣ, возьмемъ $n = 4$,

$$A = 1,\ 3,\ 4,\ 2 \text{ и } B = 3,\ 2,\ 1,\ 4.$$

Чтобы получить перестановку BA, нужно выполнить тѣ замѣщенія въ перестановкѣ B, которыя приводятъ отъ $E = 1, 2, 3, 4$ къ A. Мы получимъ тогда

$$BA = 4,\ 3,\ 1,\ 2.$$

Точно такъ же найдемъ:

$$AB = 3,\ 1,\ 4,\ 2.$$

Уже изъ этихъ примѣровъ видно, что перемѣстительный законъ не имѣетъ мѣста или, по крайней мѣрѣ, не всегда имѣетъ мѣсто при составленіи перестановокъ.

5. Ту же операцію можно производить не только надъ двумя, но и надъ нѣсколькими перестановками. Если C означаетъ третью перестановку, то можно образовать перестановку $C(BA)$, составленную изъ перестановокъ C и (BA). Покажемъ, что послѣдняя перестановка тождественна съ перестановкой $(CB)A$; другими словами, докажемъ, что при составленіи перестановокъ сочетательный законъ остается справедливымъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно выполнить требуемыя операціи по правилу, указанному въ пунктѣ 3.

Дѣйствительно, пусть

$$A = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$
$$B = b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,$$
$$C = c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_n;$$

тогда

$$BA = a_{b_1},\ a_{b_2},\ \ldots,\ a_{b_n}\ ^{7)}. \qquad (5)$$

Чтобы получить перестановку $C(BA)$, нужно въ перестановкѣ C

[7]) Нужно помнить, что

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ a_n$$

суть тѣ же числа

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ n,$$

разставленныя въ иномъ порядкѣ. Субституція, ведущая отъ перестановки E къ перестановкѣ A, замѣщаетъ элементъ 1 элементомъ a_1, элементъ 2 элементомъ a_2, вообще, элементъ i элементомъ a_i. Слѣдовательно, она замѣщаетъ элементъ b_1 элементомъ a_{b_1}, элементъ b_2 элементомъ a_{b_2} и т. д. Отсюда вытекаютъ равенства (5) и (3).

выполнить субституцію, ведущую отъ главной перестановки E къ перестановкѣ BA; такъ какъ для этого элементъ 1 нужно замѣнить элементомъ a_{b_1}, элементъ 2—элементомъ a_{b_2} и т. д., то элементъ c_1 замѣнится элементомъ $a_{b_{c_1}}$ и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ:

$$C(BA) = a_{b_{c_1}}, a_{b_{c_2}}, \ldots, a_{b_{c_n}}. \qquad (6)$$

Съ другой стороны, найдемъ:

$$CB = b_{c_1}, b_{c_2}, \ldots, b_{c_n};$$

чтобы образовать перестановку $(CB)A$, слѣдуетъ выполнить въ перестановкѣ CB замѣщенія, которыя ведутъ отъ E къ A; для этого элементъ 1 замѣнится элементомъ a_1, элементъ 2—элементомъ a_2, и т. д.; элементъ b_{c_1} замѣнится элементомъ $a_{b_{c_1}}$ и т. д.; мы получимъ такую же перестановку, какъ и въ формулѣ (6):

$$(CB)A = a_{b_{c_1}}, a_{b_{c_2}}, \ldots, a_{b_{c_n}} = C(BA).$$

Такимъ образомъ мы доказали справедливость сочетательнаго закона при составленіи перестановокъ [8]). Поэтому можно не писать скобокъ въ обозначеніяхъ $C(BA)$ и $(CB)A$, а изображать символомъ CBA перестановку, которая получается, какъ результатъ составленія перестановокъ A, B и C (въ этой послѣдовательности).

Можно соединять любое число перестановокъ, при чемъ одна и та же перестановка можетъ повторяться нѣсколько разъ.

6. Всякая перестановка A, при соединеніи съ основной перестановкой, остается безъ перемѣны, въ какомъ бы порядкѣ мы ни производили эту операцію, т. е.

$$EA = AE = A.$$

Это предложеніе слѣдуетъ непосредственно изъ опредѣленія составленія перестановокъ: чтобы получить перестановку EA, нужно выполнить

[8]) Провѣримъ это на примѣрѣ. Пусть

$$A = 1, 3, 2, 4; \; B = 3, 4, 1, 2; \; C = 2, 3, 1, 4.$$

Въ такомъ случаѣ

$$BA = 2, 4, 1, 3.$$
$$C(BA) = 4, 1, 2, 3.$$

Такимъ же образомъ

$$CB = 4, 1, 3, 2$$
$$(CB)A = 4, 1, 2, 3.$$

замѣщенія, ведущія отъ E къ A, непосредственно въ перестановкѣ E, такъ что въ результатѣ получимъ вновь перестановку A; перестановка AE получится, если мы въ перестановкѣ A сдѣлаемъ тѣ замѣщенія, которыя отъ основной перестановки E приводятъ къ ней же, т. е. нужно оставить перестановку A безъ измѣненія. Итакъ, перестановка AE, равно какъ и перестановка EA, есть то же, что и A.

Отсюда заключаемъ, что перестановка E имѣетъ при составленіи перестановокъ такое же значеніе, какъ единица при умноженіи чиселъ (или нуль при сложеніи). Въ силу этого, если при составленіи перестановокъ встрѣчается основная перестановка, то она всегда можетъ быть опущена.

7. Одну и ту же перестановку можно взять въ качествѣ составляющей нѣсколько разъ; при этомъ цѣлесообразно обозначать результатъ на подобіе степеней чиселъ:

$$A = A^1, \quad AA = A^2, \quad AAA = A^3, \; \ldots .$$

Такъ же, какъ для степеней чиселъ, и для этихъ своеобразныхъ степеней остается справедливымъ основное равенство

$$A^\mu A^\nu = A^{\mu+\nu}, \tag{7}$$

гдѣ μ и ν суть цѣлыя и положительныя числа и $A^\mu A^\nu$ означаетъ результатъ составленія перестановокъ A^μ и A^ν. Формула эта остается справедливой и для $\mu = 0$ и $\nu = 0$, если только условимся, что

$$A^0 = E; \tag{8}$$

это обозначеніе напрашивается само собою въ виду аналогіи перестановки E съ числомъ 1.

8. Каждой перестановкѣ A соотвѣтствуетъ одна и только одна перестановка A', удовлетворяющая условію

$$A'A = E.$$

Дѣйствительно, если $BA = E$, то по формулѣ (3) имѣемъ:

$$a_{b_1} = 1, \quad a_{b_2} = 2, \; \ldots, \; a_{b_n} = n;$$

такъ какъ элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$, если расположить ихъ въ нѣкоторомъ опредѣленномъ порядкѣ, также совпадаютъ соотвѣтственно съ числами $1, 2, \ldots, n$, то этимъ однозначно опредѣляются значенія элементовъ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ [9]).

---

[9]) Пояснимъ сказанное примѣромъ. Возьмемъ $n = 4$ и $A = 3, 1, 2, 4$, т. е. $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$. Ищемъ B такъ, чтобы $BA = E$. Тогда $a_{b_1} = 1 = a_2$; $a_{b_2} = 2 = a_3$; $a_{b_3} = 3 = a_1$; $a_{b_4} = 4 = a_4$. Слѣдовательно: $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 1$, $b_4 = 4$, и $B = 2, 3, 1, 4$. Повѣркой легко убѣдиться, что $BA = 1, 2, 3, 4 = E$.

Перестановка A', удовлетворяющая условію $A'A = E$, называется обратной по отношенію къ перестановкѣ A.

9. Если A' есть перестановка, обратная относительно перестановки A, то A есть перестановка, обратная относительно A', т. е. если $A'A = E$ и $A''A' = E$, то $A'' = A$.

Дѣйствительно, такъ какъ $A'A = E$, то, согласно пункту 6 этой главы, имѣемъ:

$$A'AA' = A'.$$

Если A'' означаетъ перестановку, обратную относительно A', т. е. $A''A' = E$, то, принимая во вниманіе предыдущее равенство, найдемъ:

$$A''A'AA' = A''A' = E.$$

Если подставимъ $A''A' = E$ въ лѣвую часть равенства $A''A'AA' = E$, то получимъ $AA' = E$, т. е. перестановка A и есть обратная относительно перестановки A', что и требовалось доказать. По аналогіи E съ единицей представляется цѣлесообразнымъ разсматривать перестановку A', какъ (—1)-ую степень перестановки A, откуда слѣдуетъ равенство:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \qquad (9)$$

10. Нетрудно понять, какое значеніе имѣютъ степени перестановокъ съ отрицательными показателями. Положивъ въ формулѣ (7) $\mu = -\nu$, найдемъ:

$$A^{-\nu}A^{\nu} = A^0, \text{ или } A^{-\nu}A^{\nu} = E,$$

т. е. $A^{-\nu}$ означаетъ перестановку, обратную относительно перестановки A^{ν}; теперь формула (7) получаетъ смыслъ и для того случая, когда показатель μ или ν есть отрицательное число.

11. Понятіе объ обратной перестановкѣ даетъ возможность установить въ области перестановокъ дѣйствіе, аналогичное дѣленію.

Дѣйствительно, въ равенствѣ

$$BA = C$$

можно по двумъ даннымъ перестановкамъ C и B, или C и A опредѣлить соотвѣтствующую третью: A или B; для этого служатъ формулы:

$$A = B^{-1}C \quad \text{и} \quad B = CA^{-1}.$$

Докажемъ теперь слѣдующее предложеніе: если перестановки A, M и N удовлетворяютъ условію $AM = AN$, то перестановки M и N тождественны. Это слѣдуетъ изъ равенства $A^{-1}AM = A^{-1}AN$.

Аналогично этому изъ равенства $MA = NA$ слѣдуетъ $M = N$.

§ 51. Изображеніе перестановокъ въ циклахъ.

1. Чтобы получить представленіе обо всей совокупности перестановокъ изъ данныхъ n элементовъ, пользуются выраженіемъ перестановокъ при помощи циклов ъ. Эти циклы, къ опредѣленію которыхъ мы теперь перейдемъ, весьма облегчаютъ также составленіе перестановокъ. [10])

---

[1]) Слѣдующія за этимъ общія разсужденія будутъ понятнѣе, если читатель уяснитъ себѣ ихъ предварительно на частномъ примѣрѣ.

Перестановка вполнѣ опредѣляется, если указано, какой элементъ стоитъ на каждомъ мѣстѣ; какимъ образомъ это указано — совершенно безразлично. Перестановка можетъ быть непосредственно написана въ той послѣдовательности элементовъ, въ какой они слѣдуютъ другъ за другомъ:

4, 6, 9, 7, 1, 8, 5, 2, 3. [1]

Можетъ быть иначе указано, что на первомъ мѣстѣ стоитъ 4, на второмъ 6, на третьемъ 9 и т. д.

Одинъ изъ наиболѣе важныхъ способовъ обозначенія перестановокъ состоитъ въ распредѣленіи элементовъ въ циклы. Заключается этотъ способъ въ слѣдующемъ.

Въ нашей перестановкѣ [1] на первомъ мѣстѣ стоитъ 4; напишемъ это такъ: 1,4 — и будемъ понимать это обозначеніе въ томъ смыслѣ, что на 1-омъ мѣстѣ стоитъ 4. Закончивъ элементомъ 4, мы посмотримъ теперь, какой элементъ стоитъ на 4-мъ мѣстѣ: оказывается 7; мы выразимъ это такъ: 1, 4, 7. Теперь посмотримъ, какой элементъ стоитъ на 7-мъ мѣстѣ; оказывается 5; пишемъ 1, 4, 7, 5. Теперь смотримъ, какой элементъ стоитъ на 5-мъ мѣстѣ; оказывается 1. Когда мы вернулись къ элементу, съ котораго начали, то мы говоримъ, что получили циклъ (1, 4, 7, 5). Если мы будемъ принимать, что въ этомъ циклѣ за 5 вновь слѣдуетъ 1, то каждое число указываетъ здѣсь элементъ, стоящій на томъ мѣстѣ, которое обозначается предыдущимъ числомъ. Этотъ циклъ можно начать съ какого угодно элемента, напримѣръ, такъ (4, 7, 5, 1); и въ этомъ видѣ онъ будетъ по прежнему указывать, что на 4-мъ мѣстѣ стоитъ 7, на 7-мъ — 5, на 5-мъ — 1 и на 1-мъ — 4.

Закончивъ циклъ, беремъ какой либо изъ элементовъ, въ него не вошедшихъ, напримѣръ 2; на 2-мъ мѣстѣ стоитъ 6, — пишемъ 2, 6: на 6-мъ мѣстѣ стоитъ 8, пишемъ 2, 6, 8; на 8-мъ мѣстѣ стоитъ 2: циклъ замкнулся: (2, 6, 8).

Беремъ, наконецъ, одинъ изъ элементовъ, еще не появившихся, напримѣръ 3; на третьемъ мѣстѣ стоитъ 9, а на девятомъ 3; мы получаемъ такимъ образомъ третій циклъ (3, 9). Наша перестановка можетъ быть, такимъ образомъ, представлена въ слѣдующемъ видѣ:

(1, 4, 7, 5) (2, 6, 8) (3, 9).

По этому обозначенію, очевидно, легко возстановить перестановку [1], такъ какъ здѣсь вполнѣ указано, какой элементъ стоитъ на 1-мъ мѣстѣ, какой на второмъ и т. д.

Возможны циклы, состоящіе только изъ одного элемента; это имѣетъ мѣсто, если элементъ выражается тѣмъ же числомъ, что и занимаемое имъ мѣсто; напримѣръ, перестановка

1, 3, 5, 4, 2

Разсмотримъ нѣкоторую опредѣленную перестановку

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

и пусть r означаетъ любое число въ ряду $1, 2, \ldots, n$.

Въ перестановкѣ A на r-омъ мѣстѣ находится элементъ a_r,

" " " " a_r-омъ " " " a_{a_r}, который мы обозначимъ черезъ a'_r

" " " " a'_r-омъ " " " $a_{a'_r}$, который мы обозначимъ черезъ a_r'', и т. д.

Мы получимъ такимъ образомъ рядъ:

$$r,\ a_r,\ a'_r,\ a_r'',\ \ldots,$$

въ которомъ каждый элементъ опредѣляется однозначно какъ предыдущимъ, такъ и послѣдующимъ элементомъ.

Такъ какъ число элементовъ не превышаетъ n, а рядъ можетъ быть продолженъ неопредѣленно, то элементы его будутъ повторяться; первымъ повторится элементъ r [11]).

Если $a_r^{(g-1)} = r$, то мы имѣемъ замкнутый циклъ изъ g членовъ, изображаемый такъ:

$$\mathfrak{C}_1 = (r,\ a_r,\ a'_r,\ \ldots\ a_r^{(g-2)}).$$

Этотъ символъ нужно понимать такъ, что за послѣднимъ элементомъ $a_r^{(g-2)}$ вновь слѣдуетъ первый элементъ r.

Можетъ случиться, что число элементовъ g цикла равно единицѣ; тогда $a_r = r$, и элементъ r находится на одномъ и томъ же мѣстѣ, какъ въ главной перестановкѣ E, такъ и въ перестановкѣ A.

Если за исходный пунктъ возьмемъ не элементъ r, а элементъ a_r или a_r', то получимъ такіе циклы:

$$(a_r,\ a_r',\ \ldots,\ a_r^{(g-2)},\ r)$$

$$(a_r',\ a_r'',\ \ldots,\ a_r^{(g-2)},\ r,\ a_r);$$

въ циклахъ изображается такъ:

(1) (2, 3, 5) (4).

Циклъ (1) показываетъ, что 1 стоитъ на 1-мъ мѣстѣ, циклъ (4) показываетъ, что 4 стоитъ на 4-мъ мѣстѣ.

Въ текстѣ изложены общія основанія этой теоріи.

[11]) Дѣйствительно, такъ какъ каждый элементъ вполнѣ опредѣляетъ собою предыдущій элементъ, то не можетъ повториться какой нибудь изъ слѣдующихъ за r элементовъ безъ того, чтобы раньше не повторился элементъ r.

такіе циклы разсматриваются, какъ не существенно различные.

2. Если $g < n$, то циклъ $\mathfrak{C}_1$ не исчерпываетъ еще всѣхъ элементовъ перестановки. Въ этомъ случаѣ беремъ какой либо элементъ s перестановки, не содержащійся въ циклѣ $\mathfrak{C}_1$, и составляемъ новый циклъ изъ k членовъ:

$$\mathfrak{C}_2 = (s, a_s, a_s', \ldots, a_s^{(k-2)}).$$

Будемъ продолжать такъ, пока не исчерпаемъ всѣхъ n элементовъ. Такимъ образомъ перестановка A цѣликомъ разлагается на циклы, а эти послѣдніе вполнѣ опредѣляются перестановкой A. Также и обратно: совокупность полученныхъ цикловъ вполнѣ опредѣляетъ собою перестановку A: въ этихъ циклахъ точно указано, какой элементъ находится на томъ или на другомъ, напримѣръ, на s-омъ мѣстѣ. Поэтому перестановка A можетъ быть однозначно выражена при помощи своихъ цикловъ:

$$A = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots, \tag{1}$$

причемъ послѣдовательность, въ какой пишутся циклы $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ не имѣетъ значенія.

Одночленные циклы означаютъ элементы, мѣста которыхъ въ перестановкѣ A тѣ же, что и въ E; въ формулѣ (1) этихъ цикловъ не пишутъ, такъ что въ этой формулѣ обозначены только тѣ элементы, мѣста которыхъ въ перестановкѣ A не таковы, какъ въ E.

Главная перестановка E сама состоитъ исключительно изъ одночленныхъ цикловъ.

Двучленные циклы представляютъ собою не что иное, какъ транспозиціи, о которыхъ мы говорили въ § 49.[12])

Примѣръ. Пусть $n = 7$ и

$$A = (5, 2, 3)(4, 1, 7, 6). \tag{2}$$

Формула (2) выражаетъ, что

на 1-омъ мѣстѣ находится элементъ 7 (онъ слѣдуетъ за 1),
„ 2-омъ „ „ „ 3,
„ 3-ьемъ „ „ „ 5 (онъ слѣдуетъ циклически за 3),
„ 4-омъ „ „ „ 1,
„ 5-омъ „ „ „ 2,
„ 6-омъ „ „ „ 4,
„ 7-омъ „ „ „ 6,

[12]) Это не совсѣмъ такъ. Въ той системѣ, которой придерживается авторъ, транспозиція есть нѣкоторая субституція (какъ это и опредѣлено въ § 49), а двучленный циклъ есть нѣкоторая перестановка двухъ элементовъ. Двучленный циклъ получается изъ основной перестановки при помощи транспозиціи. Подъ транспозиціей (a, b) слѣдуетъ разумѣть ту транспозицію, посредствомъ которой перестановка (a, b) получается изъ перестановки E.

такъ что перестановка A представится такъ:

$$A = 7,\ 3,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6.$$

3. Составленіе перестановокъ весьма упрощается, если представлять ихъ въ видѣ цикловъ. Даны перестановки

$$A = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$$

$$\text{и}\quad B = b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n.$$

Нужно найти перестановку

$$BA = a_{b_1},\ a_{b_2},\ \ldots,\ a_{b_n},$$

или циклы, на которые она разлагается. Если r есть произвольный элементъ, то среди цикловъ, на которые разлагается перестановка B, есть такая часть: $(r,\ b_r,\ \ldots)$; также въ циклахъ перестановки A найдется часть $(b_r,\ a_{b_r},\ \ldots)$, а въ искомыхъ циклахъ перестановки BA есть такая часть $(r,\ a_{b_r},\ \ldots)$.

Отсюда слѣдуетъ простое правило: чтобы составить циклы перестановки BA, нужно за любымъ элементомъ r писать тотъ элементъ a_{b_r}, который въ перестановкѣ A слѣдуетъ за элементомъ b_r, т. е. за тѣмъ элементомъ, который въ перестановкѣ B слѣдуетъ за элементомъ r.

4. Мы освоимся съ этимъ правиломъ, разсмотрѣвъ два - три примѣра. Возьмемъ $n = 7$,

$$A = (5,\ 2,\ 3)\ (4,\ 1,\ 7,\ 6)$$

$$\text{и}\quad B = (1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 3)\ (5,\ 6).$$

Тогда

$$BA = (1,\ 3,\ 7,\ 5,\ 4,\ 6,\ 2)$$ [13].

Такимъ образомъ перестановка BA имѣетъ всего одинъ циклъ. Иначе:

$$BA = 3,\ 1,\ 7,\ 6,\ 4,\ 2,\ 5.$$

Соединимъ перестановку BA съ перестановкой $C = (4, 7)$, въ которой элементы 1, 2, 3, 5 и 6 занимаютъ тѣ же мѣста, что и въ главной перестановкѣ. Получимъ:

$$CBA = (1,\ 3,\ 7,\ 6,\ 2)\ (4,\ 5).$$

[13]) Въ B за 1 слѣдуетъ 2, а въ A за 2 слѣдуетъ 3: поэтому въ BA за 1 слѣдуетъ 3; далѣе въ B за 3 слѣдуетъ 1, а въ A за 1 слѣдуетъ 7; поэтому въ BA за 3 слѣдуетъ 7 и т. д.

5. Пользуясь циклами, весьма легко находить степени перестановки.

Для того, чтобы изъ перестановки A получить перестановку A^2, нужно писать циклы перестановки A, постоянно пропуская одинъ элементъ: т. е. за первымъ элементомъ каждаго цикла нужно писать третій, за третьимъ—пятый и т. д.[14])

Аналогично получается перестановка A^3, если въ циклахъ A пропускать черезъ два элемента, и т. д.

Такъ, для разсмотрѣнной выше перестановки A имѣемъ:

$$A^2 = (5,\ 3,\ 2)\ (4,\ 7)\ (1,\ 6)$$
$$A^3 = (5)\ (2)\ (3)\ (4,\ 6,\ 7,\ 1).$$

Мы видимъ, что при возвышеніи перестановки въ степень циклъ ея можетъ разложиться на два цикла или болѣе. Если мы образуемъ перестановку A^{12}, то получимъ основную перестановку, т. е. въ нашемъ примѣрѣ $A^{12} = E$.

6. Если мы будемъ представлять перестановки въ видѣ цикловъ, опуская при этомъ одночленные циклы, то любой циклъ изъ g членовъ самъ по себѣ представитъ нѣкоторую опредѣленную перестановку. Напримѣръ, при $n = 7$

$$(5,\ 3,\ 2) = 1,\ 5,\ 2.\ 4,\ 3,\ 6,\ 7.$$

При такомъ условіи два или нѣсколько рядомъ написанныхъ цикла, не имѣющихъ ни одного общаго элемента, представляютъ результатъ состав-

---

[14]) Если намъ нужно составить, скажемъ, 2-ую степень цикла

$$(1,\ 3,\ 4.\ 2,\ 5),$$

то это значитъ составить перестановку

$$(1,\ 3,\ 4.\ 2,\ 5)\ (1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5).$$

Въ первомъ циклѣ за 1 слѣдуетъ 3, а во второмъ за 3 - 4: въ результатѣ за 1 слѣдуетъ 4. Въ первомъ циклѣ за 4 слѣдуетъ 2, а во второмъ за 2: — 5; въ результатѣ за 4 слѣдуетъ 5 и т д. Такимъ образомъ получимъ

$$(1,\ 3,\ 4,\ 2,\ 5)^2 = (1,\ 4,\ 5,\ 3,\ 2).$$

Вообще указанное въ текстѣ правило слѣдуетъ изъ того, что изложено въ пунктѣ 3; нужно только принять во вниманіе, что въ данномъ случаѣ $B = A$, такъ что $b_r = a_r$. и потому циклъ перестановки A^2 начнется такъ $(r,\ a_{a_r}\ .\ .\ .\ .)$.

ленія перестановокъ, представленныхъ отдѣльными циклами[15]).

Если мы соединимъ циклъ $(1, 2, 3, \ldots, g-1)$ съ транспозиціей $(g, g-1)$, то получимъ:

$$(g, g-1)\ (1, 2, 3, \ldots, g-1) = (1, 2, 3, \ldots, g-1, g).$$

Отсюда слѣдуетъ, что циклъ, содержащій g членовъ, можетъ быть разложенъ на $g-1$ транспозицій:

$$(1, 2, 3, \ldots g) = (g, g-1)\ (g-1, g-2) \ldots (2,1).$$

Правую часть этого равенства нужно понимать какъ перестановку, которая получится въ результатѣ составленія перестановокъ, представленныхъ отдѣльными или двучленными циклами.

Изъ сказаннаго заключаемъ, что всякій циклъ представляетъ собою **четную** или **нечетную** перестановку, смотря по тому, содержитъ ли онъ нечетное или четное число членовъ.

Поэтому данная перестановка представляетъ собою четную или нечетную въ зависимости отъ того, есть ли среди цикловъ, на которые разлагается данная перестановка, четное или нечетное число такихъ, которые содержатъ четное число членовъ.

§ 52. Группы перестановокъ.

1. Въ § 50 мы вслѣдъ за составленіемъ перестановокъ разсмотрѣли, какой смыслъ имѣютъ степени A^2, A^3, ... какой-либо перестановки A. Такъ какъ изъ n элементовъ можно получить лишь конечное число перестановокъ, то въ ряду

$$A,\ A^2,\ A^3,\ A^4, \ldots$$

какая нибудь перестановка раньше или позже должна повториться.

Если перестановка, представленная степенью A^k, повторится вновь въ видѣ степени $A^{k+\alpha}$, то изъ равенства

$$A^k = A^{k+\alpha}$$

слѣдуетъ

$$A^\alpha = E.$$

Итакъ, каждой перестановкѣ A соотвѣтствуетъ нѣкоторый опредѣленный наименьшій положительный показатель α, при

[15]) Напримѣръ, перестановку $C = 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4 = (5, 3, 2)\ (4, 7)$ можно разсматривать, какъ результатъ составленія AB (или BA) двухъ перестановокъ: $A = (5, 3, 2)$ и $B = (4,7)$.

которомъ A^α совпадаетъ съ главной перестановкой.

Этотъ наименьшій положительный показатель называется порядкомъ перестановки A. Рядъ

$$E,\ A,\ A^2,\ A^3,\ \ldots,\ A^{\alpha-1}$$

содержитъ лишь отличныя другъ отъ друга перестановки; рядъ этогъ называется періодомъ перестановки A, такъ какъ изъ этого, именно, періода, повторяющагося безконечное число разъ, составляется рядъ послѣдовательныхъ степеней перестановки A.

Если возвысить перестановку A въ степень, показатель которой есть число, кратное α, то всегда получимъ основную перестановку E.

2. Система $\mathfrak{G}$ перестановокъ, выбранныхъ изъ совокупности всѣхъ перестановокъ изъ n элементовъ,

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_g \qquad (\mathfrak{G})$$

называется группой, если она удовлетворяетъ слѣдующему условію.

Если A_h и A_k представляютъ собою двѣ различныя или одну и ту же перестановку изъ системы $\mathfrak{G}$, то составленная изъ нихъ перестановка

$$A_h A_k = A_l$$

также заключается въ числѣ перестановокъ системы $\mathfrak{G}$.

Порядкомъ g группы называется число перестановокъ, изъ которыхъ состоитъ система $\mathfrak{G}$.

Согласно эгому опредѣленію, совокупность всѣхъ перестановокъ изъ n элементовъ составляетъ группу порядка $n!$

Однако, есть группы съ меньшимъ числомъ членовъ. Разысканіе и изслѣдованіе такихъ группъ составляетъ фундаментальную задачу алгебры.

Такъ, напримѣръ, періодъ перестановки A есть группа степени α. Дѣйствительно, какія бы мы ни соединяли степени A, въ результатѣ всегда получимъ нѣкоторую степень этой же перестановки.

Замѣтимъ еще, что совокупность всѣхъ четныхъ перестановокъ изъ n элементовъ составляетъ группу степени $\frac{1}{2}n!$[16])

---

[16]) Такъ какъ каждая четная перестановка можетъ быть составлена изъ четнаго числа транспозицій, то перестановка, составленная изъ двухъ четныхъ перестановокъ, также представляетъ собой четную перестановку. Если поэтому S есть совокупность всѣхъ четныхъ перестановокъ, B и A двѣ принадлежащія ей перестановки, то въ ту же совокупность войдетъ и перестановка BA.

3. Если въ группѣ $\mathfrak{G}$ встрѣчается перестановка A (порядка α), то по опредѣленію группы послѣдняя содержитъ всѣ степени перестановки A съ положительными показателями, а слѣдовательно, и степень $A^{\alpha} = E$.

Итакъ, каждая группа заключаетъ въ себѣ главную перестановку E; эта послѣдняя сама по себѣ образуетъ группу порядка 1.

По опредѣленію степеней съ отрицательными показателями, имѣемъ:

$$A^{-k} A^{k} = E.$$

Съ другой стороны, изъ $A^{\alpha} = E$ слѣдуетъ, что $A^{-k} = A^{\alpha - k}$; отсюда заключаемъ: если группа содержитъ перестановку A, то она непремѣнно содержитъ и A^{-k}, т. е. перестановку, обратную перестановкѣ A^{k}.

4. Если какая-либо группа $\mathfrak{G}$ порядка g заключаетъ въ себѣ всѣ элементы нѣкоторой другой группы $\mathfrak{H}$ порядка h, то число h есть дѣлитель числа g.

Это важное предложеніе доказывается слѣдующимъ образомъ.

Обозначимъ перестановки группы $\mathfrak{H}$ черезъ

$$B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_h. \qquad (1)$$

По условію, всѣ эти перестановки заключаются въ группѣ $\mathfrak{G}$; если этими элементами группа $\mathfrak{G}$ не исчерпывается, то назовемъ черезъ A перестановку, входящую въ число элементовъ группы $\mathfrak{G}$, но не содержащуюся въ группѣ $\mathfrak{H}$. Соединяя перестановку A съ перестановками (1), получимъ рядъ перестановокъ

$$AB_1,\ AB_2,\ \ldots\ AB_h. \qquad (2)$$

Эти h перестановокъ всѣ входятъ въ составъ группы $\mathfrak{G}$ и, кромѣ того, всѣ онѣ отличны другъ отъ друга и отъ h перестановокъ (1). Въ самомъ дѣлѣ, если бы, напримѣръ, $AB_r = AB_s$, то мы имѣли бы (согласно § 50, п. 11), $B_r = B_s$, что невозможно: если бы $AB_r = B_s$, то $A = B_s B_r^{-1}$, т. е. перестановка A заключалась бы въ группѣ $\mathfrak{H}$, что противорѣчитъ нашему условію.

Въ силу этихъ соображеній перестановки (1) и (2) составляютъ вмѣстѣ $2h$ перестановокъ группы $\mathfrak{G}$. Если ими еще не исчерпывается группа $\mathfrak{G}$, то, выбравъ изъ этой группы элементъ A', котораго нѣтъ въ числѣ перестановокъ (1) и (2), составимъ рядъ:

$$A' B_1,\ A'B_2,\ \ldots\ A'B_h. \qquad (3)$$

Всѣ эти перестановки во первыхъ содержатся въ группѣ $\mathfrak{G}$, во вторыхъ всѣ отличны другъ отъ друга и отъ перестановокъ (1) и (2). Дѣйствительно, если бы $A'B_r = AB_s$, то отсюда слѣдовало бы : $A' = AB_s B_r^{-1}$, т. е., въ силу того, что перестановка $B_s B_r^{-1}$ есть одна изъ перестановокъ (1), A', вопреки условію, оказалась бы въ числѣ перестановокъ (2). Такимъ

образомъ системы (1), (2) и (3) представляютъ собою вмѣстѣ $3h$ перестановокъ группы $\mathfrak{G}$. Такъ какъ число перестановокъ группы $\mathfrak{G}$ конечно, то, продолжая то же разсужденіе мы исчерпаемъ всѣ элементы этой группы. Если послѣдній рядъ, который при этомъ получится, будетъ

$$A^{(k-2)}B_1,\ A^{(k-2)}B_2,\ \ldots,\ A^{(k-2)}B_h, \qquad (4)$$

то имѣемъ:

$$g = hk,$$

и такимъ образомъ предложеніе наше доказано.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

Число $n!$ дѣлится нацѣло на порядокъ любой группы перестановокъ и на порядокъ любой перестановки.

5. Нетрудно для любого числа n составить нѣкоторыя простыя группы невысокаго порядка, напримѣръ, періоды отдѣльныхъ перестановокъ. Для алгебры гораздо большее значеніе имѣетъ полученіе группъ болѣе высокихъ порядковъ; мы, однако, еще очень далеки отъ полнаго рѣшенія этой въ высокой степени важной задачи. Сравнительно нетрудно проникнуть въ строеніе группъ для тѣхъ простѣйшихъ случаевъ, когда $n = 3$ и $n = 4$.

Для обозначенія перестановокъ мы будемъ обыкновенно выражать ихъ въ циклахъ, при чемъ для простоты будемъ обозначать главную перестановку E символомъ (1) въ виду той роли, которую она играетъ при составленіи перестановокъ.

Для $n=3$ мы имѣемъ шесть перестановокъ.

(1), (1, 2). (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3) и (1, 3, 2).

Здѣсь мы имѣемъ группу четныхъ перестановокъ (1), (1, 2, 3) и (1, 3, 2) порядка 3, которая въ то же время представляетъ собою періодъ перестановки (1, 2, 3) или (1, 3, 2); далѣе здѣсь есть еще три группы второго порядка, именно періоды перестановокъ (1, 2), (1, 3) и (2, 3). Другихъ группъ здѣсь нѣтъ.

6. При $n = 4$ мы имѣемъ 24 перестановки, которыя можно слѣдующимъ образомъ изобразить посредствомъ ихъ цикловъ:

(1) Главная перестановка;

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) двучленные циклы,

(1, 2) (3, 4), (1, 3) (2, 4), (1, 4) (2, 3) по два двучленныхъ цикла,

(2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 3)
(1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 2) трехчленные циклы,

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4)
(1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2) четырехчленные циклы.

Такимъ образомъ исчерпаны всѣ 24 перестановки изъ 4 элементовъ. Группа четныхъ перестановокъ содержитъ слѣдующія 12 перестановокъ:

$$(1),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3),$$
$$(2,3,4),\ (2,4,3),\ (1,3,4),\ (1,4,3),$$
$$(1,2,4),\ (1,4,2),\ (1,2,3),\ (1,3,2).$$

Въ ней содержится слѣдующая группа четвертаго порядка:

$$(1),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,4).$$

Послѣдняя группа имѣетъ особенно важное значеніе для рѣшенія уравненія четвертой степени; аналогичное значеніе имѣютъ три группы 8-го порядка, которыя входятъ въ составъ группы 24-го порядка, состоящей изъ всѣхъ перестановокъ. Одна изъ этихъ трехъ группъ 8-го порядка есть:

$$(1),\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3),$$
$$(1,2),\ (3,4),\ (1,4,2,3),\ (1,3,2,4).$$

Прочія двѣ группы получаются изъ этой, если замѣнимъ другъ другомъ элементы 1 и 3 или элементы 1 и 4.

§ 53. Сочетанія безъ повтореній.

1. Данъ комплексъ N изъ n элементовъ. Сколькими различными способами можно отобрать m элементовъ этого комплекса? Другими словами, сколько различныхъ комплексовъ M, содержащихъ по m элементовъ каждый, можно получить изъ нѣкотораго комплекса содержащаго всего n элементовъ.

Комплексы M называются сочетаніями элементовъ комплекса N по m; чтобы указать на то, что одинъ и тотъ же элементъ комплекса N не можетъ дважды встрѣчаться въ одномъ и томъ же комплексѣ M, комплексы M называютъ также сочетаніями безъ повтореній.

Опредѣлимъ число сочетаній безъ повтореній изъ n элементовъ по m въ каждомъ. Обозначимъ это число символомъ $B_m^{(n)}$. Вопросъ, который мы поставили, имѣетъ смыслъ лишь въ томъ случаѣ, когда число m не превышаетъ n. Если $n = m$, то можно получить только одинъ комплексъ M, который окажется тождественнымъ съ комплексомъ N; слѣдовательно,

$$B_n^{(n)} = 1. \tag{1}$$

Легко также рѣшить нашу задачу и въ томъ случаѣ, когда $m = 1$.

Дѣйствительно, тогда искомыя сочетанія сведутся къ элементамъ комплекса N, взятымъ порознь, а потому

$$B_1^{(n)} = n. \qquad (2)$$

Предположимъ далѣе, что $n = 3$; изъ элементовъ a, b и c мы получимъ слѣдующія сочетанія:

$$\begin{array}{lllll} m = 1: & a, & b, & c; & B_1^{(3)} = 3, \\ m = 2: & bc, & ca, & ab; & B_2^{(3)} = 3, \\ m = 3: & & abc; & & B_3^{(3)} = 1. \end{array}$$

Подобнымъ образомъ нетрудно найти непосредственно числа $B_m^{(n)}$ для ближайшихъ случаевъ, когда $n = 1$, 5, 6. Займемся теперь рѣшеніемъ нашей задачи въ общемъ видѣ.

Составимъ всѣ перестановки комплекса N, и отберемъ отъ каждой перестановки m первыхъ ея элементовъ; мы тогда получимъ всѣ безъ исключенія комплексы M, но каждый изъ нихъ при этомъ встрѣчается не одинъ разъ, а нѣсколько разъ. Разсмотримъ, сколько разъ получается при этомъ способѣ одинъ и тотъ же комплексъ M. Обозначимъ одну изъ перестановокъ комплекса N черезъ

$$A = \overline{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m}\ \ a_{m+1},\ a_{m+2},\ \cdots\ a_n.$$

Черта указываетъ на то, что перестановка A раздѣлена на двѣ части A_1 и A_2:

$$A_1 = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m.\quad A_2 = a_{m+1},\ a_{m+2},\ \ldots,\ a_n.$$

Образуемъ всѣ перестановки A и отдѣлимъ отъ каждой элементы A_1; эти послѣдніе представятъ собою искомые комплексы M.

При этомъ мы будемъ получать отличные другъ отъ друга комплексы M всякій разъ, когда для полученія перестановки A нѣкоторые элементы комплекса A_1 замѣняются элементами комплекса A_2. Изъ тѣхъ же перестановокъ A, которыя образованы перемѣщеніями элементовъ одного и того же комплекса A_1 или A_2, мы будемъ получать одинъ и тотъ же комплексъ M. Поэтому каждый комплексъ M повторится столько разъ, сколькими способами можно скомбинировать какую либо перестановку элементовъ A_1 съ нѣкоторой перестановкой элементовъ A_2, т. е. всего $m!\,(n-m)!$ разъ. Такъ какъ число перестановокъ A равно $n!$, а число комплексовъ M равно $B_m^{(n)}$, то имѣемъ:

$$m!\,(n-m)\ B_m^{(n)} = n!$$

слѣдовательно,

$$B_m^{(n)} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\ {}^{*)} \qquad (3)$$

Пользуясь формулой § 48 (3), это выраженіе можно представить еще въ двухъ слѣдующихъ видахъ:

$$B_m^{(n)} = \frac{n(n-1)\ \ldots\ (m+1)}{1.2.3\ \ldots\ (n-m)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1)}{1.2.3\ \ldots\ m}. \qquad (4)$$

Хотя числа $B_m^{(n)}$ представлены нами въ видѣ дробей, но по существу это числа цѣлыя, т. е. въ дробяхъ (3) и (4) числитель дѣлится на знаменателя. Поэтому, принимая во вниманіе вторую дробь въ формулѣ (4), мы можемъ высказать слѣдующее предложеніе.

Произведеніе m любыхъ послѣдовательныхъ чиселъ натуральнаго ряда дѣлится нацѣло на первыя m чиселъ этого ряда.

Формула (3) показываетъ, что число $B_m^{(n)}$ остается безъ перемѣны, если замѣнить число m числомъ $n-m$, т. е.

$$B_m^{(n)} = B_{n-m}^{(n)}. \qquad (5)$$

При выводѣ формулъ (3) и (5) мы молчаливо предполагали, что $m < n$. Если желаемъ, чтобы эти формулы были справедливы и для случая $n = m$, то нужно принять, какъ опредѣленія, слѣдующія равенства:

$$0! = 1, \quad B_0^{(n)} = 1. \qquad (6)$$

При такомъ условіи формула (3) справедлива также при $m = 0$.

2. Мы теперь покажемъ другой способъ нахожденія чиселъ $B_m^{(n)}$; при этомъ мы будемъ имѣть случай познакомиться съ нѣкоторыми новыми свойствами этихъ чиселъ.

Присоединимъ къ элементамъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ комплекса N еще одинъ элементъ a_{n+1}; тогда получимъ новый комплексъ N', состоящій изъ $n+1$ элементовъ:

$$N' = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}.$$

Сочетанія M' этихъ элементовъ по m въ каждомъ можно получить

*) Числа $B_m^{(n)}$ изображаются еще знакомъ $\binom{n}{m}$ или знакомъ n_m. Символъ $B_m^{(n)}$ напоминаетъ названіе „биноміальный коэффиціентъ“, которое также присваивается числамъ $B_m^{(n)}$. Но объ этомъ рѣчь впереди.

слѣдующимъ образомъ: выписываемъ сперва всѣ сочетанія M комплекса N, и затѣмъ присоединяемъ къ нимъ тѣ сочетанія, которыя получатся, если къ каждому сочетанію комплекса N по $m-1$ элементовъ присоединимъ новый элементъ a_{n+1}. Въ силу этихъ соображеній мы получаемъ рекуррентную формулу (§ 4):

$$B_m^{(n+1)} = B_m^{(n)} + B_{m-1}^{(n)} \,{}^{*}). \qquad (7)$$

Пользуясь этой формулой, а также формулами $B_0^{(n)} = 1$ и $B_n^{(n)} = 1$, мы можемъ опредѣлить числа $B_m^{(n+1)}$ для любого $m \leqq n+1$, если только найдены числа $B_m^{(n)}$ для всякаго $m \leqq n$. Такимъ образомъ числа $B_m^{(n)}$ всѣ однозначно опредѣляются равенствомъ (7) и двумя частными случаями:

$$B_0^{(n)} = 1, \quad B_n^{(n)} = 1. \qquad (8)$$

Мы можемъ теперь провѣрить справедливость формулъ (7) и (8): именно, значенія, получаемыя изъ равенствъ (3), превращаютъ ихъ въ тождества.

Равенство (7) даетъ намъ еще непосредственное доказательство того, что $B_m^{(n)}$ суть цѣлыя числа: для наименьшихъ значеній числа n мы убѣдимся въ этомъ непосредственнымъ вычисленіемъ, и затѣмъ, пользуясь формулой (7), мы докажемъ по способу совершенной индукціи справедливость нашего предложенія при любомъ значеніи n.

Формула (7) сравнительно съ общей формулой (3) болѣе удобна для послѣдовательнаго нахожденія чиселъ $B_m^{(n)}$: числа ряда $B_m^{(n+1)}$ получатся изъ чиселъ ряда $B_m^{(n)}$, если складывать каждыя два послѣдовательныхъ числа этого ряда. Такъ, напримѣръ, для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ имѣемъ:

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

3. Найденные результаты мы примѣнимъ къ рѣшенію слѣдующей

*) Эта формула получаетъ смыслъ и при $m=0$ и даже при любомъ отрицательномъ m, если только условиться при отрицательномъ m считать число $B_m^{(n)}$ равнымъ нулю. Точно также, если примемъ $B_m^{(n)} = 0$ при $m > n$, то наша формула будетъ справедлива при любой парѣ цѣлыхъ значеній чиселъ m и n.

геометрической задачи.

Дана система изъ n точекъ N и число $m < n$; сколько m-сторонниковъ можно построить на данныхъ n точкахъ, какъ на вершинахъ?

По § 48 каждая система M, состоящая изъ m точекъ нашего комплекса, дастъ $\frac{1}{2}(m-1)!$ различныхъ m-сторонниковъ; а такъ какъ системъ M имѣется всего $B_m^{(n)}$, то число всѣхъ m-сторонниковъ, которые можно получить изъ системы точекъ N, выразится такъ:

$$\frac{1}{2}(m-1)!\,B_m^{(n)} = \frac{1}{2}\frac{n!(m-1)!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{2m}.$$

§ 54. Сочетанія съ повтореніями.

Поставимъ теперь шире вопросъ, которымъ мы занимались въ предыдущемъ параграфѣ.

1. Данъ комплексъ N, содержащій n элементовъ:

$$N = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n;$$

изъ этихъ элементовъ составлены комплексы M по m элементовъ въ каждомъ, при чемъ одинъ и тотъ же элементъ можетъ встрѣчаться нѣсколько разъ въ одномъ и томъ же комплексѣ M.

Эти комплексы M называются сочетаніями съ повтореніями изъ n элементовъ по m въ каждомъ.—Требуется опредѣлить число этихъ сочетаній, которое обозначимъ черезъ $C_m^{(n)}$.

Замѣтимъ, что здѣсь намъ нѣтъ надобности ограничивать себя условіемъ, что $m < n$; m и n суть любыя цѣлыя положительныя числа.

Если $m = 1$, то намъ для составленія комплекса M придется брать каждый элементъ комплекса N порознь; слѣдовательно,

$$C_1^{(n)} = n. \qquad (1)$$

Если же $n = 1$, то всего получимъ только одинъ комплексъ M, какъ результатъ m-кратнаго повторенія единственнаго элемента даннаго комплекса N, т. е.

$$C_m^{(1)} = 1. \qquad (2)$$

Пусть далѣе комплексъ N содержитъ два элемента a и b, т. е. $n = 2$, а m есть произвольное число; условимся для краткости изображать k-кратное повтореніе одного и того же элемента въ видѣ степени a^k; мы получимъ

тогда слѣдующія сочетанія:

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ \ldots,\ ab^{m-1},\ b^m,$$

т. е.

$$C_m^{(2)} = m + 1. \qquad (3)$$

Непосредственное опредѣленіе числа $C_m^{(n)}$, аналогичное изложенному въ § 53, 1, сопряжено здѣсь съ большими трудностями; мы легче достигнемъ цѣли, пользуясь рекуррентнымъ методомъ, къ которому мы прибѣгли въ § 53, 2.

2. Присоединимъ къ группѣ N еще одинъ элементъ a_{n+1}, т. е. составимъ изъ комплекса N новый комплексъ N', содержащій $n+1$ элементовъ:

$$N' = a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}.$$

Чтобы составить сочетанія M' этихъ элементовъ по m въ каждомъ, выписываемъ сначала всѣ комплексы M, число которыхъ равно $C_m^{(n)}$; этимъ самымъ будутъ исчерпаны всѣ тѣ комплексы M', которые не содержатъ элемента a_{n+1}. Чтобы опредѣлить число прочихъ комплексовъ M, содержащихъ одинъ или нѣсколько разъ элементъ a_{n+1}, отнимаемъ отъ каждаго такого комплекса элементъ a_{n+1}; тогда мы видимъ, что интересующее насъ число комплексовъ M равно числу сочетаній съ повтореніями изъ $n+1$ элементовъ по $m-1$ въ каждомъ, т. е. равно числу $C_{m-1}^{(n+1)}$. Такимъ образомъ получаемъ соотношеніе:

$$C_m^{(n+1)} = C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)}. \qquad (4)$$

Замѣняя въ формулѣ (4) число m соотвѣтственно числами $m-1$, $m-2, \ldots, 2$, получимъ равенства:

$$C_m^{(n+1)} = C_{m-1}^{(n+1)} + C_m^{(n)},$$
$$C_{m-1}^{(n+1)} = C_{m-2}^{(n+1)} + C_{m-1}^{(n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C_2^{(n+1)} = C_1^{(n+1)} + C_2^{(n)}.$$

Сложивъ почленно эти равенства и сдѣлавъ сокращеніе, получимъ:

$$C_m^{(n+1)} = C_1^{(n+1)} + C_2^{(n)} + C_3^{(n)} + \ldots + C_m^{(n)}. \qquad (5)$$

Такъ какъ $C_1^{(n+1)} = n+1$ и $C_1^{(n)} = n$ [см. формулу (1)], то фор-

мулу (5) можно представить въ такомъ видѣ:

$$C_m^{(n+1)} = 1 + C_1^{(n)} + C_2^{(n)} + C_3^{(n)} + \ldots + C_m^{(n)}. \qquad (6)$$

Слѣдовательно, зная для одного числа n всѣ $C_m^{(n)}$, можно опредѣлить помощью формулы (6) всѣ числа $C_m^{(n+1)}$. По формулѣ (2) всѣ числа $C_m^{(1)}$ равны единицѣ; такимъ образомъ числа $C_m^{(n)}$ опредѣляются однозначно формулами (1), (2) и (4).

Легко убѣдиться, что числа $C_m^{(n)}$ удовлетворяютъ тѣмъ же соотношеніямъ, что и числа $B_m^{(m+n-1)}$, т. е. что

$$C_m^{(n)} = B_m^{(m+n-1)}. \qquad (7)$$

Дѣйствительно, сдѣлавъ соотвѣтственныя подстановки въ формулахъ (1), (2) и (4), получимъ:

$$B_1^{(n)} = n, \quad B_m^{(m)} = 1, \quad B_m^{(m+n)} = B_{m-1}^{(m+n-1)} + B_m^{(m+n-1)},$$ [17])

каковыя соотношенія дѣйствительно имѣютъ мѣсто, какъ это слѣдуетъ изъ формулъ § 53, (1), (2) и (7).

По формулѣ § 53 (3) имѣетъ поэтому:

$$C_m^{(n)} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}, \qquad (8)$$

или же

$$C_m^{(n)} = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.\,2\ldots(n-1)} = \qquad (9)$$
$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+m+1)}{1\,.\,2\ldots m}.$$

[17]) Изъ этихъ соотношеній можно сдѣлать слѣдующій выводъ: если мы будемъ подъ $C_m^{(n)}$ разумѣть число $B_m^{(m+n-1)}$, то соотношенія (1), (2) и (4) будутъ удовлетворены; а такъ какъ этими соотношеніями числа $C_m^{(n)}$ опредѣляются вполнѣ, то отсюда вытекаетъ равенство (7).

ГЛАВА X.
Различныя приложенія.

§ 55. Биномъ Ньютона.

1. Сочетанія изъ n элементовъ безъ повтореній находятъ себѣ примѣненіе, когда приходится умножать другъ на друга n двучленныхъ множителей.

Даны произвольныя числа x, a_1, a_2, . . . a_n; требуется составить произведеніе изъ n множителей:

$$F_n = (x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) \ldots (x+a_n). \qquad (1)$$

Для $n=2$ и $n=3$ получимъ:

$$F_2 = x^2 + x(a_1+a_2) + a_1 a_2,$$
$$F_3 = x^3 + x^2(a_1+a_2+a_3) + x(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3) + a_1a_2a_3.$$

Методомъ математической индукціи докажемъ, что вообще

$$F_n = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n. \qquad (2)$$

Въ этой формулѣ коэффиціентъ A_1 означаетъ сумму чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, A_2 означаетъ сумму ихъ произведеній, взятыхъ по два, коэффиціентъ A_3—сумму ихъ произведеній по три и т. д.; наконецъ, A_n означаетъ произведеніе всѣхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Помощью знака Σ (сумма) значенія коэффиціентовъ A выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$A_1 = \Sigma a_1,\ A_2 = \Sigma a_1 a_2,\ A_3 = \Sigma a_1a_2a_3, \ldots$$
$$A_n = a_1 a_2 \ldots a_n. \qquad (3)$$

Если буквы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ изображаютъ нѣкоторыя опредѣленныя числа, а x будемъ разсматривать, какъ знакъ, выражающій всякое произвольное число, то выраженіе F_n называется тогда **цѣлой функціей** n**-ой**

степени отъ x. Числа $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ называются коэффиціентами этой функціи.

2. Въ выраженіяхъ $A_1, A_2, \dots A_n$ отдѣльныя слагаемыя представляютъ собою не что иное, какъ сочетанія безъ повтореній изъ n элементовъ $a_1, a_2, \dots a_n$ соотвѣтственно по одному, по два, по три и т. д. Поэтому число членовъ каждой суммы соотвѣтственно равно:

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ B_3^{(n)},\ \dots\ B_n^{(n)}.$$

Особенный интересъ представляетъ тотъ случай, когда числа $a_1, a_2, \dots a_n$ равны одному и тому же числу, напримѣръ, a. Тогда имѣемъ:

$$A_1 = B_1^{(n)} a,\ A_2 = B_2^{(n)} a^2,\ A_3 = B_3^{(n)} a^3,\ \dots\ A_n = a^n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ равенствъ 1 и 2 вытекаетъ формула:

$$(x+a)^n = x^n + B_1^{(n)} x^{n-1} a + B_2^{(n)} x^{n-2} a^2 + \dots + B_{n-1}^{(n)} x a^{n-1} + a^n. \quad (4)$$

Формула (4), извѣстная подъ названіемъ строки Ньютона, употребляется весьма часто. При ея помощи можно расположить n-ую степень бинома $(x+a)$ по степенямъ чиселъ x и a. Въ формулѣ (4) многочленъ расположенъ по убывающимъ степенямъ x и по возрастающимъ степенямъ a.

Формулу (4) можно представить и въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x+a)^n = x^n + n x^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} a^3 + \dots \quad (5)$$

Для простѣйшихъ случаевъ, когда $n = 2, 3, 4, 5$, получимъ:

$$\begin{aligned} (x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2; \\ (x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3; \\ (x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4; \\ (x+a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставивъ въ формулу (5) $x = 1$, получимъ:

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{1.2} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a^3 + \dots + a^n. \quad (7)$$

Обратно, изъ этой формулы легко получить общую, такъ какъ $(x+a)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$.

Теперь ясно, почему числа

$$B_0^{(n)},\ B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ B_3^{(n)},\ \ldots\ B_{n-1}^{(n)},\ B_n^{(n)}$$

называются биноміальными коэффиціентами *).

3. Если n есть первоначальное число, то биноміальные коэффиціенты всѣ, за исключеніемъ перваго и послѣдняго, т. е.

$$B_1^{(n)},\ B_2^{(n)},\ \ldots,\ B_{n-1}^{(n)}$$

дѣлятся безъ остатка на n; дѣйствительно, изъ § 53 (3) слѣдуетъ:

$$B_m^{(n)} m!(n-m)! = n! \qquad (8)$$

Если при этомъ m больше нуля и меньше n, то числа $m!$ и $(n-m)!$ не дѣлятся на число n, тогда какъ число $n!$ кратно n. Слѣдовательно, множитель $B_m^{(n)}$ долженъ дѣлиться безъ остатка на n (см. § 16, п. 1). Принимая во вниманіе формулу (7), мы отсюда заключаемъ, что число

$$[(a+1)^n - (a+1)] - (a^n - a) \qquad (9)$$

дѣлится нацѣло на число n, если только a есть цѣлое число [1]. Если положить $a = 1$, то отсюда слѣдуетъ, что число $2^n - 2$ дѣлится на число n; если поэтому считать доказаннымъ, что $a^n - a$ при нѣкоторомъ значеніи числа a дѣлится на число n, то число $(a+1)^n - (a+1)$, какъ это слѣдуетъ изъ формулы (9), также дѣлится на n.

Такимъ образомъ мы доказали по способу математической индукціи такъ называемую теорему Фермата: **)

При любомъ цѣломъ значеніи a число $a^n - a$ дѣлится безъ остатка на число n, если только n есть число первоначальное.

*) Свѣдѣнія о биноміальныхъ коэффиціентахъ находимъ впервые у Михаила Штифеля (см. стр. 126), Arithmetica integra, 1544). См. Cantor, Gesch. d. Mathem, Bd. 2, S. 430.

[1]) Разлагая $(a+1)^n$ по строкѣ Ньютона, мы получимъ выраженіе, въ которомъ первый членъ есть a^n, а послѣдній есть 1: всѣ остальные члены, какъ мы видѣли, дѣлятся на n. Отсюда слѣдуетъ, что при цѣлыхъ значеніяхъ a

$$(a+1)^n - a^n - 1$$

дѣлится на n. Это же выраженіе тождественно съ выраженіемъ (9).

**) Fermat. одинъ изъ величайшихъ изслѣдователей по теоріи чиселъ, жилъ въ Тулузѣ (отъ 1601 до 1665 г.); по профессіи онъ былъ собственно не математикъ, а юристъ. На поляхъ переведеннаго имъ Діофантова сочиненія онъ оставилъ цѣлый рядъ глубокихъ замѣчаній и предложеній изъ области ариѳметики; нѣкоторыхъ изъ этихъ предложеній и по сію пору не удалось еще доказать.

4. Перемножимъ почленно слѣдующія два равенства:

$$(1+a)^m = B_0^{(m)} + B_1^{(m)}a + B_2^{(m)}a^2 + \ldots + B_m^{(m)}a^m,$$
$$(1+a)^n = B_0^{(n)} + B_1^{(n)}a + B_2^{(n)}a^2 + \ldots + B_n^{(n)}a^n,$$

гдѣ m и n означаютъ произвольныя цѣлыя числа. Получимъ:

$$(1+a)^{m+n} = B_0^{(m)}B_0^{(n)} + (B_0^{(m)}B_1^{(n)} + B_1^{(m)}B_0^{(n)})\,a$$
$$+ (B_0^{(m)}B_2^{(n)} + B_1^{(m)}B_1^{(n)} + B_2^{(m)}B_0^{(n)})\,a^2 + \ldots$$

Съ другой стороны, по правилу бинома имѣемъ также:

$$(1+a)^{m+n} = B_0^{(m+n)} + B_1^{(m+n)}a + B_2^{(m+n)}a^2 + \ldots$$

Изъ сравненія правыхъ частей послѣднихъ двухъ равенствъ выводимъ слѣдующія соотношенія между биноміальными коэффиціентами:

$$B_0^{(m+n)} = B_0^{(m)}B_0^{(n)},\quad B_1^{(m+n)} = B_0^{(m)}B_1^{(n)} + B_1^{(m)}B_0^{(n)},\ \ldots$$

и, вообще, при любомъ значеніи числа ν имѣетъ мѣсто равенство:

$$B_\nu^{(m+n)} = B_0^{(m)}B_\nu^{(n)} + B_1^{(m)}B_{\nu-1}^{(n)} + B_2^{(m)}B_{\nu-2}^{(n)} + \ldots + B_\nu^{(m)}B_0^{(n)}. \quad (10)$$

(Число $B_\nu^{(n)}$ обращается въ нуль, если $\nu > n$).

Равенствомъ (10) мы воспользуемся впослѣдствіи при доказательствѣ одного весьма важнаго предложенія.

§ 56. Ариѳметическіе ряды.

1. Расположенный въ опредѣленномъ порядкѣ рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое послѣдующее отличается отъ своего предыдущаго на одно и то же число, называется **ариѳметической прогрессіей** или **ариѳметическимъ рядомъ** (§ 35, 1).

Ариѳметическую прогрессію можно опредѣлить еще, какъ рядъ чиселъ, въ которомъ **разность двухъ какихъ либо послѣдовательныхъ чиселъ есть величина постоянная**. Эта постоянная разность называется **разностью ариѳметической прогрессіи**.

Рядъ натуральныхъ чиселъ образуетъ ариѳметическую прогрессію съ разностью 1: рядъ четныхъ чиселъ и рядъ нечетныхъ чиселъ представляютъ собой каждый въ отдѣльности ариѳметическую прогрессію съ разностью 2; рядъ чиселъ 1, 4, 7, 10, 13, . . . , или 2, 5, 8, 11, 14, . . . , или 0, 3, 6, 9, 12, . . . составляютъ каждый ариѳметическую прогрессію съ разностью 3 и т. д. Члены ариѳметической прогрессіи могутъ быть дробными и отрицательными числами, точно также и разность не должна быть не-

премѣнно цѣлымъ числомъ. Если разность прогрессіи есть число положительное, прогрессія называется **возрастающей**, если разность—число отрицательное, то прогрессія называется **убывающей**.

Въ общемъ видѣ ариѳметическая прогрессія можетъ быть представлена такъ:

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ \ldots$$

Число b есть **разность** прогрессіи, число a называется **начальнымъ членомъ** прогрессіи; значенія чиселъ a и b, конечно, произвольны.

Выраженіе $a+bx$ называется **общимъ членомъ** нашей прогрессіи, если x обозначаетъ число, послѣдовательно принимающее значенія: 0, 1, 2, 3, . . .

2. Весьма часто приходится рѣшать такую задачу: опредѣлить **сумму** n **послѣдовательныхъ членовъ** ариѳметической прогрессіи. Рѣшимъ этотъ вопросъ въ общемъ видѣ посредствомъ формулы, выводомъ которой мы сейчасъ займемся. Положимъ, что нужно опредѣлить сумму S первыхъ n членовъ ариѳметической прогрессіи:

$$S = a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + [a+(n-1)].b. \quad (1)$$

Отсюда

$$S = na + [1+2+3+\ldots+(n-1)]b;$$

такимъ образомъ наша задача свелась къ рѣшенію частнаго ея случая къ нахожденію суммы первыхъ $(n-1)$ натуральныхъ чиселъ:

$$s = 1+2+3+\ldots+(n-1). \quad (2)$$

Величину этой послѣдней суммы легко опредѣлить, если примемъ во вниманіе, что каждыя два числа этой суммы, равно отстоящія отъ начала и конца ея, составляютъ вмѣстѣ одно и то же число n: таковы, напримѣръ, числа 1 и $n-1$, 2 и $n-2$, 3 и $n-3$ и т. д. Такимъ образомъ, если число $n-1$ четное, то члены суммы s распадаются на $\frac{1}{2}(n-1)$ паръ, при чемъ сумма чиселъ каждой пары равна n, такъ что

$$s = \frac{(n-1)n}{2}. \quad (3)$$

Если же число $n-1$ есть число нечетное, то сумма s состоитъ изъ $\frac{1}{2}(n-2)$ такихъ паръ и изолированнаго средняго члена, численная вели-

чина котораго, какъ нетрудно сообразить, равна $\frac{1}{2}n$, такъ что

$$s=\frac{(n-2)n}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2};$$

такимъ образомъ формула (3) остается справедливой и въ этомъ случаѣ.

Теперь, пользуясь формулой (1), легко опредѣлить и сумму S:

$$S=n\left(a+\frac{n-1}{2}b\right). \qquad (4)$$

Какъ примѣръ приложенія этой общей формулы, вычислимъ суммы n первыхъ нечетныхъ чиселъ; для этого въ формулу (4) подставимъ $a=1$, $b=2$; тогда найдемъ:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

3. Рѣшимъ слѣдующую задачу: шары расположены рядами въ видѣ треугольника такъ, что первый рядъ составляетъ одинъ шаръ, второй рядъ составляетъ два шара, третій рядъ составляетъ три шара, ... наконецъ, n-ый рядъ составляетъ n шаровъ. Сколько шаровъ содержитъ весь треугольникъ? Искомое число S найдемъ изъ формулы (4) подстановкой $a=1$ и $b=1$:

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Въ связи съ этой задачей числа вида $\frac{(n+1)n}{2}$ называются треугольными числами. Числа эти въ возрастающемъ порядкѣ суть слѣдующія:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, . . .

Если шары расположены въ видѣ квадрата, такъ что въ каждомъ ряду находится столько шаровъ, сколько есть всего рядовъ, то мы получимъ такъ называемыя прямоугольныя или квадратныя числа:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . .

Изъ формулы

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2 \qquad (5)$$

слѣдуетъ правило: сумма $(n-1)$-го и n-го треугольныхъ чиселъ

равна n-ому квадратному числу; это предложеніе нетрудно также вывести изъ геометрическихъ соображеній.

§ 57. Ариѳметическіе ряды высшаго порядка.

1. Разсмотримъ рядъ A чиселъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по опредѣленному закону:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Найдемъ разности каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ членовъ этого ряда:

$$b_0 = a_1 - a_0,\ b_1 = a_2 - a_1,\ b_2 = a_3 - a_2,$$

Рядъ B чиселъ b, т. е.

$$b_0, b_1, b_2, \ldots$$

называется рядомъ разностей ряда A.

Вычисливъ и для этого ряда разности:

$$c_0 = b_1 - b_0,\ c_1 = b_2 - b_1,\ c_2 = b_3 - b_2, \ \ldots,$$

получимъ новый рядъ C:

$$c_0, c_1, c_2, \ldots,$$

который называется рядомъ вторыхъ разностей ряда A; продолжая подобнымъ же образомъ, мы найдемъ рядъ третьихъ, четвертыхъ, . . . разностей.

Складывая члены ряда B, получимъ:

$$a_n - a_0 = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$$

Такимъ образомъ, чтобы получить $(n+1)$-ый членъ ряда A, нужно къ начальному члену a_0 этого ряда прибавить сумму первыхъ n членовъ ряда B.

Рядъ A представляетъ собою ариѳметическую прогрессію, если члены ряда B всѣ равны другъ другу. Если же члены ряда B сами составляютъ ариѳметическую прогрессію, то рядъ A называется ариѳметическимъ рядомъ второго порядка. Вообще, данный рядъ называютъ ариѳметическимъ рядомъ k-го порядка, если рядъ его первыхъ разностей есть ариѳметическій рядъ $(k-1)$-го порядка: отсюда слѣдуетъ, что въ ариѳметическомъ ряду k-го порядка члены k-го ряда разностей его всѣ равны другъ другу.

Рядъ треугольныхъ чиселъ представляетъ собою ариѳметическій рядъ второго порядка.

2. Пользуясь биноміальными коэффиціентами, можно представить въ общемъ видѣ члены ариѳметическаго ряда k-го порядка: именно, $(n+1)$-ый членъ a_n ариѳметическаго ряда k-го порядка можетъ быть представленъ слѣдующимъ выраженіемъ:

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 B_1^{(n)} + \alpha_2 B_2^{(n)} + \ldots + \alpha_k B_k^{(n)}, \qquad (1)$$

гдѣ коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ не зависятъ отъ числа n; величины α различны для различныхъ рядовъ k-го порядка.

Это предложеніе легко доказывается по способу совершенной индукціи.

Формула наша, очевидно, справедлива въ случаѣ, когда $k=1$; дѣйствительно, члены ариѳметической прогрессіи перваго порядка всѣ имѣютъ форму: $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n$.

Примемъ теперь, какъ это дѣлается при этомъ способѣ доказательства, что наше предложеніе справедливо въ случаѣ ариѳметическаго ряда $(k-1)$-го порядка.

Пусть будетъ A данный ариѳметическій рядъ k-го порядка, а B — рядъ первыхъ разностей ряда A; тогда B есть рядъ $(k-1)$-го порядка. Согласно нашему условію, n-ый членъ ряда B можно представить такъ:

$$b_{n-1} = \alpha_1 B_0^{(n-1)} + \alpha_2 B_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_k B_{k-1}^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Но если, $(n+1)$-ый членъ нѣкотораго ряда имѣетъ форму (1), то въ ряду его первыхъ разностей n-ый членъ имѣетъ видъ:

$$\alpha_1 (B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) + \alpha_2 (B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}) + \ldots + \alpha_k (B_k^{(n)} - B_k^{(n-1)}).$$

Выраженіе это по формулѣ § 53, (7) совпадаетъ съ выраженіемъ (2).

Такъ какъ члены ряда опредѣляются однозначно начальнымъ членомъ ряда и рядомъ его первыхъ разностей, то при надлежащемъ выборѣ начальнаго члена a_0 рядъ членовъ a_n совпадаетъ съ рядомъ A, что и требовалось доказать.

Подставивъ въ формулу (1) послѣдовательно $n = 0, 1, 2, \ldots, k$, получимъ:

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 \\ a_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \\ a_2 &= \alpha_0 + B_1^{(2)} \alpha_1 + \alpha_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_k &= \alpha_0 + B_1^{(k)} \alpha_1 + B_2^{(k)} \alpha_2 + \ldots + \alpha_k; \end{aligned}$$

изъ этихъ равенствъ можно опредѣлить коэффиціенты α посредствомъ $k+1$ первыхъ членовъ ряда A.

3. Обозначимъ черезъ a_n сумму n первыхъ треугольныхъ чиселъ:

$$a_n = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}$$

Числа a_0, a_1, a_2, ... составляютъ ариѳметическую прогрессію третьяго порядка; слѣдовательно, согласно предложенію предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Чтобы найти значенія чиселъ α_0, α_1, α_2 и α_3, нужно въ полученной формулѣ подставить послѣдовательно $n=0$, $n=1$, $n=2$ и $n=3$. Замѣчая, кромѣ того, что

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 10,$$

получимъ:

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_0 + \alpha_1 = 1,\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4,$$
$$\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 10;$$

отсюда

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1;$$

слѣдовательно,

$$a_n = n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Число это называется n-ымъ тетраедрическимъ числомъ: оно выражаетъ, напримѣръ, число шаровъ, расположенныхъ въ видѣ правильнаго тетраедра. Первые члены ряда тетраедрическихъ чиселъ таковы:

1, 4, 10, 20, 35, 56,

Чтобы вычислить сумму n первыхъ членовъ ряда квадратныхъ чиселъ:

$$c_n = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2,$$

нужно въ выраженіе

$$c_n = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

подставить $n=0$, 1, 2, 3; тогда получимъ $\alpha_0=1$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=2$; слѣдовательно,

$$c_n=n+3\frac{n(n-1)}{2}+2\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

§ 58. Геометрическіе ряды.

1. Числа ряда $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ образуютъ геометрическую прогрессію или геометрическій рядъ, если каждое число этого ряда получается изъ предыдущаго числа умноженіемъ его на одного и того же множителя q, иными словами, если частное a_n/a_{n-1} отъ дѣленія котораго нибудь члена на предыдущій равно постоянному числу q. Число a называется начальнымъ членомъ, а число q—знаменателемъ геометрической прогрессіи. Такимъ образомъ члены геометрической прогрессіи выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots;$$

n-ый членъ есть aq^{n-1}. Если знаменатель прогрессіи q есть положительное число, то всѣ члены прогрессіи имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ: напримѣръ, всѣ они положительные, если a есть положительное число. Если же знаменатель q есть отрицательное число, то члены прогрессіи имѣютъ попеременно различные знаки.

Если число q по абсолютной величинѣ превышаетъ единицу, то каждый членъ прогрессіи по абсолютной величинѣ превосходитъ предыдущій; прогрессія тогда называется возрастающей.

Если знаменатель q есть правильная дробь, то члены прогрессіи последовательно убываютъ по абсолютной величинѣ; такая прогрессія называется убывающей. Если, наконецъ, $q=\pm 1$, то всѣ члены прогрессіи равны $\pm a$.

2. Здѣсь, какъ и въ случаѣ ариѳметической прогрессіи, важно умѣть находить сумму первыхъ n членовъ ряда. Имѣемъ:

$$S=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=a(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}). \quad (1)$$

Задача наша такимъ образомъ сводится къ опредѣленію суммы

$$s=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}. \quad (2)$$

Сумму s легко опредѣлить, если замѣтимъ, что, умножая любой членъ ея на число q, получимъ слѣдующій членъ; слѣдовательно,

$$sq=q+q^2+q^3+\ldots+q^n. \quad (3)$$

Вычитывая почленно равенство (3) изъ равенства (2), получимъ:

$$s(1-q)=1-q^n:$$

отсюда вычисляемъ сумму s во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ единственнаго, когда $q=1$:

$$s=\frac{1-q^n}{1-q}. \qquad (4)$$

При $q=1$ всѣ члены нашей суммы равны 1, и мы получаемъ непосредственно $s=n$.

Если $q>1$, сумму s представляютъ такъ:

$$s=\frac{q^n-1}{q-1},$$

такъ какъ въ этомъ выраженіи какъ числитель такъ и знаменатель суть положительныя числа. Изъ формулы (1) слѣдуетъ:

$$S=\frac{aq^n-a}{q-1}$$

Въ словахъ эта формула выражается такъ:

Чтобы получить сумму n первыхъ членовъ геометрической прогрессіи, нужно разность между $(n+1)$-ымъ членомъ прогрессіи и первымъ членомъ ея раздѣлить на разность между знаменателемъ прогрессіи и единицей.

3. Мы нѣсколько видоизмѣнимъ формулу (4), если положимъ $q=b/a$ и сдѣлаемъ простое преобразованіе. Тогда найдемъ:

$$s=\frac{a^n-b^n}{a^{n-1}(a-b)}.$$

Изъ формулы же (2) имѣемъ:

$$s=1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}.$$

Подставивъ это значеніе суммы s въ предыдущее равенство и умноживъ обѣ части полученнаго такимъ образомъ равенства на a^{n-1}, найдемъ:

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b},$$

или иначе:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Формулу эту можно провѣрить непосредственнымъ умноженіемъ.
Примѣры: положивъ $n = 2$ и $n = 3$, получимъ:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Первая формула выражается словами такъ:

Разность квадратовъ двухъ чиселъ равна произведенію изъ суммы этихъ чиселъ на ихъ разность.

Положивъ въ этой же формулѣ $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha - \beta$, получимъ формулу, которая встрѣчается весьма часто:

$$(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta.$$

§ 59. Вычисленіе процентовъ и ренты.

1. Теорія геометрическихъ рядовъ находитъ себѣ важное практическое примѣненіе при вычисленіи процентовъ и ренты.

Мы здѣсь дадимъ лишь самыя общія основныя формулы; за подробностями и примѣрами отсылаемъ читателя къ спеціальнымъ сочиненіямъ: особенно можно рекомендовать небольшую книжку М. Кантора (M. Cantor) „Politishche Arithmetik“ (Leipzig. Teubner. 1898. 2. Auflage 1903).

Если капиталъ въ c рублей отданъ въ рость, то это значитъ, что должникъ въ концѣ каждаго года долженъ уплачивать заимодавцу опредѣленную сумму, скажемъ p рублей, за каждые 100 занятыхъ рублей (p процентовъ — пишется $p\%$). Число p называется процентной таксой.

Часто проценты уплачиваются по полугодіямъ или четвертямъ, но процентная такса всегда относится къ году. При современномъ состояніи денежнаго рынка обычной процентной таксой является 3%, $3\frac{1}{2}\%$, 4% или $4\frac{1}{2}\%$. Размѣръ процентной таксы зависитъ, главнымъ образомъ, отъ того, въ какой степени заимодавецъ можетъ быть увѣренъ, что должникъ выполнитъ свои обязательства.

На 100 рублей приходится p рублей процентныхъ денегъ, на 1 рубль — $\frac{p}{100}$ рублей, слѣдовательно, число процентныхъ денегъ съ капитала въ c рублей составитъ $\frac{cp}{100}$ рублей. По этому, по истеченіи года капиталъ

вмѣстѣ съ наращенными процентами выразится суммою въ $c + cp/100$ рублей, и такимъ образомъ первоначальный капиталъ c превратится въ капиталъ:

$$c' = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Часто процентныя деньги не уплачиваются по истеченіи года, но причисляются къ капиталу и вмѣстѣ съ послѣднимъ идутъ въ ростъ: такимъ образомъ возникаютъ проценты на проценты, или такъ называемые сложные проценты. По истеченіи второго года капиталъ увеличивается въ той же степени, что и за предыдущій годъ. Капиталъ c' превращается въ капиталъ:

$$c'' = c'\left(1 + \frac{p}{100}\right) = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;$$

по истеченіи n лѣтъ наращенный капиталъ выразится суммой:

$$C = c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \qquad (1)$$

Такимъ образомъ при указанныхъ условіяхъ капиталъ ежегодно возрастаетъ въ геометрической прогрессіи.

Если процентныя деньги причисляются къ капиталу не ежегодно, но каждое полугодіе или каждую четверть года. или. вообще, по истеченіи каждой m-ой части года, при чемъ p по прежнему означаетъ годовую процентную таксу, то по формулѣ (1) черезъ n лѣтъ наращенный капиталъ выразится суммой:

$$C = c\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{nm}\text{*)}. \qquad (2)$$

Если спрашивается, какой капиталъ черезъ n лѣтъ превратится въ капиталъ C, то найдемъ по формулѣ (1):

$$c = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-n}. \qquad (3)$$

*) При равныхъ прочихъ условіяхъ сдѣлка тѣмъ выгоднѣе для заимодавца, чѣмъ короче промежутки, по истеченіи которыхъ проценты причисляются къ капиталу, т. е. чѣмъ больше число m. Однако, какъ мы увидимъ впослѣдствіи. съ возрастаніемъ числа m капиталъ C не возрастаетъ безпредѣльно.

либо по формулѣ (2):

$$c=C\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{-nm}. \qquad (4)$$

2. Вычисленіе ренты. Рентой называютъ сумму, которая имѣетъ быть уплачиваема [2]) въ равные промежутки времени, напримѣръ, ежегодно либо вѣчно, либо въ теченіе ограниченнаго періода времени. Положимъ, что по истеченіи каждаго года имѣетъ быть уплачиваема рента въ r рублей. Если рента не уплачивается, но накопляется и наращается процентами, считая по $p^0/_0$, то какая сумма наростетъ по истеченіи n лѣтъ?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, замѣтимъ, что первый взносъ нарастаетъ въ теченіе $n-1$ лѣтъ, второй—въ теченіе $n-2$ лѣтъ, и т. д. предпослѣдній взносъ приноситъ проценты всего за 1 годъ, послѣдній взносъ вовсе не успѣетъ нарасти. Такимъ образомъ

первый взносъ превратится въ $r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}$,

второй „ „ „ $r\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}$,

. . . .

предпослѣдній „ „ „ $r\left(1+\frac{p}{100}\right)$,

послѣдній „ „ „ r.

Введя для сокращенія обозначеніе

$$1+\frac{p}{100}=q, \qquad (5)$$

получимъ для наращеннаго (окончательнаго) капитала такое выраженіе:

$$E=r(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}),$$

или, согласно § 58,

$$E=\frac{r(q^n-1)}{q-1}.$$

Подставивъ сюда вмѣсто q выраженіе изъ формулы (5), получимъ:

$$E=\frac{100r}{p}\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right]. \qquad (6)$$

Вычислимъ, какой капиталъ A нужно отдать въ ростъ по p сложныхъ процентовъ, чтобы по истеченіи n лѣтъ получить ту же сумму E.

[2]) Обыкновенно банкомъ, кредитнымъ учрежденіемъ или государствомъ.

По формулѣ (1) имѣемъ

$$E = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Отсюда

$$A = \frac{100r}{p}\left[1 - \left(1+\frac{p}{100}\right)^{-n}\right]. \qquad (7)$$

Сумма эта называется **наличной стоимостью** ренты. Ее нужно уплатить, если желаютъ **выкупить** ренту [3]). Чѣмъ больше число n, тѣмъ меньше число $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{-n}$ и тѣмъ менѣе отличается капиталъ A отъ суммы $100r/p$, т. е. отъ того капитала, который приноситъ ежегодно r процентныхъ денегъ, считая по p простыхъ процентовъ.

[3]) Это значитъ: если нѣкоторое учрежденіе обязано уплачивать какому либо лицу ежегодную ренту въ r рублей въ теченіе n лѣтъ, то оно можетъ освободиться отъ этого обязательства, т. е. **погасить** или **выкупить** ренту, уплативъ немедленно сумму A. Наоборотъ, получивъ ссуду въ A рублей, можно ее выплачивать, производя по истеченіи каждаго года **срочную уплату** въ r рублей.

Книга II.

АЛГЕБРА.

ГЛАВА XI.

Алгебраическія уравненія.

§ 60. Цѣлыя функціи и ихъ корни.

1. Въ области, содержащей всю совокупность введенныхъ нами чиселъ, заключаются нѣкоторыя особенныя числовыя системы, обладающія замѣчательными свойствами. Сюда относятся такъ называемыя алгебраическія числа. Первыя, съ которыми мы встрѣтились, и вмѣстѣ съ тѣмъ простѣйшія алгебраическія числа суть квадратные корни. Точно такъ же, какъ эти послѣдніе получаются при рѣшеніи квадратныхъ уравненій, всѣ другія алгебраическія числа суть результаты рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Прежде, чѣмъ перейти къ ближайшему разсмотрѣнію задачи о рѣшеніи уравненій высшихъ степеней, необходимо сдѣлать общій обзоръ свойствъ цѣлыхъ функцій.

2. Подъ названіемъ цѣлой функціи или просто функціи мы разумѣемъ выраженіе вида:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \quad (1)$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть опредѣленныя данныя числа, которыя назовемъ коэффиціентами функціи $f(x)$; n означаетъ цѣлое положительное число, а x есть знакъ, которому можно придать любое численное значеніе. При такихъ условіяхъ мы называемъ x перемѣннымъ, а $f(x)$ есть не что иное, какъ сокращенное обозначеніе всего выраженія (1). Если a_0 отлично отъ нуля, то число n называется степенью функціи $f(x)$.

Нѣтъ необходимости, чтобы коэффиціенты были раціональными числами. Они могутъ имѣть ирраціональныя и даже комплексныя значенія.

Вмѣсто знаковъ a, x, f, конечно, можно употреблять и другія буквы; однако, для обозначенія коэффиціентовъ мы будемъ предпочтительно употреблять первыя строчныя буквы латинскаго алфавита: a, b, c, для перемѣнныхъ — послѣднія буквы x, y, z, t; для сокращеннаго обозначенія

функцій будемъ пользовать буквами f, φ, ψ, а также и F, Φ, Ψ.

3. Цѣлыя функціи можно складывать, вычитывать и умножать по тѣмъ же правиламъ, по которымъ эти дѣйствія совершаются надъ полиномами. Результатами этихъ операцій будутъ также цѣлыя функціи. При этомъ члены съ одинаковыми степенями x собираютъ въ одинъ членъ, складывая коэффиціенты, затѣмъ всѣ вновь полученные члены располагаютъ въ рядъ по восходящимъ или нисходящимъ степенямъ x, начиная справа или слѣва. Такъ напримѣръ:

$$(a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)=$$
$$=a_0b_0x^5+(a_0b_1+a_1b_0)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3+$$
$$+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1)x^2+(a_1b_3+a_2b_2)x+a_2b_3$$

Если перемножимъ двѣ функціи n-той и m-той степени $f(x)=$ $=a_0x^n+\ldots$, $\varphi(x)=b_0x^m+\ldots$, то произведеніе $f(x)\varphi(x)$, будучи расположено указаннымъ образомъ, начнется съ члена $a_0b_0x^{m+n}$. Это замѣчаніе даетъ право сказать, что степень произведенія двухъ цѣлыхъ функцій равна суммѣ $m+n$ степеней производителей.

4, Двѣ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются равными (точнѣе тождественными) только въ томъ случаѣ, если онѣ одной и той же степени и если коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ въ одной и въ другой имѣютъ одинаковую величину. При этихъ условіяхъ для любого численнаго значенія перемѣннаго x обѣ функціи имѣютъ одинаковыя численныя значенія.

Совершенно другое значеніе имѣетъ равенство двухъ функцій $f(x)=\varphi(x)$, если оно справедливо только при нѣкоторыхъ особенныхъ значеніяхъ x.

Въ то время какъ, съ одной стороны, равенство $f(x)=0$, если мы его понимаемъ въ первомъ смыслѣ, требуетъ, чтобы коэффиціенты a_0, a_1, ..., a_n всѣ были равны нулю,—можно, съ другой стороны, искать такихъ значеній $x=x_1$, которыя обращаютъ $f(x)$ въ нуль, не смотря на то, что не всѣ коэффиціенты a_0, a_1, ..., a_n нули. Такое значеніе x_1 называется корнемъ функціи $f(x)$ или еще корнемъ уравненія $f(x)=0$. При такой постановкѣ вопроса x въ уравненіи $f(x)=0$ называется неизвѣстнымъ, для котораго мы ищемъ опредѣленное значеніе x_1.

5. Если коэффиціенты a_0, a_1, ..., a_n суть вещественныя числа, то $f(x)$ называется вещественной функціей. Если вещественная функція имѣетъ мнимый корень $x_1=\alpha+\beta i$, то

$$a_0(\alpha+\beta i)^n+a_1(\alpha+\beta i)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(\alpha+\beta i)+a_n=0. \quad (2)$$

Отсюда слѣдуетъ (§ 44, 5), что если мы вездѣ замѣнимъ i черезъ $-i$,

то равенство не нарушится:

$$a_0(\alpha-\beta i)^n+a_1(\alpha-\beta i)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(\alpha-\beta i)+a_n=0, \quad (3)$$

т. е. $x_1'=\alpha-\beta i$ также есть корень функціи $f(x)$. Этотъ выводъ мы формулируемъ въ видѣ слѣдующей теоремы:

Каждая вещественная функція можетъ имѣть только парные мнимые корни, при чемъ каждая пара состоитъ изъ двухъ сопряженныхъ мнимыхъ чиселъ.

§ 61. Дѣленіе цѣлыхъ функцій.

1. Дѣйствія надъ цѣлыми функціями представляютъ большое сходство съ дѣйствіями въ области раціональныхъ чиселъ. Особенно интересны въ этомъ случаѣ правила дѣленія.

Пусть

$$\begin{aligned} f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\\ \varphi(x)&=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m \end{aligned} \quad (1)$$

двѣ функціи степеней n и m, такъ что a_0 и b_0 не нули; предположимъ что $n\geqslant m$.

Говорятъ, что функція $f(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$, если существуетъ цѣлая функція $Q(x)$, удовлетворяющая соотношенію $f(x)=\varphi(x)\,Q(x)$.

По § 60, 3 $Q(x)$ должна быть $(n-m)$-ой степени; чтобы не исключать того случая, когда $m=n$, мы будемъ подъ названіемъ цѣлой функціи нулевой степени разумѣть число, отличное отъ нуля (независящее, слѣдовательно, отъ x).

Чтобы ближе разсмотрѣть вопросъ о дѣлимости цѣлыхъ функцій положимъ

$$Q(x)=q_0x^{n-m}+q_1x^{n-m-1}+\ldots+q_{n-m-1}x+q_{n-m}\,. \quad (2)$$

Далѣе коэффиціенты произведенія $\varphi(x)Q(x)$ приравняемъ соотвѣтствующимъ коэффиціентамъ $f(x)$, начиная съ a_0. Это дастъ слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned} a_0&=b_0q_0,\\ a_1&=b_0q_1+b_1q_0,\\ a_2&=b_0q_2+b_1q_1+b_2q_0,\\ &\cdot\qquad\cdot\\ a_\nu&=b_0q_\nu+b_1q_{\nu-1}+b_2q_{\nu-2}+\ldots,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{n-m}&=b_0q_{n-m}+b_1q_{n-m-1}+\ldots \end{aligned} \quad (3)$$

Составить эти равенства очень легко: нужно обратить вниманіе

только на то, чтобы въ выраженіи a_ν сумма индексовъ при b_i и q_k, т. е. $i+k$, была равна ν, и прибавлять слагаемыя до тѣхъ поръ, пока значекъ i при b не превыситъ m.

Мы получили систему $n-m+1$ уравненій первой степени, изъ которыхъ могутъ быть опредѣлены $n-m+1$ неизвѣстныхъ $q_0, q_1, \ldots, q_{n-m}$. Конструкція этой системы дѣлаетъ ее очень удобной для разрѣшенія; изъ перваго же уравненія находимъ $q_0 = \frac{a_0}{b_0}$. Зная q_0, изъ второго уравненія легко находимъ $q_1 = \frac{a_1 - b_1 q_0}{b_0} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}$ и т. д. Въ знаменателѣ будутъ всегда степени числа b_0, которое, по предположенію, отлично отъ нуля.

Если $q_0, q_1, \ldots, q_{n-m}$ опредѣлены изъ равенствъ (3), то коэффиціенты при $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^m$ въ произведеніи $\varphi(x)Q(x)$ совпадаютъ съ соотвѣтствующими коэффиціентами $f(x)$. Разность $f(x) - \varphi(x)Q(x)$ есть цѣлая функція

$$R(x) = r_0 x^{m-1} + r_1 x^{m-2} + \ldots + r_{m-2}x + r_{m-1}, \qquad (4)$$

степень которой не выше $m-1$. $R(x)$ можетъ быть и низшей степени, если $r_0 = 0$ или r_0 и r_1 равны 0 и т. д. Итакъ:

$$f(x) = \varphi(x)Q(x) + R(x). \qquad (5)$$

Операція эта (т. е. нахожденіе функцій $Q(x)$ и $R(x)$) называется **дѣленіемъ** $f(x)$ на $\varphi(x)$; $f(x)$ называется **дѣлимымъ**, $\varphi(x)$ — **дѣлителемъ**, $Q(x)$ — **частнымъ** и $R(x)$ — **остаткомъ**. Если функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ даны, то $Q(x)$ и $R(x)$ однозначно опредѣляются тѣмъ, что степень $R(x)$ должна быть ниже степени $\varphi(x)$.

Вопросъ ставится совершенно такъ же, какъ при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ съ тою разницей, что не численная величина остатка должна быть меньше дѣлителя, а степень остатка должна быть ниже степени дѣлителя. Вычисленіе можно расположить совершенно такъ же, какъ при дѣленіи десятичныхъ чиселъ. Покажемъ это на примѣрѣ; пусть

$$f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8,$$
$$\varphi(x) = x^2 + 2x - 5;$$

$$\begin{array}{l|l}
3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 8 & x^2 + 2x - 5 = 3x^2 - 3x + 16 \\
3x^4 + 6x^3 - 15x^2 & \\
\quad -3x^3 + 10x^2 + 2x & \\
\quad\; 3x^3 \quad 6x^2 + 15x & \\
\qquad 16x^2 - 13x - 8 & \\
\qquad 16x^2 + 32x - 80 & \\
\qquad\quad -45x + 72. &
\end{array}$$

Въ данномъ случаѣ $Q(x) = 3x^2 - 3x + 16$, а $R(x) = -45x + 72$.

2. Функція $f(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$ въ томъ и только въ томъ случаѣ, если остатокъ $R(x)$ тождественно равенъ 0, т. е. если

$$r_0 = 0, r_1 = 0, \ldots, r_{m-1} = 0.$$

Чтобы пояснить это на примѣрѣ, положимъ:

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1,$$
$$\varphi(x) = x^2 - x - 1;$$

тогда получимъ:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 & x^2 - x - 1 \\ \hline x^4 - x^3 - x^2 & x^2 + 2x - 1 \\ \quad 2x^3 - 3x^2 - x & \\ \quad 2x^3 - 2x^2 - 2x & \\ \qquad -x^2 + x + 1 & \\ \qquad -x^2 + x + 1 & \\ \qquad \;\; - \quad - \quad - & \end{array}$$

3. Дѣленіе совершается особенно просто, если дѣлитель представляетъ собой функцію первой степени или, какъ таковую часто называютъ, линейную функцію. Возьмемъ дѣлителя $\varphi(x)$ въ формѣ $x - \alpha$; въ такомъ случаѣ въ равенствахъ (3) нужно положить $b_0 = 1$, $b_1 = -\alpha$. Для опредѣленія коэффиціентовъ q получаемъ равенства:

$$d_0 = q_0,$$
$$d_1 = q_1 - \alpha q_0,$$
$$d_2 = q_2 - \alpha q_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_{n-1} = q_{n-1} - \alpha q_{n-2};$$

откуда находимъ:

$$\begin{aligned} q_0 &= d_0, \\ q_1 &= d_0\alpha + d_1, \\ q_2 &= d_0\alpha^2 + d_1\alpha + d_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} &= d_0\alpha^{n-1} + d_1\alpha^{n-2} + d_2\alpha^{n-3} + \ldots + d_{n-1}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Остатокъ будетъ нулевой степени, т. е. не будетъ зависѣть отъ x. Можно легко опредѣлить его значеніе; для этого достаточно въ равенство $f(x) = (x - \alpha)\,Q(x) + R$ подставить α вмѣсто x; тогда $(x - \alpha)\,Q(x) = 0$,

и, слѣдовательно, $R = f(\alpha)$. Итакъ,

$$f(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + f(\alpha).$$

Если $f(\alpha) = 0$, то $f(x)$ дѣлится на $x - \alpha$; мы получаемъ такимъ образомъ теорему:

Функція $f(x)$ тогда и только тогда дѣлится на $x - \alpha$, если α есть корень функціи $f(x)$.

4. Если не только $f(x)$, но и $Q(x)$ дѣлится на $x - \alpha$, такъ что $Q(\alpha) = 0$, то $f(x)$ дѣлится на $(x - \alpha)^2$. Согласно формуламъ (6),

$$Q(\alpha) = q_0 \alpha^{n-1} + q_1 \alpha^{n-2} + \ldots + q_{n-1} =$$
$$= n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + (n-2) a_2 \alpha^{n-3} + \ldots + 2\, a_{n-2} x + a_{n-1}\,[1].$$

Функцію

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + 2\, a_{n-2} x + a_{n-1}$$

называютъ производной отъ функціи $f(x)$. Мы видимъ, такимъ образомъ, что

$$Q(\alpha) = f'(\alpha).$$

Итакъ, необходимое и достаточное условіе дѣлимости функціи $f(x)$ на $(x - \alpha)^2$ выражается двумя равенствами: $f(\alpha) = 0$ и $f'(\alpha) = 0$, или въ словахъ:

Функція $f(x)$ въ томъ и только въ томъ случаѣ дѣлится на $(x - \alpha)^2$, если α есть общій корень функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$.

5. Если x_1 есть корень функціи $f(x)$, то можно положить $f(x) = (x - x_1) f_1(x)$, гдѣ $f_1(x)$ есть функція $n-1$ степени; изъ соотношенія (3) слѣдуетъ, что высшая степень $f_1(x)$, т. е. x^{n-1}, имѣетъ тотъ же коэффиціентъ, какъ x^n въ $f(x)$. Если $f_1(x)$ имѣетъ корень x_2, то мы можемъ положить $f_1(x) = (x - x_2) f_2(x)$ и т. д. Если всѣ полученныя такимъ образомъ функціи $f_1, f_2, f_3, \ldots$ имѣютъ корни, а послѣдняя изъ нихъ $f_{n-1}(x) = a_0 (x - x_n)$, то

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n). \qquad (7)$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція n-ой степени никогда не имѣетъ больше n корней.

Дѣйствительно, если $f(x)$ имѣетъ n корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то x_2

---

[1] Чтобы это получить, мы умножаемъ обѣ части перваго изъ равенствъ (6) на α^n, второе равенство на α^{n-1} и т. д., а затѣмъ складываемъ оба равенства.

должно быть корнемъ функціи $f_1(x)$, x_3 корнемъ функцій $f_2(x)$ и т. д.; при этомъ, какъ мы видѣли, имѣетъ мѣсто разложеніе (7). Если поэтому α есть какой нибудь корень функціи $f(x)$, то должно имѣть мѣсто равенство:

$$(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots(\alpha-x_n)=0,$$

что возможно только въ томъ случаѣ, если α есть одно изъ чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если въ какомъ нибудь частномъ случаѣ окажется, что нѣкоторая функція n-той степени

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

обращается въ нуль больше, чѣмъ при n различныхъ значеніяхъ x, то остается только заключить, что всѣ коэффиціенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть нули и что такимъ образомъ $f(x)$ тождественно (при всякомъ значеніи x) равно нулю. Нашъ выводъ мы можемъ выразить такъ:

Если число значеній независимаго перемѣннаго x, при которыхъ функція n-той степени отъ x обращается въ нуль, превышаетъ n, то эта функція тождественно сводится къ нулю.

Въ этой формулировкѣ теорема будетъ часто служить основаніемъ при доказательствахъ дальнѣйшихъ теоремъ.

6. Въ ряду чиселъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, входящихъ въ разложеніе (7), одно и то же число можетъ повторяться нѣсколько разъ. Функція $f(x)$ и въ этомъ случаѣ разлагается на n линейныхъ множителей, но число ея корней меньше n. Чтобы установить единообразіе въ способѣ выраженія, и въ этихъ случаяхъ говорятъ, однако, что функція $f(x)$ имѣетъ n корней; мы получимъ эти n корней, если будемъ считать нѣкоторые корни нѣсколько разъ; именно: каждый корень мы будемъ считать столько разъ, сколько разъ соотвѣтствующій множитель $(x-x_i)$ входитъ въ разложеніе (7). Мы имѣемъ тогда дѣло съ такъ называемыми кратными корнями; согласно пункту 4, x_i есть кратный корень функціи $f(x)$, если онъ представляетъ собой общій корень функцій $f(x)$ и $f'(x)$.

§ 62. Общій наибольшій дѣлитель.

1. Если двѣ цѣлыя функціи $f(x)$ и $f_1(x)$, которыя мы иногда будемъ обозначать короче черезъ f и f_1, имѣютъ общіе корни, то онѣ имѣютъ также и общаго дѣлителя. Въ самомъ дѣлѣ, если обѣ функціи имѣютъ общій корень x_1, то обѣ дѣлятся на линейную функцію $x-x_1$; функціи $f(x)$ и $f_1(x)$ могутъ имѣть общихъ дѣлителей и болѣе высокихъ степеней. Если $f(x)$ и $f_1(x)$ не имѣютъ общаго дѣлителя, а слѣдовательно, и общихъ корней, то такія двѣ функціи называются взаимно про-

стыми или первыми между собой.

Такъ какъ дѣленіе цѣлыхъ функцій совершается по тѣмъ же правиламъ, какъ и дѣленіе цѣлыхъ чиселъ, то мы можемъ примѣнить Евклидовъ алгориѳмъ для опредѣленія общихъ дѣлителей двухъ функцій (§ 15).

Пусть f и f_1 двѣ данныя функціи степеней n и n_1, и пусть $n \geqq n_1$. Посредствомъ дѣленія (§ 61) можно составить рядъ функцій $f_2, f_3, \ldots$ убывающихъ степеней $n_2, n_3, \ldots$ и рядъ частныхъ $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ такимъ образомъ, что

$$\begin{aligned} f &= Q f_1 + f_2, \\ f_1 &= Q_1 f_2 + f_3, \\ f_2 &= Q_2 f_3 + f_4, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \tag{1}$$

Этотъ рядъ равенствъ можно продолжать, пока можно дѣлить f_{n-1} на f_n. Такъ какъ степени $f_2, f_3, \ldots$ постоянно убываютъ, то въ концѣ концовъ дѣленіе должно прекратиться. Пусть два послѣднія равенства въ ряду (1) будутъ:

$$\begin{aligned} f_{\nu-2} &= Q_{\nu-2} f_{\nu-1} + f_\nu, \\ f_{\nu-1} &= Q_{\nu-1} f_\nu. \end{aligned} \tag{2}$$

Точно такъ же, какъ при цѣлыхъ числахъ, можно заключить, что f_ν есть дѣлитель всѣхъ предыдущихъ функцій $f_{\nu-1}, f_{\nu-2}, f_{\nu-3}, \ldots, f_1, f$ и что каждый общій дѣлитель функцій f и f_1, долженъ быть также дѣлителемъ функцій $f_2, f_3, \ldots, f_\nu$. Поэтому f_ν называется **общимъ наибольшимъ дѣлителемъ** функцій f и f_1 (при чемъ слова „больше", „меньше" относятся, собственно, къ степени дѣлителя).

Общій наибольшій дѣлитель f_ν можетъ оказаться функціей нулевой степени, т. е. можетъ представлять собой число, отличное отъ нуля и не зависящее отъ x; въ этомъ случаѣ f и f_1 суть **функціи первыя между собой**, такъ какъ на постоянное число дѣлится всякая функція.

2. **Итакъ, общій наибольшій дѣлитель двухъ функцій можетъ быть найденъ съ помощью четырехъ дѣйствій (т. е. съ помощью раціональнаго вычисленія) надъ коэффиціентами данныхъ функцій.**

Мы можемъ также съ помощью раціональнаго вычисленія рѣшить, имѣетъ ли функція кратные корни, находя общаго наибольшаго дѣлителя функціи $f(x)$ и ея производной $f'(x)$.

Возьмемъ примѣръ:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^6 - 2x^5 + 2x + 1, \\ f'(x) &= 6x^5 - 10x^4 + 2. \end{aligned}$$

Вмѣсто $f'(x) = 2(3x^5 - 5x^4 + 1)$ мы можемъ взять за перваго дѣлителя функцію $f_1(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$, которая отличается отъ $f'(x)$ только численнымъ множителемъ. Первое дѣленіе даетъ:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)f_1(x) - \frac{5}{9}(x^4 - 3x - 2).$$

За второго дѣлителя f_2 мы можемъ взять $x^4 - 3x - 2$; мы получимъ:

$$f_1(x) = (3x - 5)f_2(x) + 9(x^2 - x - 1).$$

Третье дѣленіе на $f_3 = x^2 - x - 1$ заканчиваетъ вычисленіе:

$$f_2 = (x^2 + x - 1)f_3.$$

Итакъ, $x^2 - x - 1$ есть общій наибольшій дѣлитель функцій $f(x)$ и $f'(x)$. Легко обнаружить, что

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - x - 1)^2,$$

если произвести умноженіе въ правой части.

3. При помощи Евклидова алгориѳма можно получить рѣшеніе слѣдующей задачи.

Даны двѣ цѣлыя функціи $f(x)$ и $f_1(x)$, первыя между собой; требуется опредѣлить двѣ другія цѣлыя функціи $F(x)$ и $F_1(x)$ такимъ образомъ, чтобы

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = 1. \qquad (3)$$

Замѣтимъ сначала, что задача не мѣняется существенно, если съ правой стороны (3) вмѣсто 1 будетъ другое число c, отличное отъ нуля, такъ какъ въ этомъ случаѣ, чтобы получить равенство (3), достаточно коэффиціенты функцій $F(x)$ и $F_1(x)$ раздѣлить на c.

Чтобы найти F и F_1 воспользуемся формулами (1) и (2), въ которыхъ, при взаимно простыхъ f и f_1, функція f_ν будетъ числомъ, отличнымъ отъ нуля. Если теперь первое изъ равенствъ (1) разрѣшить относительно f_2 и подставить полученное выраженіе во второе и третье равенства, затѣмъ второе разрѣшить относительно f_3 и полученныя выраженія подставить въ два слѣдующія, и такъ продолжать до конца, то предпослѣднее изъ равенствъ (2) дасть требуемое соотношеніе вида (3).

Чтобы показать это на простомъ примѣрѣ, положимъ:

$$f(x) = x^2 - x - 1; \quad f_1(x) = x^2 + 1;$$
$$x^2 - x - 1 = (x^2 + 1) - (x + 2);$$
$$x^2 + 1 = (x + 2)(x - 2) + 5.$$

Помножимъ первое равенство на $x - 2$ и сложимъ со вторымъ;

тогда получимъ:

$$(x^2 - x - 1)(x - 2) + (x^2 + 1)(3 - x) = 5.$$

Отсюда $F(x) = x - 2$, $F_1(x) = 3 - x$.

При томъ же предположеніи, что f и f_1 суть функціи взаимно простыя, можно всегда удовлетворить равенству

$$F(x)f(x) + F_1(x)f_1(x) = \Phi(x), \qquad (4)$$

гдѣ $\Phi(x)$ есть любая цѣлая функція. Нужно только равенство (3) умножить на $\Phi(x)$ и затѣмъ вмѣсто $F(x)\,\Phi(x)$ и $F_1(x)\,\Phi(x)$ написать $F(x)$ и $F_1(x)$.

§ 63. Приводимыя и неприводимыя функціи.

1. Положимъ теперь, что въ цѣлой функціи n-той степени

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

коэффиціенты $a_0, \ldots, a_n$ суть цѣлыя числа.

Если a_0 не нуль, то розысканіе корней функціи (1) можно привести къ случаю $a_0 = 1$. Дѣйствительно, помножая функцію (1) на a_0^{n-1}, получимъ:

$$a_0^{n-1}f(x) = a_0^n x^n + a_1(a_0x)^{n-1} + a_2a_0(a_0x)^{n-2} + \ldots + a_na_0^{n-1}.$$

Если далѣе положимъ:

$$a_0x = y, \quad a_1 = b_1, \quad a_2a_0 = b_2, \quad a_3a_0^2 = b_3, \ldots, a_na_0^{n-1} = b_n$$
$$\text{и } a_0^{n-1}f(x) = \varphi(y),$$

то

$$\varphi(y) = y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \ldots + b_n, \qquad (2)$$

гдѣ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ цѣлыя числа.

Корни функціи $f(x)$ получатся, если каждый корень функціи $\varphi(y)$ раздѣлимъ на a_0.

Мы займемся прежде всего вопросомъ о томъ, какіе раціональные корни можетъ имѣть функція $\varphi(y)$. Если p/q есть корень функціи $\varphi(y)$, гдѣ p и q суть цѣлыя числа, которыя мы можемъ считать взаимно простыми, причемъ $q > 0$, то должно имѣть мѣсто соотношеніе:

$$p^n + b_1p^{n-1}q + b_2p^{n-2}q^2 + \ldots + b_nq^n = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что p^n должно дѣлиться на q, что возможно только

при $q=1$, такъ какъ p и q суть числа взаимно простыя.

Раціональный корень функціи $\varphi(y)$ необходимо долженъ быть цѣлымъ числомъ.

Если p есть такой корень, то

$$p^n + b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \ldots + b_{n-1} p + b_n = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что b_n должно дѣлиться на p.

Итакъ, чтобы рѣшить, имѣетъ ли функція $\varphi(y)$ раціональные корни, нужно найти всѣхъ дѣлителей числа b_n, и каждый изъ нихъ съ положительнымъ и отрицательнымъ знакомъ подставить для испытанія въ $\varphi(y)$ вмѣсто y. Если p есть одинъ изъ этихъ дѣлителей и $\varphi(p) = 0$, то p есть раціональный корень функціи $\varphi(y)$, а p/a_0 раціональный корень функціи $f(x)$.

При этомъ $\varphi(y)$ дѣлится на $y-p$ и результатъ дѣленія, опредѣляемый равенствомъ $\varphi(y) = (y-p)\varphi_1(y)$, есть функція $\varphi_1(y)$, коэффиціенты которой также представляютъ собою цѣлыя числа. Такъ напримѣръ:

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1$$

имѣетъ дѣлителя $y-1$; производя дѣленіе, получимъ:

$$y^4 - 4y^3 + 2y + 1 = (y-1)(y^3 - 3y^2 - 3y - 1).$$

2. Функція $f(x)$ съ цѣлыми или только съ раціональными коэффиціентами называется **приводимой** или **разложимой**, если ее можно разложить на два множителя $f_1(x)$ и $f_2(x)$, изъ которыхъ каждый дѣйствительно содержитъ x и коэффиціенты которыхъ также раціональны. Если такое разложеніе невозможно, то $f(x)$ называется **неприводимой** или **неразложимой** функціей.

Не существуетъ общаго признака для различенія приводимыхъ и неприводимыхъ функцій точно такъ же, какъ не существуетъ такого признака для различенія простыхъ и составныхъ чиселъ. Остается въ каждомъ случаѣ пользоваться частными пріемами, т. е. производить испытанія, число которыхъ можетъ быть значительно сокращено методами, теоріи чиселъ. Такъ напримѣръ,

$$f(x) = x^6 - 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x - 8 =$$
$$(x^3 - 2x^2 + 2)(x^3 - 4x - 4)$$

есть функція приводимая.

3. О приводимости цѣлой функціи съ цѣлыми коэффиціентами существуетъ общая теорема, частнымъ случаемъ которой является предложеніе о раціональныхъ корняхъ (п. 1). Теорема эта, доказанная Гауссомъ, заключается въ слѣдующемъ.

Если функція

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

съ цѣлыми коэффиціентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ разлагается на множителей:

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \ldots + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \ldots + c_\nu,$$

при чемъ числа $b_1, \ldots, b_\mu$ и $c_1, \ldots, c_\nu$ раціональны, то какъ коэффиціенты b_i, такъ и коэффиціенты c_i должны быть цѣлыми числами.

Такъ какъ мы предположили, что функція f разлагается на множителей φ и ψ, то, выполняя умноженіе $\varphi \psi = f$, получимъ, съ одной стороны, условіе:

$$\mu + \nu = n,$$

а съ другой стороны:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + c_1, \\ a_2 &= b_2 + c_1 b_1 + c_2, \\ a_3 &= b_3 + c_1 b_2 + c_2 b_1 + c_3. \\ &\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Законъ составленія этихъ равенствъ очень простъ: въ каждомъ изъ нихъ въ каждомъ членѣ правой части сумма индексовъ при b и c равна индексу при a въ лѣвой части.

Исходя отсюда, мы докажемъ нашу теорему отъ противнаго слѣдующимъ образомъ.

Предположимъ, что $b_1, \ldots, b_\mu$ не цѣлыя числа. Въ такомъ случаѣ мы можемъ ихъ представить въ видѣ:

$$\frac{B_1}{B_0}, \frac{B_2}{B_0}, \frac{B_3}{B_0}, \ldots \frac{B_\mu}{B_0},$$

при чемъ $B_0 \ldots B_\mu$ суть цѣлыя числа, не имѣющія общаго всѣмъ дѣлителя, а B_0 больше 1. Вмѣстѣ съ тѣмъ всѣ коэффиціенты $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ замѣняемъ черезъ

$$\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_0}, \frac{C_3}{C_0}, \ldots, \frac{C_\nu}{C_0}$$

при чемъ цѣлыя числа $C_0, \ldots, C_\nu$ также не имѣютъ общаго дѣлителя;

относительно C_0 мы не дѣлаемь ограниченій, такъ что C_0 можетъ быть и равно 1.

Выбираемъ произвольно одного изъ простыхъ множителей числа B_0, скажемъ p. По предположенію, p не можетъ входить ни во всѣ числа $B_0, \dots, B_n$, ни во всѣ числа $C_0, \dots, C_r$. Пусть B_h первое изъ чиселъ B, а C_k первое изъ чиселъ C, которыя не дѣлятся на p.

Тогда:

$$\begin{array}{l} B_0, \dots, B_{h-1} \text{ всѣ дѣлятся на } p, \; B_h \text{ не дѣлится на } p. \\ C_0, \dots, C_{k-1} \quad " \quad " \quad " \quad ", \; C_k \quad " \quad " \quad " \quad " \end{array} \qquad (4)$$

h не можетъ быть нулемь, k же можеть оказаться равнымь нулю, если уже C_0 не дѣлится на p.

Возьмемъ теперь изъ равенствъ (3) $(h+k)$-тое и, помноживъ обѣ его части на B_0C_0, напишемъ его въ такомъ видѣ:

$$B_0C_0a_{h+k} = B_hC_k + B_{h-1}C_{k+1} + B_{h-2}C_{k+2} + \dots$$
$$+ B_{h+1}C_{k-1} + B_{h+2}C_{k-2} + \dots$$

При $k = 0$ рядъ, стоящій во второй строкѣ, сводится кь нулю. Далѣе, такъ какъ a_{h+k} есть цѣлое число, то лѣвая часть дѣлится на p. Правая часть не дѣлится на p, такъ какь B_hC_k не дѣлится на p, а остальные члены

$$B_{h-1}C_{k+1}, \quad B_{h-2}C_{k+2}, \quad \dots \quad B_{h+1}C_{k-1},$$

дѣлятся на p.

Итакъ, допущеніе, что коэффиціенты b и c не представляютъ собой цѣлыхъ чиселъ, привело насъ къ противорѣчію; теорема такимъ образомъ доказана.

4. Изъ предыдущаго вытекаетъ общая теорема о неприводимости цѣлыхъ функцій съ цѣлыми коэффиціентами; она принадлежитъ Айзенштейну (Eisenstein).

Если коэффиціенты $a_1, \dots, a_n$ функціи n-той степени $f(x)$ суть цѣлыя числа и всѣ дѣлятся на простое число p, а послѣдній изъ этихъ коэффиціентовъ a_n не дѣлится на p^2, то функція $f(x)$ неприводима; при этомъ число 0 мы считаемъ дѣлящимся на всякое первоначальное число.

Чтобы доказать эту теорему, положимъ, что функція

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x + a_n$$

разлагается на двѣ функціи:

$$\varphi(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + b_2 x^{\mu-2} + \ldots + b_{\mu-1} x + b_\mu,$$
$$\psi(x) = x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + c_2 x^{\nu-2} + \ldots + c_{\nu-1} x + c_\nu.$$

Если коэффиціенты $b_1, \ldots b_\mu, c_1, \ldots, c_\nu$ раціональны, то, по теоремѣ пункта 3, они представляють собой цѣлыя числа. Производя умноженіе, получаемь рядъ равенствь, которыя располагаемь теперь въ обратномъ порядкѣ:

$$\begin{aligned} a_n &= b_\mu c_\nu, \\ a_{n-1} &= b_\mu c_{\nu-1} + b_{\mu-1} c_\nu, \\ a_{n-2} &= b_\mu c_{\nu-2} + b_{\mu-1} c_{\nu-1} + b_{\mu-2} c_\nu, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_\nu &= b_\mu c_{\nu-\mu} + b_{\mu-1} c_{\nu-\mu+1} + \ldots + b_1 c_{\nu-1} + c_\nu. \end{aligned} \tag{5}$$

Непосредственно эти равенства имѣюгь мѣсто лишь въ предположеніи, что $\nu > \mu$; чтобы распространить ихь и на случай $\nu \leqslant \mu$, достаточно положить $c_0 = 1$, а всѣ c съ отрицательными индексами—равными нулю.

Если a_n дѣлится на p, но не дѣлится не p^2, то изъ равенства $a_n = b_\mu c_\nu$ слѣдуетъ, что одинъ изъ сомножителей либо b_μ, либо c_ν, скажемь b_μ, дѣлится на p, а другой c_ν не дѣлится. Но такъ какъ числа $a_{n-1}, \ldots, a_\nu$ дѣлятся на p, то изь соотношеній (5) слѣдуетъ, что и числа $b_{\mu-1}, \ldots, b_1$ дѣлятся на p; въ такомъ случаѣ послѣднее равенство, опредѣляющее a_ν, находится противорѣчіи сь нашимъ предположеніемъ, такь какъ изъ этого равенства слѣдуетъ, что c_ν тоже дѣлится на p. Теорема доказана.

Изь этой теоремы вытекаеть, напримѣръ, неприводимость функціи 5-ой степени:

$$f(x) = x^5 - 4x - 2. \tag{6}$$

5. Вводя новую перемѣнную, можно каждую функцію упростить, а именно, уничтожить членъ, содержащій x въ n—1-ой степени.

Дѣйствительно, по формулѣ бинома

$$a_0\left(x + \frac{a_1}{na_0}\right)^n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \frac{n-1}{2n}\frac{a_1^2}{a_0} x^{n-2} + \ldots;$$

если теперь положимъ:

$$y = x + \frac{a_1}{na_0} \tag{7}$$

то x^{n-2}, x^{n-3}, . . . будутъ функціями $(n-2)$-ой, $(n-3)$-ой, . . . степени отъ y, а

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

будетъ цѣлая функція n-той степени отъ y вида

$$\varphi(y) = a_0y^n + b_2y^{n-2} + \cdots + b_n$$ [1],

гдѣ коэффиціенты b выражаются раціонально черезъ коэффиціенты a. Напримѣръ, при $n = 3$, $a_0 = 1$:

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

$$y = x + \frac{a_1}{3},$$

$$\varphi(y) = y^3 + \left(a_2 - \frac{1}{3}a_1\right)y + \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_3.$$

6. Общій наибольшій дѣлитель двухъ функцій $f(x)$ и $F(x)$ съ раціональными коэффиціентами, какъ видно изъ алгориѳма § 62-го, имѣетъ также раціональные коэффиціенты. Поэтому, если функція $f(x)$ неприводима, то могутъ быть два случая: либо $F(x)$ дѣлится на $f(x)$, либо $F(x)$ и $f(x)$ суть функціи первыя между собой [2]. Въ послѣднемъ случаѣ онѣ не имѣютъ общихъ корней. Эти соображенія даютъ теорему, особенно важную въ теоріи уравненій.

Теорема. Если неприводимая функція $f(x)$ имѣетъ общій корень съ функціей $F(x)$, то послѣдняя дѣлится на $f(x)$ и всѣ корни функціи $f(x)$ представляютъ собой также корни функціи $F(x)$.

7. Понятіемъ о приводимости и неприводимости пользуются, однако, и въ болѣе широкомъ смыслѣ.

Неприводимая функція можетъ разлагаться на множителей, которые въ своихъ коэффиціентахъ, кромѣ раціональныхъ чиселъ, содержатъ опредѣленныя ирраціональныя числа, напр. $\sqrt{-1}$, или $\sqrt{2}$, или, вообще, какой нибудь квадратный корень; другія функціи могутъ оставаться неразложимыми и при допущеніи такого ирраціональнаго числа. Введеніемъ такого рода ирраціональностей образуется числовой комплексъ, въ которомъ

[1]) Такъ какъ соотношеніе (7) даетъ $x = y - \frac{a_1}{na_0}$, то

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots = a^0\left(y - \frac{a_1}{na_0}\right)^n + a_1\left(y - \frac{a_1}{na_0}\right)^{n-1} + \ldots$$

$$a_0y^n - a_1y^{n-1} + a_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \ldots = a_0y^n + b_2y^{n-2} + \ldots$$

[2]) Это вполнѣ аналогично слѣдующему свойству цѣлыхъ чиселъ: если f есть простое цѣлое число, а F есть другое цѣлое число, то F либо дѣлится на f, либо представляетъ собой число, простое относительно f.

могутъ быть выполнены всѣ раціональныя дѣйствія, кромѣ дѣленія на нуль. Отсюда видно, что этотъ комплексъ въ нашемъ вопросѣ будетъ играть такую же роль, какую до введенія этой ирраціональности играла область раціональныхъ чиселъ; мы назовемъ ею поэтому **областью раціональности**. Присоединеніе ирраціональнаго числа къ раціональнымъ мы будемъ называть **пріобщеніемъ ирраціональности**[3]).

Такъ, функція x^2+1 неприводима въ области раціональныхъ чиселъ, но, напротивъ, приводима при пріобщеніи числа $i=\sqrt{-1}$, такъ какъ $x^2+1=(x+i)(x-i)$.

Функція x^4-8x^3-8 дѣлается приводимой по пріобщеніи радикала $\sqrt{3}$, дѣйствительно:

$$x^4-8x^3-8=$$
$$=[x^2-4x-2+2\sqrt{3}(x+1)][x^2-4x-2-2\sqrt{3}(x+1)].$$

Часто намъ придется пріобщать не одну ирраціональность, а нѣсколько. Такъ, функція x^4-2x^2+2 остается неприводимой по пріобщеніи радикала $\sqrt{2}$, но дѣлается приводимой, если мы пріобщимъ еще ирраціональность $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$:

$$x^4-2x^2+2=\left(x^2-\sqrt{2+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}\,x+\sqrt{2}\right).$$

Теорема 6 справедлива и при обобщенномъ понятіи о приводимости:

Если коэффиціенты функцій $F(x)$ и $f(x)$ принадлежатъ какой нибудь расширенной области раціональности, а функція $f(x)$, неприводимая въ этой области, имѣетъ общій корень съ функціей $F(x)$, то $F(x)$ дѣлится на $f(x)$.

[3]) Понятіе объ области ирраціональности играетъ такую важную роль и въ такой мѣрѣ необходимо для пониманія главы XIX, что мы считаемъ необходимымъ остановиться на этомъ понятіи значительно подробнѣе.

Подъ **областью раціональности** (по Кронекеру) или **числовымъ корпусомъ** (Zahlenkörper, по Дедекинду) разумѣютъ числовой комплексъ, обладающій тѣмъ свойствомъ, что производство каждаго изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ любыми двумя числами этого комплекса (конечно, кромѣ дѣленія на нуль) приводитъ къ числу того же комплекса. Этимъ свойствомъ обладаютъ: комплексъ (R) всѣхъ раціональныхъ чиселъ, комплексъ всѣхъ вещественныхъ чиселъ, комплексъ всѣхъ вещественныхъ и мнимыхъ чиселъ. Но и помимо этого существуетъ множество числовыхъ комплексовъ, обладающихъ тѣмъ же свойствомъ. Такъ напримѣръ, совокупность всѣхъ чиселъ вида $a+b\sqrt{2}$, гдѣ a и b суть любыя раціональныя числа, обладаетъ указаннымъ свойствомъ и потому образуетъ область раціональности; дѣйствительно, сумма, разность, произведеніе или частное двухъ чиселъ этого комплекса есть

число того же комплекса:

$$(a + b\sqrt{2}) \pm (a' + b'\sqrt{2}) = (a \pm a') + (b \pm b')\sqrt{2},$$

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2},$$

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{a' + b'\sqrt{2}} = \frac{aa' - 2bb'}{a'^2 - 2b'^2} + \frac{(a'b - ab')}{a'^2 - 2b'^2}\sqrt{2};$$

(такъ какъ a' и b' суть раціональныя числа, то знаменатель $a'^2 - 2b'^2$ не можетъ быть нулемъ, если a' и b' не обращаются совмѣстно въ нуль).

Замѣтимъ, что въ составъ каждой области раціональности входитъ область R всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Дѣйствительно, если въ составъ нѣкоторой области раціональности входитъ число a, то въ составъ ея, согласно опредѣленію, входитъ также число $\frac{a}{a} = 1$: а поэтому въ составъ этой области входятъ также числа: $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$ и т. д., т. е. всѣ цѣлыя числа, отсюда, въ свою очередь, слѣдуетъ, что въ составъ области входятъ и всѣ дроби.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ нѣкоторую область раціональности P. Пусть ε будетъ число, этой области не принадлежащее. Присоединимъ теперь къ области P всѣ числа, которыя мы можемъ получить путемъ производства раціональныхъ дѣйствій надъ числами области P и числомъ ε. Ясно, что этимъ путемъ мы получимъ новую область раціональности, которую мы будемъ обозначать черезъ $P(\varepsilon)$. Этотъ процессъ образованія области $P(\varepsilon)$ изъ области P и называется пріобщеніемъ ирраціональности ε къ области P.

Такъ напримѣръ, производство раціональныхъ дѣйствій надъ раціональными числами и числомъ $\sqrt{2}$ всегда приводитъ къ числу вида $a + b\sqrt{2}$, гдѣ a и b суть раціональныя числа. Поэтому область, содержащая всѣ числа вида $a + b\sqrt{2}$ гдѣ a и b суть раціональныя числа, представляетъ собой результатъ пріобщенія числа $\sqrt{2}$ къ области R. Точно также совокупность всѣхъ комплексныхъ чиселъ есть результатъ пріобщенія числа i къ области вещественныхъ чиселъ.

Положимъ теперь, что P есть нѣкоторыя область раціональности, а $f(x)$ есть цѣлая функція, коэффиціенты которой принадлежатъ этой области; въ такомъ случаѣ говорятъ, что функція $f(x)$ принадлежитъ этой области. Такъ, функція $x^2 - 2x + 5$ принадлежитъ области R, функція $x^2 - 2x\sqrt{2} + 3 - \sqrt{2}$ принадлежитъ области $R(\sqrt{2})$.

Функція, принадлежащая нѣкоторой области раціональности, называется приводимой въ этой области, если она разлагается на множителей, принадлежащихъ той же области. Въ противномъ случаѣ она называется неприводимой въ этой области.

Функція, неприводимая въ нѣкоторой области, можетъ сдѣлаться приводимой, если мы расширимъ область путемъ пріобщенія нѣкоторой ирраціональности. Такъ, функція $x^2 - 2$, принадлежащая области R, неприводима въ этой области; но если мы пріобщимъ къ этой области $\sqrt{2}$, то въ области $R(\sqrt{2})$ функція разлагается на множителей $x - \sqrt{2}$ и $x + \sqrt{2}$. Эта идея выясняется въ текстѣ на другихъ примѣрахъ.

ГЛАВА XII.

Основныя теоремы алгебры.

§ 64. Симметрическія функціи.

1. Условимся разумѣть подъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ совершенно произвольныя (неопредѣленныя, перемѣнныя) величины. Какъ мы видѣли въ § 61, можно составить функцію n-той степени $f(x)$, корнями которой будутъ эти n величинъ;

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \qquad (1)$$

и есть требуемая функція; коэффиціентъ при высшей степени x мы полагаемъ равнымъ 1. Располагая $f(x)$ по степенямъ x, получимъ:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n, \qquad (2)$$

гдѣ:

$$\begin{aligned} -a_1 &= \Sigma x_1, \\ a_2 &= \Sigma x_1 x_2, \\ -a_3 &= \Sigma x_1 x_2 x_3, \\ &\ldots \\ \pm a_n &= x_1 x_2 x_3 \ldots x_n, \end{aligned} \qquad (3)$$

т. е. $-a_1$ есть сумма всѣхъ величинъ x_i, a_2—сумма произведеній этихъ величинъ по двѣ,—a_3—сумма ихъ произведеній по три и т. д., наконецъ $\pm a_n$ есть произведеніе всѣхъ x_i (ср. § 55).

Итакъ, коэффиціенты функціи $f(x)$ можно выразить раціонально черезъ ея корни.

Суммы, стоящія въ правыхъ частяхъ равенствъ (3), т. е. сумма всѣхъ x_i, сумма ихъ произведеній по два, сумма ихъ произведеній по три и т. д. суть симметрическія функціи отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$; это значитъ, эти функціи не мѣняются, если какимъ либо образомъ переставить величины

$x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти функціи — a_1, a_2, $-a_3, \ldots, \pm a_n$ мы назовемъ основными симметрическими функціями.

2. Опредѣлимъ теперь, что мы будемъ, вообще, разумѣть подъ симметрическими функціями.

Выраженіе $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, составленное посредствомъ дѣйствій сложенія, вычитанія и умноженія надъ n величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и какими нибудь другими числами, называется симметрической функціей отъ этихъ величинъ, если оно не мѣняется при произвольной перестановкѣ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Относительно симметрическихъ функцій имѣетъ мѣсто теорема, важная для всей алгебры. Эта теорема заключается въ слѣдующемъ:

Каждая симметрическая функція $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можетъ быть выражена въ видѣ цѣлой и раціональной функціи отъ основныхъ симметрическхъ функцій.

Иначе говоря, при помощи сложенія, вычитанія и умноженія можно образовать такое выраженіе $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, что равенство

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (4)$$

при замѣнѣ величинъ $a_1, \ldots, a_n$ ихъ выраженіями (3) обращается въ тождество.

Мы приведемъ очень простое и изящное доказательство этой теоремы, данное Коши.

Ясно, что теорема справедлива для $n = 1$; въ этомъ случаѣ мы имѣемъ только одну основную симметрическую функцію $-a_1 = x_1$. Мы докажемъ нашу теорему для всякаго n, если, пользуясь совершенной индукціей, допустимъ, что она справедлива для $n-1$ перемѣнныхъ величинъ и въ этомъ предположеніи докажемъ, что она справедлива и для функцій, содержащихъ n перемѣнныхъ.

4. Чтобы получить основныя симметрическія функціи $n-1$ величинъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$, составимъ частное

$$\varphi(x) = f(x) : (x - x_1),$$

которое равно $(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$; слѣдовательно,

$$(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \ldots + q_{n-1},$$

гдѣ (§ 61, (6)):

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + a_1, \\ q_2 &= x_1^2 + a_1 x_1 + a_2, \\ q_3 &= x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3, \\ &\ldots \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + a_1 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Итакъ, основныя симметрическія функціи величинъ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ суть цѣлыя функціи величинъ x_1 и $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Предполагая же, что наша теорема справедлива для $n-1$ величинъ, мы можемъ утверждать, что всякая симметрическая функція отъ $x_2, \ldots, x_n$ выражается раціонально черезъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Представимъ себѣ, что данная намъ симметрическая функція

$$S = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

расположена по степенямъ x_1; тогда коэффиціенты отдѣльныхъ степеней будутъ симметрическими функціями отъ $x_2, \ldots, x_n$ и, слѣдовательно, выражаются цѣлыми функціями отъ величинъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Предполагая теорему 3 справедливой для симметрическихъ функцій отъ $n-1$ велчинъ, мы получили, что функція S можетъ быть представлена въ видѣ цѣлой функціи величинъ $x_1, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Полученное такимъ образомъ выраженіе для S обозначимъ черезъ $F(x_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Если теперь цѣлую функцію $F(x, a_1, a_2 \ldots a_{n-1})$ раздѣлимъ на $f(x)$, то, согласно § 61 (5), получимъ частное Q и остатокъ R, степень котораго относительно x не превосходить $n-1$;

$$F(x) = Qf(x) + R;$$

Q и R, кромѣ $x, a_1, \ldots, a_{n-1}$, содержатъ также и a_n. Положимъ въ послѣдней формулѣ $x = x_1$; тогда $f(x_1) = 0$ и $F = S$; слѣдовательно:

$$S = R(x_1) = R(x_1, a_1, \ldots, a_n),$$

гдѣ R есть цѣлая функція отъ $x_1, a_1, \ldots, a_n$, степень которой относительно x_1 не превышаетъ $n-1$.

По предположенію, S есть симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Она не мѣняется, если, напримѣръ, замѣстить другъ другомъ x_1 и x_2; не мѣняются при этомъ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Слѣдовательно, S равно также $R(x_2)$. Вообще

$$S = R(x_1) = R(x_2) = R(x_3) = \ldots = R(x_n).$$

Цѣлая функція $R(x) - S$, степень которой не превышаетъ $n-1$, обращается въ нуль для n значеній перемѣннаго x: $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Согласно § 61, 5, она должна сводиться къ нулю тождественно. Положимъ:

$$R(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1};$$

тогда всѣ коэффиціенты $A_0, A_1, A_2, \ldots (A_{n-1} - S)$ должны быть равны нулю. Слѣдовательно,

$$S = A_{n-1},$$

т. е. S равно нѣкоторой цѣлой функціи отъ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, что и требовалось доказать [1]).

5. Приведенное доказательстно теоремы о симметрическихъ функціяхъ даетъ способъ вычисленія ихъ. Правда, большей частью дѣло не обходится безъ продолжительныхъ вычисленій. Разберемъ, напримѣръ, функцію ($n = 3$)

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2,$$

которая, очевидно, есть симметрическая функція отъ x_1, x_2, x_3. Пусть

$$-a_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad -a_3 = x_1x_2x_3$$

будутъ основныя симметрическія функціи; количества x_1, x_2 и x_3 служатъ корнями функціи третьей степени:

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

а x_1, x_2—корнями функціи второй степени:

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = x^2 + (x_1 + a_1)x + (x_1^2 + a_1x + a_2).$$

Слѣдовательно:

$$x_2 + x_3 = -(x_1 + a_1), \quad x_2x_3 = x_1^2 + a_1x_1 + a_2,$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = 3x_1^2 + 2a_1x_1 + a_2,$$
$$(x_2 - x_3)^2 = (x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 = -3x_1^2 - 2a_1x_1 - (4a_2 - a_1^2).$$

---

[1]) Полезно выяснить себѣ тождества (5) на частномъ примѣрѣ: положимъ, что мы имѣемъ четыре перемѣнныхъ; тогда

$$q_1 = x_2 + x_3 + x_4,$$
$$q_2 = x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$
$$q_3 = x_2x_2x_3;$$

съ другой стороны,

$$a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$
$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,$$
$$a_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4,$$
$$a_4 = x_1x_2x_3x_4.$$

Слѣдовательно:

$$-D = (3x_1^2 + 2a_1x_1 + a_2)^2(3x_1^2 + 2a_1x_1 + 4a_2 - a_1^2).$$

Если вмѣсто x_1 поставить x и полученное выраженіе раздѣлить на $f(x)$, то остатокъ, который не долженъ зависѣть отъ x, и будетъ представлять собой требуемое выраженіе для D.

Можно упростить вычисленіе, если возвысить въ квадратъ $3x_1^2 + 2a_1x + a_2$ и понизить его степень при помощи уравненія $f(x_1) = 0$; получимъ:

$$(3x_1^2 + 2a_1x_1 + a_2)^2 = (a_1^2 - 3a_2)x_1^2 + (a_1a_2 - 9a_3)x_1 + (a_2^2 - 3a_1a_3).$$

Помножимъ это выраженіе на $3x_1^2 + 2a_1x_1 + 4a_2 - a_1^2$ и результатъ раздѣлимъ на $f(x)$, замѣняя x_1 на x. Такимъ путемъ вычисленія идутъ быстро и въ конечномъ результатѣ даютъ:

$$D = a_1^2a_2^2 + 18a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 - 27a_3^2.$$

Это выраженіе носитъ названіе **дискриминанта** функціи третьей степени. Если $D = 0$, то это значитъ, что изъ трехъ корней x_1, x_2, x_3 два равны между собой.

§ 65. Суммы одинаковыхъ степеней.

1. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно выразить симметрическую функцію еще болѣе простымъ способомъ черезъ основныя. Разсмотримъ особенно важный изъ случаевъ этого рода.

Пусть

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = \varphi_1(x), \quad \frac{f(x)}{x - x_2} = \varphi_2(x), \ldots, \frac{f(x)}{x - x_n} = \varphi_n(x)$$

и

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}, \quad (1)$$

причемъ, согласно § 61, 3 и 4:

$$\varphi_1(x_1) = f'(x_1), \; \varphi_1(x_2) = 0, \ldots, \varphi_1(x_n) = 0;$$

такія же равенства имѣютъ мѣсто и для $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Равенства (5) выражаютъ, такимъ образомъ, слѣдующія тождества:

$$-(x_2 + x_3 + x_4) = x_1 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = x_1^2 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_1 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4);$$

$$x_2x_3x_4 = x_1^3 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x_1^2 + x_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4).$$

Сумма этихъ функцій

$$F(x) = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \dots + \frac{f(x)}{x-x_n}$$

или

$$F(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x)$$

есть цѣлая функція $(n-1)$ степени; при этомъ

$$F(x_1) = f'(x_1),\ F(x_2) = f'(x_2),\ \dots,\ F(x_n) = f'(x_n).$$

Разность $F(x) - f'(x)$ точно такъ же есть цѣлая функція, степень которой не превосходитъ $n-1$. Эта разность обращается въ нуль для $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. для n значеній x; слѣдовательно, по теоремѣ § 61, 5 она сводится къ нулю тождественно. Итакъ, мы имѣемъ слѣдующее тождество, т. е. равенство, справедливое для всѣхъ значеній x:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \dots + \frac{f(x)}{x-x_n} = f'(x). \qquad (2)$$

2. Положимъ

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \dots + q_{n-1}.$$

Тогда, согласно § 64, 4:

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + d_1, \\ q_2 &= x_1^2 + d_1x_1 + d_2, \\ q_3 &= x_1^3 + d_1x_1^2 + d_2x_1 + d_3, \qquad (3) \\ &\dots \\ q_{n-1} &= x_1^{n-1} + d_1x_1^{n-2} + d_2x_1^{n-3} + \dots + d_{n-1} \end{aligned}$$

Замѣняя здѣсь x_1 послѣдовательно черезъ $x_2, x_3, \dots, x_n$, мы получимъ всѣ члены суммы (2).

Если обозначимъ черезъ $\Sigma q_1, \Sigma q_2, \Sigma q_3, \dots, \Sigma q_{n-1}$ суммы составленныхъ такимъ образомъ выраженій q, то равенство (2) приметъ видъ:

$$nx^{n-1} + x^{n-2}\Sigma q_1 + x^{n-3}\Sigma q_2 + \dots + \Sigma q_{n-1} = f'(x)\ [2]);$$

[2]) Это получается въ виду соотношенія (2) путемъ почленнаго сложенія равенствъ

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^{n-1} + q_1'x^{n-2} + q_2'x^{n-3} + \dots + q'_{n-1},$$

$$\frac{f(x)}{x-x_2} = x^{n-1} + q_1''x^{n-2} + q_2''x^{n-3} + \dots + q''_{n-1},$$

$$\frac{f(x)}{x-x_3} = x^{n-1} + q_1'''x^{n-2} + q_2'''x^{n-3} + \dots + q'''_{n-1}$$

. . . .

При этомъ

сравнивая это выраженіе $f'(x)$ съ (1), получимъ:

$$(n-1)a_1 = \Sigma q_1,\ (n-2)a_2 = \Sigma q_2, \ldots, a_{n-1} = \Sigma q_{n-1} \qquad (4)$$

Введемъ теперь симметрическія функціи, представляющія собой суммы одинаковыхъ степеней перемѣнныхъ, для которыхъ примемъ обозначенія:

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_n, \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ldots + x_n^2, \\ &\ldots \\ s_n &= x_1^n + x_2^n + x_3^n \ldots + x_n^n. \end{aligned}$$

Если мы по формуламъ (3) образуемъ Σq_i, то [*])

$$\begin{aligned} \Sigma q_1 &= s_1 + na_1, \\ \Sigma q_2 &= s_2 + a_1 s_1 + na_2, \\ &\ldots \\ \Sigma q_{n-1} &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \ldots + na_n \end{aligned}$$

Подставляя эти выраженія въ равенства (4), получимъ:

$$\begin{aligned} 0 &= s_1 + a_1, \\ 0 &= s_2 + a_1 s_1 + 2a_2, \\ 0 &= s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3, \\ 0 &= s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + 4a_4, \\ &\ldots \\ 0 &= s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + a_3 s_{n-4} + \ldots + (n-1)a_{n-1} \end{aligned} \qquad (6)$$

Эта система уравненій легко разрѣшается относительно суммъ $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$. Мы получимъ ихъ въ функціяхъ отъ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= -a_1, \\ s_2 &= a_1^2 - 2a_2, \\ s_3 &= -a_1^3 + 3a_1 a_2 - 3a_3, \\ s_4 &= a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + 4a_1 a_3 + 2a_2^2 - 4a_4. \end{aligned} \qquad (7)$$

$q_1' = x_1 + a_1,\ q_2' = x_1^2 + a_1 x_1 + a_2,\ q_3' = x_1^3 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 + a_3,$
$q_1'' = x_2 + a_1,\ q_2'' = x_2^2 + a_1 x_2 + a_2,\ q_3'' = x_2^3 + a_1 x_2^2 + a_2 x_2 + a_3,$
$q_1''' = x_3 + a_1,\ q_2''' = x_3^2 + a_1 x_3 + a_2,\ q_3''' = x_3^3 + a_1 x_3^2 + a_2 x_3 + a_3$
. . . .

[*]) Смотри предыдущее примѣчаніе.

$$\begin{aligned} \Sigma q_1 &= q'_1 + q_1'' + q'''_1 + \ldots q_1^{(n)}, \\ \Sigma q_2 &= q'_2 + q_2'' + q'''_2 + \ldots q_2^{(n)}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Съ помощью суммъ одинаковыхъ степеней легче, чѣмъ другимъ путемъ, вычисляются многія другія симметрическія функціи.

3. Основныя симметрическія функціи можно также выразить черезъ суммы $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$; напримѣръ:

$$a_1 = -s_1,$$
$$2a_2 = s_1^2 - s_2,$$
$$2 \cdot 3a_3 = -s_1^3 + 3s_1s_2 - 2s_3,$$
$$\cdot \qquad \cdot$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція $f(x)$ вполнѣ опредѣляется, если извѣстно, что $a_0 = 1$, и даны суммы одинаковыхъ степеней ея корней; кромѣ того, любая симметрическая функція корней $f(x)$ можетъ быть выражена черезъ $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

Выраженія функцій s черезъ a, какъ видно изъ предыдущихъ формулъ, имѣютъ коэффиціентами только цѣлыя числа: выраженія же функцій a черезъ суммы s содержатъ и дробные коэффиціенты.

4. Съ помощью равенствъ (6) можно находить суммы s_k пока $k < n$. Очень легко, впрочемъ, получить равенства для нахожденія $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$, составляя суммы [4]):

$$\Sigma f(x_1) = 0,\ \Sigma x_1 f(x_1) = 0,\ \Sigma x_1^2 f(x_1) = 0, \ldots$$

а именно:

$$\begin{aligned} 0 &= s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \ldots + n a_n, \\ 0 &= s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \ldots + a_n s_1, \\ 0 &= s_{n+2} + a_1 s_{n+1} + a_2 s_n + \ldots + a_n s_2, \\ &\cdot \end{aligned} \qquad (9)$$

[4]) Такъ какъ

$$f(x_1) = x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n = 0,$$
$$f(x_2) = x_2^n + a_1 x_2^{n-1} + a_2 x_2^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_2 + a_n = 0,$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$f(x_n) = x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + a_2 x_n^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x_n + a_n = 0,$$

то и сумма этихъ выраженій равна нулю; это и выражено въ текстѣ равенствомъ $\Sigma f(x_1) = 0$. Производя же сложеніе въ дѣйствительности, мы получимъ первое изъ равенствъ (9). Точно такъ же, произведенія $x_1 f(x_1), x_2 f(x_2) \ldots x_n f(x_n)$ равны нулю, а потому и сумма ихъ равна нулю; это и выражено въ текстѣ равенствомъ $\Sigma x_1 f(x_1) = 0$. Раскрывая произведенія и складывая ихъ, получимъ второе изъ равенствъ (9) и т. д.

Тѣмъ же путемъ можно вычислить $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$; составимъ для этого суммы:

$$\Sigma x_1^{-1} f(x_1) = 0, \ \Sigma x_1^{-2} f(x_1) = 0,$$

откуда

$$0 = s_{n-1} + d_1 s_{n-2} + d_2 s_{n-3} + \ldots + d_n s_{-1},$$

$$0 = s_{n-2} + d_1 s_{n-3} + d_2 s_{n-4} + \ldots + d_n s_{-2},$$

сумму s_0 нужно полагать равной n. Замѣтимъ, что въ выраженія суммъ $s_{-1}, s_{-2}, \ldots$ через $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ послѣднія будутъ входить также въ составъ знаменателей *).

5. Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ. Положимъ, что нужно вычислить симметрическую функцію $\Sigma x_1^2 x_2^2$, т. е. сумму произведеній квадратовъ перемѣнныхъ x_r, взятыхъ попарно. Обратимся для этого къ равенству

$$(\Sigma x_1^2)^2 = 2 \Sigma x_1^2 x_2^2 + \Sigma x_1^4$$

или

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 = \tfrac{1}{2}(s_2^2 - s_4) =$$
$$= d_2^2 - 2 d_1 d_3 + 2 d_4.$$

Вотъ еще задача, которая рѣшается съ помощью суммъ одинаковыхъ степеней. Пусть

$$f(x) = x^n + d_1 x^{n-1} + \ldots + d_n$$

данная функція отъ x n-той степени; нужно найти функцію

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

корни которой равны квадратамъ корней функціи $f(x)$.

Если $s_1, s_2, s_3, \ldots$ суть суммы одинакихъ степеней корней функціи $f(x)$, то $s_2, s_4, s_6, \ldots$ суть суммы соотвѣтствующихъ степеней корней функціи $F(x)$; формулы пункта 3-го дадутъ для коэффиціентовъ A_1, A_2,

*) Первыя выраженія суммъ для одинаковыхъ степеней далъ Альбертъ Жираръ (Albert Girard) въ сочиненіи „Invention nouvelle en l'algèbre“ (1629). Эти выраженія были обобщены Ньютономъ (Arithmetica universalis, 1707). Поэтому они и носятъ названіе Ньютоновыхъ формулъ.

выраженія

$$A_1 = -s_2,$$
$$2A_2 = s_2^2 - s_4,$$
$$6A_3 = -s_2^3 + 3s_2s_4 - 2s_6,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Отсюда съ помощью формулъ (7) можно выразить A_1, A_2, ... черезъ a_1, a_2, ..., a_n, напримѣръ:

$$A_1 = a_1^2 - 2a_2,$$
$$A_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4.$$

Какъ и слѣдовало ожидать, выраженіе A_2 тождественно съ выраженіемъ, найденнымъ выше для $\Sigma x_1^2 x_2^2$.

Этотъ способъ примѣнимъ и въ томъ случаѣ, если по данной функціи $f(x)$ нужно опредѣлить другую, корни которой суть любыя степени, скажемъ, k-тыя степени корней функціи $f(x)$. Суммы одинаковыхъ степеней корней функціи $F(x)$ будутъ тогда s_k, s_{2k}, ... s_{3k}. Коэффиціенты A опредѣляются по тѣмъ же формуламъ п. 3-го.

6. Можно еще другимъ путемъ опредѣлить коэффиціенты функціи $F(x)$, корни которой суть квадраты корней функціи $f(x)$. Съ этой цѣлью положимъ $x^2 = y$; если вмѣсто y поставимъ одинъ изъ корней функціи $F(x)$, то либо $f(\sqrt{y})$, либо $f(-\sqrt{y})$ должно обратиться въ нуль. Такимъ образомъ

$$F(y) = \pm f(\sqrt{y})\, f(-\sqrt{y}), \qquad (10)$$

причемъ верхній знакъ имѣетъ мѣсто при четномъ, нижній при нечетномъ n [5]).

Разложимъ $f(x)$, на два слагаемыхъ $f_1(x) + x f_2(x)$, изъ которыхъ первое содержитъ всѣ четныя, а второе — нечетныя степени x; тогда:

$$F(y) = \pm\left(f_1(\sqrt{y}) + \sqrt{y} f_2(\sqrt{y})\right)\left(f_1(\sqrt{y}) - \sqrt{y} f_2(\sqrt{y})\right)$$
$$= \pm\left[\left(f_1(\sqrt{y})\right)^2 - y\left(f_2(\sqrt{y})\right)^2\right]$$

Въ послѣднюю формулу совершенно не входятъ нечетныя степени

[5]) Правая часть равенства (10), какъ обнаруживаютъ послѣдующія вычисленія, есть цѣлая функція n-ой степени отъ y; такъ какъ она имѣетъ тѣ же корни, что и $F(y)$, а старшіе коэффиціенты при указанномъ соотвѣтствіи знаковъ, равны, то обѣ функціи тождественны, что и выражается равенствомъ (10).

$\sqrt{y}$. Пусть, напримѣръ, n четное; тогда:

$$f_1(x) = x^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-1} +$$
$$f_2(x) = \qquad a_1 x^{n-2} + a_3 x^{n-1} +$$

и потому

$$F(x) = \left(y^{\frac{n}{2}} + a_2 y^{\frac{n-2}{2}} + a_4 y^{\frac{n-4}{2}} + \ldots\right)^2$$
$$- y\left(a_1 y^{\frac{n-2}{2}} + a_3 y^{\frac{n-4}{2}} + \ldots\right)^2 -$$
$$= y^n + (2a_2 - a_1^2) y^{n-1} + (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) y^{n-2} + \ldots$$

Вычисленія при этомъ пріемѣ еще проще, чѣмъ при пользованіи суммами одинаковыхъ степеней.

§ 66. Основная теорема о существованіи корня алгебраическаго уравненія.

1. Выше мы видѣли, что всегда можно опредѣлить n коэффиціентовъ цѣлой функціи $f(x)$ такъ, что эта функція будетъ имѣть корнями n произвольно заданныхъ величинъ; въ извѣстномъ смыслѣ можно сказать, что многообразіе функцій съ n корнями при различныхъ значеніяхъ n столь же велико, какъ и многообразіе всѣхъ функцій $f(x)$, которыя вообще можно составить. Этимъ еще не доказывается, конечно, что оба эти многообразія совершенно покрываютъ другъ друга; другими словами: еще не доказано, что функція n-той степени всегда имѣетъ n корней.

Достаточно, впрочемъ, доказать, что при всякомъ n каждая функція n-той степени имѣетъ по меньшей мѣрѣ одинъ корень (вещественный или мнимый). Въ самомъ дѣлѣ, пусть α есть корень функціи $f(x)$; функція $(n-1)$-ой степени $\dfrac{f(x)}{x-\alpha}$ точно также имѣетъ корень β и т. д.; такимъ путемъ мы заключаемъ, что $f(x)$ разлагается на n линейныхъ множителей [6]).

Если мы докажемъ, что каждая функція съ вещественными коэффиціентами имѣетъ корень, то распространить это на случай мнимыхъ коэффиціентовъ не составитъ труда. Чтобы убѣдиться въ этомъ возьмемъ двѣ функціи $f_1(x)$ и $f_2(x)$ съ сопряженными мнимыми коэффиціентами; тогда $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$ есть функція съ вещественными коэффиціентами. Если $f(x)$ имѣетъ корень α_1, то либо $f_1(\alpha_1) = 0$, либо $f_2(\alpha_1) = 0$. Пусть

[6]) И, слѣдовательно, имѣетъ n корней.

$f_1(\alpha_1) = 0$; тогда, если α_2 есть число, сопряженное съ α_1, то $f_2(\alpha_2) = 0$ (§ 44, 4). Итакъ, каждая изъ функцій $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имѣетъ корень

Слѣдовательно, намъ достаточно доказать слѣдующую теорему:

. Каждая цѣлая функція $f(x)$ съ вещественными коэффиціентами имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ вещественный или мнимый корень.

Эта теорема настолько важна, что ее называютъ основной теоремой алгебры. Впервые ее доказалъ Гауссъ. Онъ далъ этой теоремѣ три доказательства, построенныхъ на совершенно различныхъ основаніяхъ.

Второе и третье изъ этихъ доказательствъ не могутъ быть проведены элементарно. Первое же, опубликованное Гауссомъ въ докторской диссертаціи (1799 г.), а 50 годами позже существенно имъ упрощенное и усовершенствованное, такъ несложно и ясно, что его легко понять, обладая только элементарными знаніями. Желая изложить это доказательство именно въ такой удобопонятной формѣ, мы будемъ слѣдовать второй редакціи.

Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся случаемъ, когда функція $f(x)$ имѣетъ вещественные коэффиціенты. По сдѣланному выше замѣчанію, мы не внесемъ этимъ существеннаго ограниченія, между тѣмъ это даетъ значительное упрощеніе.

2. Итакъ, пусть

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (1)$$

цѣлая функція n-той степени, а коэффиціенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ данныя вещественныя числа. Нужно доказать, что существуетъ вещественное или мнимое число, обращающее въ нуль $f(z)$, если его подставить вмѣсто z. Положимъ:

$$z = x + iy$$

и будемъ изображать z, какъ изложено въ § 47, точкой на плоскости. Тогда x и y будутъ координатами точки, которую мы для краткости будемъ называть точкой z.

Функція $f(z)$ въ каждой точкѣ этой плоскости имѣетъ опредѣленное значеніе; нужно доказать, что существуетъ по крайней мѣрѣ одна точка, въ которой $f(z)$ имѣетъ значеніе, равное нулю. Такую точку можно назвать корневой точкой функціи $f(z)$. Отдѣлимъ въ функціи $f(z)$ вещественную часть отъ мнимой:

$$f(z) = X + iY. \qquad (2)$$

Составныя части X и Y легко найти, примѣняя къ степенямъ

$(x+iy)$ формулу бинома. Впрочемъ, болѣе простыя формулы получатся при употребленіи полярныхъ координатъ благодаря теоремѣ Муавра.

Итакъ, положимъ:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$(x+iy)^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi);$$

согласно § 47, 8, получимъ:

$$\begin{aligned} X &= r^n\cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \\ &\quad + a_n, \\ Y &= r^n\sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2}\sin(n-2)\varphi + \\ &\quad + a_{n-1} r\sin\varphi. \end{aligned} \qquad (3)$$

3. Мы дадимъ сейчасъ другія выраженія для X и Y, которыми воспользуемся для вывода, очень важнаго для послѣдующаго изложенія.

Положимъ (см. главу о тригонометріи)

$$t = \tan\tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}$$

тогда

$$\frac{(1+it)^2}{1+t^2}$$

Отсюда слѣдуетъ.

$$(1+t^2)^n(X+iY) = r^n(1+it)^{2n} + a_1 r^{n-1}(1+it)^{2n-2}(1+t^2) + \\ + a_n(1+t^2)^n;$$

примѣняя формулу бинома къ отдѣльнымъ членамъ и располагая ихъ по степенямъ t, получимъ:

$$X = \frac{F(t)}{(1+t^2)^n}, \quad Y = \frac{\Phi(t)}{(1+t^2)^n}, \qquad (4)$$

гдѣ $F(t)$ и $\Phi(t)$ суть цѣлыя функціи отъ t, степеней не выше $2n$ и $2n-1$ (Помимо того $F(t)$ и $\Phi(t)$ суть цѣлыя функціи n-той степени отъ r).

4. Всѣ точки плоскости x, y, которымъ соотвѣтствуетъ постоянное значеніе модуля r, лежатъ на окружности радіуса r съ центромъ въ началѣ координатъ. Будемъ обозначать эту окружность черезъ (r). Если мы захотимъ найти точки, въ которыхъ X или Y обращаются въ нуль и которыя лежатъ на этой окружности, то нужно при постоянномъ r рѣшить уравненія: $F(t) = 0$ и $\Phi(t) = 0$, имѣя въ виду, что каждому

значенію t соотвѣтствуетъ по одному значенію $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, а слѣдовательно, и одна точка на кругѣ.

Нужно замѣтить, что, кромѣ корней $\varphi(t) = 0$, функція Y имѣетъ корень при $t = \infty$, т. е. при $\varphi = \pi$ [7]). Зная степени функцій X и Y, мы можемъ сдѣлать слѣдующій выводъ.

Каждая изъ двухъ функцій X и Y на окружности (r) не можетъ обращаться въ нуль больше $2n$ разъ.

Отсюда слѣдуетъ, что ни одна изъ функцій X и Y не можетъ быть равна нулю на протяженіи нѣкоторой площади.

Въ самомъ дѣлѣ, черезъ такую площадь всегда можно провести дугу окружности съ центромъ въ началѣ координатъ; на этой окружности X или Y обращались бы въ нуль безчисленное множество разъ.

5. Корневыми точками функціи $f(z)$ служатъ точки, въ которыхъ одновременно

$$X = 0 \quad \text{и} \quad Y = 0.$$

При доказательствѣ существованія такихъ точекъ мы будемъ опираться на непрерывность функцій X и Y. Это свойство функціи можно выразить такъ:

Пусть c_1 и c_2 двѣ точки, въ которыхъ X имѣетъ разные знаки. На каждой линіи (прямой или кривой), соединяющей эти двѣ точки c_1 и c_2, есть, по крайней мѣрѣ, одна точка, въ которой X обращается въ нуль [8]).

То же относительно Y.

6. Сначала займемся функціей Y и докажемъ слѣдующее предложеніе.

Можно r взять столь большимъ, что функція Y на окружности (r) будетъ имѣть тотъ же знакъ, что и $\sin n\varphi$, по крайней мѣрѣ, во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда $\sin n\varphi$ по абсолютной величинѣ превосходитъ напередъ заданное произвольно малое положительное число ϑ.

[7]) Въ выраженіи для X степень t въ числителѣ и знаменателѣ одна и та же; въ выраженіи же для Y степень t въ числителѣ ниже, нежели въ знаменателѣ. Поэтому, когда t возрастаетъ неопредѣленно по абсолютной величинѣ, то X стремится къ предѣлу, отличному отъ нуля, а Y къ нулю. Поэтому X обращается въ нуль не болѣе $2n$ разъ, т. е. при тѣхъ значеніяхъ t, которые обращаютъ въ нуль числителя; Y обращается не болѣе $2n+1$ разъ въ нуль вслѣдствіе того, что обращается въ нуль числитель, и одинъ разъ при $t = \infty$, т. е. при $\varphi = \pi$; всего, слѣдовательно, каждая изъ функцій X и Y можетъ обратиться въ нуль не болѣе $2n$ разъ.

[8]) Это утвержденіе нуждается, конечно, въ доказательствѣ, которое, однако, требуетъ продолжительныхъ разсужденій.

Въ этомъ мы убѣждаемся, представляя Y въ видѣ:

$$Y = r^n\left(\sin n\varphi + \frac{a_1}{r}\sin(n-1)\varphi + \frac{a_2}{r^2}\sin(n-2)\varphi + \ldots\right)$$

Дѣйствительно, всегда можно положить r настолько большимъ, что сумма всѣхъ членовъ, слѣдующихъ за первымъ, по модулю, станетъ меньше любой величины, а слѣдовательно, и меньше ϑ; тогда знакъ опредѣляется первымъ членомъ.

Ведемъ наши разсужденія дальше.

Отмѣтимъ на окружности (r) точки, въ которыхъ

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

и обозначимъ эти точки цифрами:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-1$$

Благодаря этому, на окружности получимъ $2n$ интерваловъ:

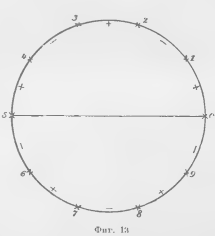
$$(0, 1), (1, 2), (2, 3), \ldots [(2n-1), 0],$$

въ которыхъ $\sin n\varphi$ поперемѣнно имѣетъ положительное и отрицательное значеніе.

(Фиг 13 даетъ это дѣленіе для случая $n = 5$).

Если мы выдѣлимъ ближайшія окрестности точекъ дѣленія *) и если положить r достаточно большимъ, то и Y будетъ имѣть въ этихъ интервалахъ поперемѣнно положительныя и отрицательныя значенія [9]).

Согласно п. 5, функція Y должна обращаться въ нуль въ окрестности каждой изъ точекъ дѣленія; изъ предложенія же п. 4-го слѣдуетъ, что она не можетъ обращаться въ нуль ни



Фиг. 13

*) Окрестностями точекъ дѣленія мы будемъ называть такіе отрѣзки на окружности (r), въ предѣлахъ которыхъ

$$\frac{k\pi}{n} - \frac{\tau_1}{n} < \varphi < \frac{k\pi}{n} + \frac{\tau_1}{n}$$

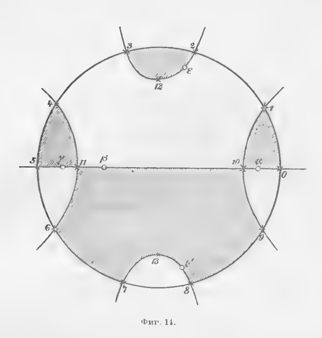
если положить $\vartheta = \sin\tau_1$. Длина выдѣленной такимъ образомъ на окружности (r) дуги есть

$$\frac{2\tau_1 r}{n}$$

[9]) Если мы положимъ, напримѣръ, $\varphi = \frac{\pi}{n}$, то $\sin n\varphi = 0$; но если мы выдѣ-

въ какой другой точкѣ окружности (r).

Съ другой стороны, такъ какъ знакъ X при достаточно большомъ r зависитъ отъ знака перваго члена $r^n \cos n\varphi$, то X въ окрестностяхъ четныхъ точекъ $0, 2, 4, \ldots, 2n-2$ и въ самихъ этихъ точкахъ имѣетъ положительное значеніе, а въ нечетныхъ точкахъ отрицательное.



Фиг. 11.

7. Какъ мы видѣли въ п. 4, Y не можетъ обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ какой нибудь площади. Слѣдовательно, вся плоскость раздѣляется на области, въ которыхъ Y имѣетъ положительное или отрицательное значеніе; эти области отдѣлены другъ отъ друга линіями, на которыхъ Y обращается въ нуль.

Отъ нѣкотораго участка $(2g, 2g+1)$ окружности (r) внѣ круга (r) расположена область, въ которой Y имѣетъ положительное значеніе; эта область тѣмъ больше приближается краями къ сектору, заключенному между $\varphi = \frac{2g\pi}{n}$ и $\varphi = \frac{(2g+1)\pi}{n}$, чѣмъ больше мы будемъ удаляться

лимъ достаточно малую дугу η, какъ указано въ примѣчаніи автора, то въ интервалѣ отъ $\frac{\pi}{n} - \eta$ до $\frac{\pi}{n}$ $\sin n\varphi > 0$, а въ интервалѣ отъ $\frac{\pi}{n}$ до $\frac{\pi}{n} + \eta$ $\sin n\varphi < 0$, слѣдовательно, при достаточно большомъ r и Y мѣняетъ знакъ въ этомъ интервалѣ.

отъ центра [10]). Эта полоса должна имѣть продолженіе и внутри круга (r). Часть этой области, лежащую внутри круга (r) обозначимъ черезъ G; эта часть можетъ быть очень разнообразной по своему контуру; два контура, касающіеся другъ друга въ отдѣльныхъ точкахъ мы не будемъ, однако, считать соединенными.

Площадь G либо оканчивается внутри круга (r) и, кромѣ интервала $(2g, 2g+1)$, не приходитъ болѣе въ соприкосновеніе съ окружностью, либо достигаетъ другого интервала $(2k, 2k+1)$, либо, наконецъ, раздѣляется на двѣ и больше вѣтви, изъ которыхъ каждая кончается на какомъ нибудь участкѣ $(2l, 2l+1)$.

Примѣромъ перваго случая на фиг. 14 можетъ служить область $(0, 1, 10)$ или $(2, 3, 12)$; примѣромъ второго случая служитъ область $(8, 9, 10, 11, 6, 7)$. Въ этомъ простомъ примѣрѣ не имѣетъ мѣста дѣленіе на многія вѣтви.

Можно было бы предположить, что внутри площади G лежитъ, какъ островъ, маленькая площадка, въ которой Y опять имѣетъ отрицательное значеніе; и такого рода контуръ (замѣтимъ мимоходомъ, этотъ случай въ дѣйствительности не можетъ представиться) не помѣшалъ бы нашимъ заключеніямъ.

8. Представимъ себѣ, что мы обходимъ контуръ области G такимъ образомъ, что самая область остается всегда слѣва. Тогда каждый интервалъ окружности, входящій въ составъ контура, въ которомъ Y имѣетъ положительное значеніе, направленъ такъ, что внутренняя часть круга лежитъ влѣво, т. е. мы проходимъ дугу отъ четной точки къ нечетной. Контуръ G покидаетъ окружность (r) на нечетной точкѣ дѣленія и встрѣчаетъ ее снова въ четной.

Разсмотримъ часть контура S, которая отъ точки $2g+1$ черезъ внутреннюю часть круга (r) ведетъ къ точкѣ $2k$; по всей длинѣ контура S $Y < 0$. Въ точкѣ $2g+1$ функція X имѣетъ отрицательное значеніе, а въ точкѣ $2k$—положительное. Слѣдовательно, на контурѣ S функція X должна, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ обратиться въ нуль. Точка, въ которой X обращается въ нуль, и будетъ корневой точкой функціи $f(z)$,

[10]) Когда φ становится больше $\frac{2g\pi}{n}$, то $\sin n\varphi$ получаетъ положительное значеніе, которое мѣняетъ знакъ лишь послѣ того какъ φ пройдетъ черезъ $\frac{(2g+1)\pi}{n}$. Такимъ образомъ въ интервалѣ отъ $\frac{2g\pi}{n}+\eta$ до $\frac{(2g+1)\pi}{n}-\eta$ функція Y имѣетъ положительное значеніе; къ ней примыкаетъ такимъ образомъ положительная область, которая расширяется съ увеличеніемъ r, такъ какъ ея границы приближаются къ радіусамъ, ограничивающимъ секторъ $\left(\frac{2g\pi}{n}, \frac{(2g+1)\pi}{n}\right)$.

существованіе которой такимъ образомъ доказано. Для лучшаго уясненія см. фиг. 14; въ предположеніи, что

$$f(z) \qquad 4z - 2$$

она приблизительно соотвѣтствуетъ дѣйствительному положенію дѣла

На контурѣ (1, 10, 0) лежитъ корневая точка α,
" (3, 12, 2) " " " [illegible]
(5, 11, 4) " " " γ.
(9, 10 11, 6) " " " β,
(8, 13, 7) " "

ГЛАВА XIII.

Неопредѣленныя уравненія первой степени.

§ 67. Сравненія.

1 Какъ мы видѣли выше (§ 14), по двумъ произвольно взятымъ натуральнымъ числамъ m и n всегда можно опредѣлить два такихъ числа q и r, что

$$m = qn + r;$$

при этомъ q можетъ быть нулемъ или положительнымъ числомъ, а r удовлетворяетъ условію

$$0 \leqslant r < n.$$

Число r называется **остаткомъ** или **вычетомъ** числа m по n. Остатокъ при данномъ n можетъ имѣть только одно изъ n значеній:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n-1. \tag{1}$$

Два числа m и m', которыя имѣютъ одинъ и тотъ же остатокъ, называются **равноостаточными** или **сравнимыми** по модулю n. Въ этомъ случаѣ

$$m' = q'n + r$$

и слѣдовательно,

$$m - m' = (q - q')n,$$

т. е. $m - m'$ дѣлится на n.

Обратное предложеніе тоже имѣетъ мѣсто; именно: если разность двухъ чиселъ дѣлится на n, то эти числа равноостаточны

Въ самомъ дѣлѣ, полагая:

$$m = qn + r, \quad m' = q'n + r'.$$

получимъ:

$$m - m' = (q - q')\, n + r - r'.$$

Если $m - m'$ дѣлится на n, то и разность $r - r'$ должна въ данномъ случаѣ дѣлиться на n. Но оба числа r и r' принадлежатъ ряду чиселъ (1); слѣдовательно, ихъ разность по абсолютной величинѣ не можетъ быть больше $n - 1$ и потому, будучи отличной отъ нуля, не можетъ дѣлиться на n. Слѣдовательно, $r = r'$

2. Сравнимость двухъ чиселъ, слѣдуя Гауссу, обозначаютъ такъ:

$$m \equiv m' \pmod{n} \qquad (2)$$

(словами: m сравнимо съ m' по модулю n или короче— по n). Самое же соотношеніе (2) называется сравненіемъ.

Каждое число сравнимо со своимъ остаткомъ, если за модуль взять дѣлителя:

$$m \equiv r \pmod{n}$$

Если при вычисленіи модуль не мѣняется, то его часто можно опустить, не опасаясь недоразумѣній; такъ и нужно понимать дальнѣйшія сравненія.

3. При вычисленіяхъ со сравнимыми числами важны слѣдующія теоремы.

Если

$$a \equiv \alpha \quad \text{и} \quad b \equiv \beta,$$

то и

$$\begin{aligned} a + b &\equiv \alpha + \beta, \\ a - b &\equiv \alpha - \beta, \\ ab &\equiv \alpha\beta \end{aligned} \qquad (3)$$

Въ справедливости этихъ теоремъ легко убѣдиться изъ равенствъ:

$$\begin{aligned} (a + b) - (\alpha + \beta) &= (a - \alpha) + (b - \beta), \\ (a - b) - (\alpha - \beta) &= (a - \alpha) - (b - \beta), \\ ab - \alpha\beta &= (a - \alpha + \alpha)\,(b - \beta + \beta) - \alpha\beta, \\ &= (a - \alpha)\,(b - \beta) + \beta\,(a - \alpha) + \alpha\,(b - \beta). \end{aligned}$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что если $a - \alpha$ и $b - \beta$ дѣлятся на n, то и разности $(a \pm b) - (\alpha \pm \beta)$, $ab - \alpha\beta$ тоже дѣлятся на n, какъ того требуютъ теоремы (3).

4. Если

$$a \equiv \alpha, \; ab \equiv \alpha\beta$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ a и α суть числа, простыя относительно n, то и

$$b \equiv \beta.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$ab - \alpha\beta = a(b - \beta) + \beta(a - \alpha),$$

а такъ какъ разности $ab - \alpha\beta$ и $a - \alpha$ дѣлятся на n, то $a(b - \beta)$ дѣлится на n; но a есть число, простое относительно n; слѣдовательно, $b - \beta$ дѣлится на n (§ 15, 6).

5. Примѣняя нѣсколько разъ теорему о сравнимости произведеній (3), получимъ: если

$$a \equiv \alpha, \quad \text{то и} \quad a^k \equiv \beta^k,$$

гдѣ k есть любое положительное число.

6. Такъ какъ при модулѣ n число различныхъ остатковъ есть n, то, взявши больше чѣмъ n различныхъ чиселъ, мы найдемъ среди нихъ по крайней мѣрѣ два сравнимыхъ между собой. Вмѣстѣ съ тѣмъ можно многообразно составить n чиселъ

$$a_1, a_2, a_3, \; . \; . \; . \; , \; a_n, \qquad (4)$$

среди которыхъ нѣтъ двухъ сравнимыхъ; для этого стоитъ только къ каждому изъ чиселъ (1) прибавить число n, взятое любое число разъ.

Числа (4) такой системы даютъ при дѣленіи на n всѣ возможные остатки (1), при чемъ каждый остатокъ появляется одинъ разъ. Поэтому такая система называется полной системой остатковъ или вычетовъ для модуля n.

Если вмѣсто неопредѣленнаго знака x подставлять одно за другимъ всѣ числа системы (4), то говорятъ, что x пробѣгаетъ полную систему вычетовъ.

7. Если m и n суть числа, первыя между собою, то r должно быть простымъ относительно n, ибо общій дѣлитель чиселъ n и r былъ бы также дѣлителемъ числа $m = qn + r$. Въ этомъ случаѣ изъ ряда возможныхъ остатковъ (1) нѣкоторые отпадаютъ, во всякомъ случаѣ не будетъ остатка 0.

Обозначимъ черезъ ν число содержащихся въ ряду (1) чиселъ, взаимно простыхъ съ n, и положимъ, чтобы лучше отмѣтить зависимость числа ν отъ n,

$$\nu = \varphi(n).$$

Пусть числа простыя относительно n, содержащіяся въ ряду (1), суть:

$$r_1, r_2, r_3, \; . \; . \; . \; , r_\nu; \qquad (5)$$

между которыми, конечно, всегда есть 1.

Знакъ $\varphi(n)$ такимъ образомъ обозначаетъ число положительныхъ чиселъ, меньшихъ n и вмѣстѣ съ тѣмъ простыхъ относительно n.

Дадимъ нѣсколько примѣровъ для ряда (5):

$n = 7.$	1, 2, 3, 4, 5, 6.	$\varphi(7) = 6.$
$n = 13.$	1, 2, 3, 4, 5, 6,	
	7, 8, 9, 10, 11, 12.	$\varphi(13) = 12.$
$n = 21.$	1, 2, 4, 5, 8, 10,	
	11, 13, 16, 17, 19, 20,	$\varphi(21) = 12.$

8. Если n простое число, то всѣ числа $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ суть числа простыя съ n, и слѣдовательно, въ этомъ случаѣ

$$\varphi(n) = n - 1.$$

Если же n есть степень простого числа p, то, чтобы получить соотвѣтствующій рядъ (5), нужно изъ ряда $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ вычеркнуть всѣ числа, дѣлящіяся на p, т. е.

$$0,\ p,\ 2p, \ldots, \left(\frac{n}{p} - 1\right)p,$$

которыхъ всего n/p. Итакъ, для этого случая

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

9. Положимъ, что число n разлагается на два взаимно простыхъ множителя a и b.

Положимъ:

$$z = ay + bx, \tag{6}$$

гдѣ x обозначаетъ любое изъ чиселъ $0, 1, 2, \ldots, a-1$,
„ y „ „ „ „ $0, 1, 2, \ldots, b-1$.

Въ такомъ случаѣ z получаетъ $ab = n$ значеній, между которыми нѣтъ двухъ равноостаточныхъ по n. Въ самомъ дѣлѣ, если бы разность

$$z - z' = a(y - y') + b(x - x')$$

дѣлилась на n, то $b(x - x')$ должно было бы дѣлиться на a; но такъ какъ b и a суть числа взаимно простыя, то $(x - x')$ должно было бы дѣлиться на a: но и x и x' оба меньше a, слѣдовательно, должно было бы быть $x = x'$; такимъ же образомъ покажемъ, что и $y = y'$. Мы получа-

емь такимъ образомъ въ результатѣ, что остатками отъ дѣленія числа z на n служатъ всѣ числа:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \qquad (7)$$

при чемъ каждое появляется одинъ разъ.

Далѣе z есть число простое относительно n въ томъ и только въ томъ случаѣ, если x есть число простое относительно a, а y простое относительно b. Дѣйствительно, простой множитель, входящій въ z и a долженъ входить и въ x, а входящій въ z и b, долженъ входить и въ y. [1]) Если мы поэтому захотимъ изъ ряда (7) вычеркнуть числа, имѣющія съ n общихъ множителей, то изъ ряда значеній x нужно вычеркнуть тѣ, которыя имѣютъ общихъ множителей съ a, а изъ ряда значеній y тѣ, которыя имѣютъ общихъ множителей съ b. Остаются $\varphi(a)$ значеній x и $\varphi(b)$ значеній y, которымъ соотвѣтствуютъ $\varphi(n)$ значеній z; такъ какъ каждое изъ этихъ значеній x можно соединить съ каждымъ значеніемъ y, то

$$\varphi(n) = \varphi(a)\,\varphi(b).$$

Положимъ, напримѣръ, что n содержитъ только двухъ простыхъ множителей p, q. Въ какой бы степени ни входили p и q въ n

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$ [2]).

Съ помощью математической индукціи эту формулу можно обобщить такъ:

Если $p, q, r, \ldots$ суть различные простые множители числа n, то

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)$$

Напримѣръ:

$$\varphi(60) = 60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 16,$$

$$\varphi(63) = 63\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 36.$$

[1]) Это вытекаетъ изъ равенства (6). Если z и a дѣлятся на простое число p, то и bx должно дѣлиться на p; но b не дѣлится на p, такъ какъ a и b суть числа первыя между собой; поэтому x дѣлится на p.

[2]) Если $n = p^\pi q^\varkappa$, то

$$\varphi(p^\pi) = p^\pi\left(1-\frac{1}{p}\right),\quad \varphi(q^\varkappa) = q^\varkappa\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

а потому

$$\varphi(n) = p^\pi q^\varkappa\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right).$$

§ 68. Степенные вычеты.

1. Пусть n и g суть двѣ числа, не имѣющія общихъ дѣлителей (g есть сокращеніе слова „Grundzahl", „основное число"; въ примѣненіи къ десятичной системѣ счисленія $g=10$). Образуемъ рядъ степеней g:

$$g^0,\ g^1,\ g^2,\ g^3,\ \ldots \tag{1}$$

($g^0=1$) и будемъ искать вычеты его членовъ по модулю n,

$$\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \ldots \tag{2}$$

Такъ какъ g и всѣ его степени суть числа простыя относительно n, то и всѣ $\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \ldots$ тоже представляютъ собой числа простыя относительно n; а такъ какъ они всѣ меньше n, то между ними различныхъ ни въ коемъ случаѣ не болѣе $\nu=\varphi(n)$.

Если же $\rho_k=\rho_{k+l}$, гдѣ l положительное число, то разность

$$g^{k+l}-g^k=g^k(g^l-1)$$

дѣлится на n, т. е. g^l-1 дѣлится на n. Слѣдовательно, существуетъ такой положительный показатель f, для котораго

$$g^f\equiv 1 \quad (\text{mod. } n); \tag{3}$$

впредь мы подъ f будемъ разумѣть наименьшій изъ такихъ показателей.

2. Изъ соотношенія (3) слѣдуетъ, что

$$g^{qf}\equiv 1, \tag{4}$$

если q есть положительное число (§ 67, 5); но и обратно:

Если для какого нибудь показателя k

$$g^k\equiv 1,$$

то k кратно f. Въ самомъ дѣлѣ, если k не кратно f, то

$$k=qf+f',$$

гдѣ $0<f'<f$. Слѣдовательно, въ такомъ случаѣ

$$g^{qf}g^{f'}\equiv 1,$$

а потому (§ 67, 4) $g^{f'}\equiv 1$. Это противорѣчитъ предположенію, что f есть наименьшее положительное число, для котораго выполняется сравненіе (3).

3. Среди f степеней:

$$g^0,\ g^1,\ g^2,\ldots,g^{f-1} \tag{5}$$

не можетъ быть двухъ равноостаточныхъ по n, ибо тогда существовало бы число f', меньшее f, для котораго $g^{f'} \equiv 1$ [3]). Мы получаемъ, слѣдовательно, здѣсь f различныхъ вычетовъ:

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{f-1} \tag{6}$$

(гдѣ $\rho_0 = 1$). Переходя къ высшимъ степенямъ $g^f, g^{f+1}, g^{f+2}, \ldots$, получимъ тѣ же вычеты въ той же послѣдовательности; возводя такимъ образомъ g въ степени, мы не выйдемъ изъ системы вычетовъ (6). Числа $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{f-1}$ называются степенными вычетами числа g; всѣ они суть числа простыя относительно n.

Если f меньше $\varphi(n)$, то въ ряду вычетовъ по модулю n существуетъ по крайней мѣрѣ еще одинъ вычетъ r_1 [4]), который не содержится среди степенныхъ вычетовъ; тогда вычеты чиселъ

$$r_1 g^0,\ r_1 g^1,\ r_1 g^2,\ \ldots\ r_1 g^{f-1} \tag{7}$$

всѣ различны между собой и отличны отъ вычетовъ степеней (5). Ибо, если бы

$$r_1 g^h \equiv g^k,$$

то мы имѣли бы

$$r_1 \equiv g^{k-h} \text{ (или при } k<h, \equiv g^{f-h+k}),$$

а это противорѣчитъ предположенію, что r_1 не содержится въ числѣ вычетовъ (5).

Поэтому и рядъ (7) имѣютъ только различные вычеты, такъ что $2f \leqslant \varphi(n)$. Если $2f < \varphi(n)$, то существуетъ еще вычетъ r_2, который не фигурируетъ ни въ ряду вычетовъ чиселъ (5), ни среди вычетовъ чиселъ (7). Числа:

$$r_2 g^0,\ r_2 g^1, \ldots, r_2 g^{f-1}$$

даютъ опять только различные вычеты, которые отличны отъ вычетовъ чиселъ (5) и (7). Въ самомъ дѣлѣ, если бы

$$r_1 g^h \equiv r_2 g^k,$$

то должно было бы быть

$$r_2 \equiv r_1 g^{h-k} \text{ (или } \equiv r_1 g^{f-k+h}),$$

[3]) Дѣйствительно, если бы

$$g^{f_1} - g^{f_2}$$

при чемъ $f_2 < f_1$, то, сокращая это сравненіе на g^{f_2} (§ 67, 4), получимъ:

$$g^{f_1 - f_2} \equiv 1,$$

гдѣ $f_1 - f_2$, конечно, меньше f.

[4]) Подъ буквою r съ различными индексами авторъ здѣсь разумѣетъ, какъ въ предыдущемъ параграфѣ (п. 7), только вычеты простые относительно модуля n.

т. е число r_2 находилось бы въ ряду вычетовъ чиселъ (7); а это противно условію. Слѣдовательно, $3f \leqslant \varphi(n)$.

Ясно, какъ продолжать это разсужденіе: такъ какъ произведенія $f, 2f, 3f, \ldots$ не могутъ безъ конца оставаться меньше $\varphi(n)$, то слѣдуетъ заключить, что $\varphi(n)$ кратно f, а f есть дѣлитель числа $\varphi(n)$ *). Положимъ:

$$\varphi(n) = ef;$$

тогда, въ силу соотношенія (4), получимъ такъ называемую обобщенную теорему Фермата

$$g^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$$

или въ словахъ:

4. $\varphi(n)$-тая степень каждаго числа простого относительно n сравнима съ 1 по модулю n.

Если n есть первоначальное число, то $\varphi(n) = n - 1$; для этого случая теорема гласитъ:

5. Для каждаго первоначальнаго числа n $(n-1)$-ая степень любого числа, не дѣлящагося на n, сравнима съ 1 по модулю n.

Теорема, доказанная въ § 55, 3, согласно которой, если n есть первоначальное, а a любое цѣлое число, то $a^n - a = a(a^{n-1} - 1)$ дѣлится на n, какъ мы видимъ, содержится въ предложеніи 5, такъ какъ либо a, либо $a^{n-1} - 1$ дѣлится на n [5]).

Будетъ ли n число простое или составное, какъ мы видѣли въ пунктѣ 3, вычеты простые относительно n раздѣляются на e рядовъ, каждый изъ которыхъ содержитъ f вычетовъ; эти ряды назовемъ періодами вычетовъ. Мы получимъ одинъ изъ этихъ періодовъ, если въ произведеніи rg^k подставимъ вмѣсто показателя k числа: $0, 1, 2, 3, \ldots, f-1$ Нахожденіе этихъ вычетовъ, кажущееся на первый взглядъ кропотливымъ, существенно упрощается тѣмъ, что остатокъ отъ rg^k получается, если умножить на g не самое число rg^{k-1}, а его вычетъ по n

6. Возьмемъ, напримѣръ, $n = 17$, $g = 2$, получимъ:

$$2^0 \equiv 1, \quad 2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 8,$$
$$2^4 \equiv 16, \quad 2^5 \equiv 15, \quad 2^6 \equiv 13, \quad 2^7 \equiv 9, \quad 2^8 \equiv 1;$$

---

[5]) Если a кратно n, то $a^n - a$, конечно, дѣлится на n; если a не кратно n, то въ силу предложенія 5, $a^{n-1} - 1$ дѣлится на n. Такимъ образомъ теорема § 55, 3 вытекаетъ изъ предложенія 5

*) Заслуживаетъ вниманія сходство этой теоремы съ теоремой § 52, 4 о перестановкахъ.

здѣсь $f = 8$, $\varphi(17) = 16$ и мы получимъ два періода вычетовъ по 17.

Возьмемъ $n = 17$, $g = 10$, получимъ одинъ только періодъ, такъ какъ $f = 16$. Въ слѣдующей табличкѣ въ первомъ ряду стоятъ показатели степеней числа 10, а подъ ними соотвѣтствующіе вычеты по модулю 17:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12

Для $n = 21$, $g = 10$ получимъ:

$$10^0 \equiv 1,\quad 10^1 \equiv 10,\quad 10^2 \equiv 16,\quad 10^3 \equiv 13,\quad 10^4 \equiv 4,\quad 10^5 \equiv 19,\quad 10^6 \equiv 1;$$

здѣсь $f = 6$, $\varphi(n) = 12$, т. е. здѣсь имѣется два періода.

Возьмемъ теперь $n = 13$, $g = 2$; получимъ такую же табличку, какъ выше, при $n = 17$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7

такъ что $f = 12$.

7. Если при нѣкоторой парѣ значеній g и n соотвѣтствуетъ только одинъ періодъ, т. е. $f = \varphi(n)$, то g называется **первообразнымъ корнемъ по модулю** n. Такимъ образомъ 10 есть первообразный корень 17, но, напротивъ, 10 не есть первообразный корень чисель 13 и 21; въ свою очередь 2 есть первообразный корень числа 13, но не 17. Существуетъ теорема, которую мы здѣсь не будемъ доказывать, гласящая, что всѣ нечетныя первоначальныя числа, всѣ степени первоначальныхъ чиселъ и также степени первоначальныхъ чиселъ, умноженныя на 2, имѣютъ первообразные корни. Напротивъ, другія составныя числа не имѣютъ первообразныхъ корней, напр. 21. Дѣйствительно, если g есть число, простое относительно 21, то по теоремѣ Фермата $g^6 - 1$ дѣлится на 3 и на 7, а слѣдовательно, и на 21 ($\varphi(21) = 12$)[6].

Если g есть первообразный корень числа n и $g^{\alpha} \equiv a \pmod{n}$, то α называется **индексомъ** числа a. Въ вышеприведенныхъ табличкахъ въ первомъ ряду стоятъ индексы чиселъ, расположенныхъ подъ ними.

Такая табличка называется также **таблицей индексовъ**.

§ 69. Періодическія десятичныя дроби.

1. Степенные вычеты находятъ себѣ приложеніе въ теоріи десятич-

[6]) По теоремѣ Фермата, если g не дѣлится на 3, то $g^2 \equiv 1$ (mod. 3), а потому и $g^6 \equiv 1$ (mod. 3). По той же теоремѣ, если g не дѣлится на 7, то $g^6 \equiv 1$ (mod. 7); такимъ образомъ, если g есть число простое относительно 21, то $g^6 - 1$ дѣлится на 21; поэтому оно не можетъ служить первообразнымъ корнемъ по модулю 21.

ныхъ дробей, посредствомъ которыхъ можетъ быть выражена простая дробь.

Пусть m и n будутъ два взаимно простыхъ числа, изъ которыхъ послѣднее (n) не дѣлится ни на 2, ни на 5, т. е. есть число простое относительно 10. Разсмотримъ простую дробь

$$\gamma = \frac{m}{n}.$$

Такая дробь, какъ мы видѣли въ § 26, можетъ быть обращена въ безконечную десятичную дробь, мантисса которой обозначается:

$$Z(m) = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \ldots$$

Двѣ дроби $\gamma = m/n$ и $\gamma' = m'/n$ съ одинаковыми знаменателями имѣютъ общую мантиссу только въ томъ случаѣ, если ихъ разность есть цѣлое число, т. е. если m и m' отличаются на число, кратное n. Выражая это при помощи знаковъ, если

$$m \equiv m' \pmod{n},$$

то

$$Z(m) = Z(m')$$

и обратно. Дѣйствительно, если $\gamma - \gamma'$ есть цѣлое число, то мантисса десятичной дроби, представляющей это число, состоитъ только изъ нулей; и обратно, если $Z(m) = Z(m')$, то мантисса $Z(m - m')$ состоитъ только изъ нулей, т. е. числа m и m' отличаются другъ отъ друга только на цѣлое число.

Такъ какъ существуетъ $\varphi(n)$ различныхъ вычетовъ, простыхъ относительно n, то существуетъ и $\varphi(n)$ различныхъ мантиссъ $Z(m)$ для одного и того же знаменателя n. Здѣсь φ имѣетъ то же значенiе, что и въ § 67, 7 [7]).

2. Изъ мантиссы дроби γ получается мантисса числа 10γ, если отбросить первую цифру $Z(m)$ и начинать съ ζ_2; повторяя эту операцiю нѣсколько разъ, получимъ для любого показателя k:

$$Z(10^k m) = \zeta_{k+1} \zeta_{k+2} \zeta_{k+3} \ldots$$

Если же

$$10^l \equiv 1 \pmod{n},$$

---

[7]) Какъ было показано, цѣлое число не влiяетъ на мантиссу; чтобы опредѣлить, какiя возможны мантиссы, можно ограничиться правильными дробями, т. е. нужно собственно опредѣлить, сколько имѣется различныхъ правильныхъ дробей со знаменателемъ n; такъ какъ числителемъ должно быть число, меньшее нежели n и простое относительно n, то такихъ дробей имѣется $\varphi(n)$.

то согласно п. 1,

$$Z(10^f m) = Z(m),$$ [8])

т. е.

$$z_{f+1} = z_1,\ z_{f+2} = z_2,\ z_{f+3} = z_3,\quad .$$

Цифры мантиссы повторяются съ $f+1$-го мѣста въ той же послѣдовательности, какъ съ перваго.

Эти цифры распадаются на группы по f цифръ въ каждой; обозначимъ эти группы такъ:

$$P(m) = z_1 z_2 z_3 \dots z_f.$$

Эта группа повторяется въ $Z(m)$ въ одной и той же послѣдовательности и называется періодомъ мантиссы. Мантиссу $Z(m)$ и десятичную дробь, въ которую обращается γ, называютъ періодическими, а число f мы будемъ называть размѣромъ періода для знаменателя n. Мы доказали такимъ образомъ слѣдующую теорему.

Простая дробь, знаменатель которой не имѣетъ общихъ дѣлителей съ 10, обращается въ періодическую десятичную дробь.

3. Чтобы распространить нашу теорему и на остальные случаи, замѣтимъ, что каждая дробь β посредствомъ умноженія на степени 10, т. е. на 10^k, можетъ быть приведена къ знаменателю, не содержащему множителей 2 и 5; получаемая такимъ образомъ дробь $10^k\beta$ обращается въ періодическую десятичную. Чтобы отъ $10^k\beta$ перейти къ β, нужно въ десятичной дроби переставить запятую на k знаковъ влѣво. При этомъ передъ цифрой z_1, т. е. передъ началомъ новаго періода, станутъ цифры, не подчиняющіяся періодичности. Періодъ начинается въ послѣднемъ случаѣ съ k-того знака мантиссы. Такія десятичныя дроби называются смѣшанными періодическими дробями; тѣ же дроби, у которыхъ періодъ начинается непосредственно за запятой, называются чистыми періодическими дробями.

4. Если f есть наименьшій изъ положительныхъ показателей, удовлетворяющихъ соотношенію $10^f \equiv 1 \pmod{n}$, то періодъ мантиссы $Z(m)$ не можетъ содержать меньше f членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что $Z(10^k m) = Z(m)$, согласно предложенію 1, получимъ, что $10^k m \equiv m$, а такъ какъ m есть число простое относительно n, то $10^k \equiv 1$ (§ 67, 4); отсюда заключаемъ, что k есть число, кратное f (§ 68, 2).

5. Перенося запятую въ десятичной дроби вправо на одинъ знакъ,

[8]) Потому что дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{10^f m}{n}$ отличаются другъ отъ друга на цѣлое число.

мы увеличиваемъ дробь въ 10 разъ; принимая это во вниманіе, мы можемъ написать слѣдующую таблицу періодовъ:

$$
\begin{aligned}
P(m) &= \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \ldots \zeta_f, \\
P(10m) &= \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \ldots \zeta_f \zeta_1, \\
P(10^2 m) &= \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 \zeta_6 \ldots \zeta_1 \zeta_2 \qquad (1) \\
&\ldots \\
P(10^{f-1} m) &= \zeta_f \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \ldots \zeta_{f-1}.
\end{aligned}
$$

Если $\varphi(n) = ef$, то для того, чтобы получить мантиссы всѣхъ дробей съ знаменателями n, достаточно образовать періоды для e различныхъ значеній m [9]). Если $e = 1$, т. е. $f = \varphi(n)$, и слѣдовательно, 10 есть первообразный корень модуля n, то достаточно взять одно значеніе $m = 1$, чтобы обратить въ десятичныя всѣ правильныя дроби m/n. Для такихъ значеній n нужно вычислить только одинъ період, который будетъ содержать $\varphi(n)$ членовъ. Если $e > 1$, то нужно вычислить большее число періодовъ; при этомъ, чѣмъ больше будетъ число e, тѣмъ меньше членовъ будутъ имѣть періоды.

6. Для перваго примѣра возьмемъ $n = 7$. По обычному пріему произведемъ дѣленіе 1 на 7

10 : 7 — 142857
7
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
1.

Въ данномъ случаѣ період есть 142857; подчеркнутыя числа суть остатки степеней 10. Поэтому получаемъ [10]):

[9]) Ибо для каждой такой мантиссы таблица (1) даетъ f мантиссъ; такимъ образомъ получимъ всѣ возможныя ef мантиссъ.

[10]) Первая мантисса принадлежитъ дроби $\frac{1}{7}$: поэтому, какъ мы видѣли выше, вторая мантисса принадлежитъ дроби $\frac{10}{7}$, или, отбрасывая цѣлую часть, дроби $\frac{3}{7}$;

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ \ldots,$$
$$\frac{3}{7} = 0{,}428571\ \ldots,$$
$$\frac{2}{7} = 0{,}285714\ \ldots,$$
$$\frac{6}{7} = 0{,}857142\ \ldots,$$
$$\frac{4}{7} = 0{,}571428\ \ldots,$$
$$\frac{5}{7} = 0{,}714285\ \ldots$$

На мѣстѣ точекъ повторяются дальнѣйщіе періоды. Такимъ образомъ, мы сразу превратили въ десятичныя дроби всѣ правильныя дроби съ знаменателемъ 7. Эти дроби могутъ быть выражены съ любой степенью точности.

7. Для $n = 13$ получимъ:

```
10 : 13 = 076923
00
100
 91
   90
   78
   120
   117
     30
     26
      40
      39
       1
```

Періодъ содержитъ тутъ только шесть членовъ. Далѣе получимъ:

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923\ \ldots,$$
$$\frac{10}{13} = 0{,}769230\ \ldots,$$
$$\frac{9}{13} = 0{,}692307\ \ldots,$$
$$\frac{12}{13} = 0{,}923076\ \ldots,$$
$$\frac{3}{13} = 0{,}230769$$
$$\frac{4}{13} = 0{,}307692$$

третья дробь принадлежитъ дроби $\frac{100}{7}$ или дроби $\frac{2}{7}$ и т. д. Послѣдовательные числители 3, 2, 6 и т. д. суть не что иное, какъ остатки, послѣдовательно получаемые при дѣленіи 10, 100, 1000 и т. д.

Чтобы получить всѣ дроби со знаменателемъ 13, нужно воспользоваться еще однимъ періодомъ, который найдемъ, взявши любой изъ недостающихъ числителей. Возьмемъ, напримѣръ, 2/13:

```
20 : 13 = 153846
13
 70
 65
  50
  39
  110
  104
    60
    52
     80
     78
      2.
```

Получимъ:

$$\frac{2}{13} = 0,153846$$
$$\frac{7}{13} = 0,538461$$
$$\frac{5}{13} = 0,384615$$
$$\frac{11}{13} = 0,846153$$
$$\frac{6}{13} = 0,461538$$
$$\frac{8}{13} = 0,615384$$

Мы исчерпали всѣ дроби съ знаменателемъ 13. Изложенное представляетъ неограниченный матеріалъ для упражненій, интересныхъ по результатамъ, легко поддающимся провѣркѣ.

8. Гауссъ подробно изслѣдовалъ этотъ вопросъ въ „Disquisitiones arithmeticae" art. 313—318. Тамъ у Гаусса есть таблица, которая содержитъ всѣ періоды первоначальныхъ чиселъ и ихъ степеней до 100. Такая же таблица, продолженная для первоначальныхъ чиселъ и ихъ степеней до 1000, была найдена среди рукописей, оставленныхъ Гауссомъ, и въ настоящее время опубликована. Въ томъ же сочиненіи Гауссъ показываетъ, какъ съ помощью этой таблицы производить обращеніе дробей, знаменатели которыхъ содержатъ нѣсколько различныхъ первоначальныхъ множителей, даже при очень большихъ знаменателяхъ. Мы приведемъ только одинъ примѣръ:

$$\frac{22}{21} = \frac{1}{3} + \frac{5}{7}.$$

Но такъ какъ

$$\frac{1}{3} = 0,3333333$$
$$\frac{5}{7} = 0,7142857$$
$$\frac{22}{7} = 1,0476190$$

Чтобы получить правильно последнюю цифру періода, нужно въ обоихъ слагаемыхъ взять после періода еще одинъ или несколько (смотря по обстоятельствамъ) знаковъ.

Упомянемъ еще о трудѣ Г. Борка (H. Bork) о „періодическихъ десятичныхъ дробяхъ". *) содержащемъ, кромѣ основныхъ теоремъ о періодическихъ десятичныхъ дробяхъ, таблицу [по вычисленіямъ Ф. Кесслера (F. Kessler)], въ которой приведены не самые періоды, а ихъ размѣры для первоначальныхъ чиселъ до 100.000.

9. Если число n разлагается на два взаимно простыхъ множителя n' и n'', а f' и f'' суть наименьшіе положительные показатели, для которыхъ $10^{f'}-1$ и $10^{f''}-1$ дѣлятся соотвѣтственно на n' и n'', то 10^f-1 только въ томъ случаѣ дѣлится на n, если f кратно f' и f''. Наименьшее значеніе f есть общее наименьшее кратное f' и f''. Отсюда получаемъ теорему.

Размѣръ періода для составного знаменателя n равенъ общему наименьшему кратному размѣровъ періодовъ всѣхъ дробей, знаменатели которыхъ суть дѣлители числа n.

Если 10 есть первообразный корень по модулю n, то размѣръ періода, какъ мы видѣли, равень $\varphi(n)$, и намъ достаточно знать одинъ періодъ. По таблицѣ Гаусса находимъ, что это въ предѣлахъ первой сотни имѣетъ мѣсто для чиселъ:

$$n = 7,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 47,\ 49,\ 59,\ 61,\ 97.$$

Наибольшее число различныхъ періодовъ приходится на долю числа 73: именно: $\varphi(n)/f = 9$, $f = 8$.

10 Если f есть размѣръ періода для знаменателя n, то 10^f-1 должно дѣлиться на n; слѣдовательно, всякій знаменатель n, имѣющій данный размѣръ періода f, заключается между дѣлителями числа 10^f-1. Обратно, если числитель есть дѣлитель числа 10^f-1, то длина его періода есть f или дѣлитель числа f.

Такимъ образомъ существуетъ опредѣленное число знаменателей такихъ дробей, которыя имѣютъ данный размѣръ періода f.

Напримѣръ, одночленные періоды имѣютъ только знаменатели 3 и 9:

$$\frac{1}{3} = 0,333 \qquad \frac{1}{9} = 0,111$$

*) H. Bork. „Periodische Dezimalbrüche", Programm des Prinz Heinrichs-Gymnasiums in Berlin, 1895.

Размѣръ періода, равный 2, имѣютъ только три дроби, знаменатели которыхъ суть дѣлители 99, именно $n = 11$, 33, 99; трехчленные періоды имѣютъ дроби, знаменатели которыхъ дѣлятъ $999 = 27 . 37$ и т. д. При болѣе длинныхъ періодахъ разложеніе числа $10^f - 1$ на первоначальныхъ множителей представляетъ трудности, преодолѣть которыя можно съ помощью упомянутыхъ таблицъ или съ помощью особыхъ пріемовъ. Напримѣръ, какъ легко убѣдиться при помощи перемноженія:

$$10^4 - 1 = 9 . 11 . 101,$$
$$10^5 - 1 = 9 . 11 . 271,$$
$$10^6 - 1 = 27 . 7 . 11 . 13 . 37,$$
$$10^7 - 1 = 9 . 239 . 4649,$$
$$10^8 - 2 = 9 . 11 . 73 . 101 . 137.$$

Всѣ приведенные здѣсь множители имѣютъ сравнительно короткіе періоды.

11. Заключимъ разсмотрѣніе теоріи десятичныхъ дробей слѣдующей теоремой:

Пусть

$$m = z_1 z_2 z_3 \dots z_f$$

есть какое нибудь цѣлое положительное число, изображающееся цифрами $z_1, z_2, z_3, \dots, z_f$, и пусть

$$n = 10^f - 1$$

есть число, изображающееся f девятками; тогда по десятичной системѣ

$$10m = z_1 z_2 z_3 \dots z_f 0,$$

и

$$z_1 n = z_1 000 \dots 0 - z_1,$$

гдѣ справа за z_1 стоятъ f нулей.

Отсюда

$$10m = z_1 n + m_1, \qquad (2)$$

гдѣ m_1 есть f значное число, именно:

$$m_1 = z_2 z_3 \dots z_f z_1.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$10 m_1 = z_2 n + m_2 \qquad (3)$$
$$m_2 = z_3 z_4 \dots z_f z_2 z_1.$$

Мы можемъ продолжать такъ, сколько угодно. Въ результатѣ мы получимъ обращеніе простой дроби m/n въ десятичную, которая, какъ мы

видѣли, имѣетъ періодомъ $z_1 z_2 z_3 \ldots z_f$ [11]). Этотъ періодъ можетъ распадаться на болѣе короткіе, размѣръ которыхъ есть дѣлитель числа f [12]). Простая дробь m/n можетъ сокращаться и наконецъ сводится къ 1, если $m=n$, т. е. если и m состоитъ изъ девятокъ. Нами доказана такимъ образомъ теорема.

Каждая періодическая десятичная дробь можетъ быть разсматриваема, какъ результатъ обращенія нѣкоторой обыкновенной дроби. Десятичная дробь, имѣющая одночленный періодъ, равный 9, получается отъ обращенія не правильной дроби, равной 1.

§ 70. Уравненія Діофанта.

1. При рѣшеніи уравненій Діофанта или неопредѣленныхъ требуется найти неизвѣстныя цѣлыя числа, удовлетворяющія нѣкоторымъ условіямъ, которыя могутъ быть выражены уравненіями *). Простѣйшая задача этого рода состоитъ въ слѣдующемъ.

Пусть a, b, c будутъ данныя цѣлыя числа. Нужно найти два другихъ цѣлыхъ числа, удовлетворяющихъ равенству:

$$ay-bx=c. \tag{1}$$

Сначала сдѣлаемъ нѣкоторыя общія замѣчанія.

Равенство (1) не измѣнится, если одновременно замѣнить a на $-a$ и y на $-y$.

То же имѣетъ мѣсто, если одновременно совершить такія замѣны: b на $-b$, x на $-x$ или c на $-c$, x на $-x$, y на $-y$. Поэтому, не нарушая общности, мы можемъ считать числа a, b и c положительными. Если

---

[11]) Равенство (2) показываетъ, что при дѣленіи $10m$ на n мы получимъ въ частномъ z_1 и въ остаткѣ m_1; далѣе равенство (3) показываетъ, что при дѣленіи $10m_1$ на n мы получимъ въ частномъ z_2 и т. д. Эти именно дѣленія намъ и нужно производить для обращенія дроби $\frac{m}{n}$ въ десятичную; слѣдовательно періодъ $z_1 z_2 z_3 \ldots z_f$ получается при обращеніи простой дроби $\frac{m}{n}$ въ десятичную.

[12]) Напримѣръ, періодъ 2323 разбивается на два періода вида 23.

*) О личности Діофанта Александрійскаго ничего не извѣстно. Даже относительно времени его жизни установлено только, что онъ жилъ между 180 г. до Р. Х. и 370 п. Р. Х. Его трудъ объ ариѳметикѣ (ἀριθμητικά) не дошелъ до насъ полностью. Новѣйшее изданіе текста сдѣлалъ П. Таннери (P. Tannery. Leipzig B. G. Teubner, 1893, по латыни и по гречески); нѣмецкій переводъ сдѣланъ Вертгеймомъ (Wertheim, Leipzig, B. G. Teubner, 1890). Сравни о Діофантѣ у Кантора „Geschichte der Mathematik“, томъ I стр. 433 и дальше.

одно изъ этихъ чиселъ, напр. b, равно нулю, то задача сводится къ дѣленію c на a. Мы можемъ исключить этотъ случай [13]).

2. Если числа a и b имѣютъ общаго множителя d, то задача (1) можетъ имѣть рѣшеніе только въ томъ случаѣ, если и c дѣлится на d. Если это такъ, то всѣ члены уравненія (1) можно раздѣлить на d. Мы будемъ предполагать эту операцію выполненной; это послѣднее предположеніе, очевидно, равносильно требованію, чтобы a и b были числа взаимно простыя.

При этомъ условіи, мы легко докажемъ на основаніи предыдущаго, что задача (1) всегда имѣетъ рѣшеніе. Дѣйствительно, въ § 67, 9 мы видѣли, что выраженіе

$$z = ay - bx$$

получаетъ всѣ значенія полной системы вычетовъ модуля ab. Между этими значеніями должно быть число, которое по модулю ab даетъ тотъ же остатокъ, что и c; это число равно $c + kab$, гдѣ k цѣлое число. Итакъ, существуютъ три такихъ числа x_0, y_0, k, которыя удовлетворяютъ равенству

$$ay_0 - bx_0 = c + kab,$$

или

$$a(y_0 - kb) - bx_0 = c.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ удовлетворяется и уравненіе (1), если въ немъ подставить x_0 и $y_0 - kb$ вмѣсто x и y.

3. Положимъ, что мы нашли одно рѣшеніе уравненія (1) x_0, y_0, тогда

$$ay_0 - bx_0 = c. \qquad (2)$$

Изъ этого одного рѣшенія легко найти всѣ остальныя. Вычтемъ для этого изъ уравненія (1) равенство (2), получимъ:

$$a(y - y_0) = b(x - x_0). \qquad (3)$$

Произведеніе $b(x - x_0)$ должно дѣлиться на a; а такъ какъ a и b,

[13]) Если бы, напримѣръ, нужно было рѣшить уравненіе

$$5y + 2x = 10,$$

то мы рѣшили бы уравненіе

$$5y' - 2x' = 10.$$

даждому рѣшенію (y', x') второго уравненія соотвѣтствуетъ рѣшеніе $y = y'$, $x = -x'$. Каннаго уравненія.

по предположенію, взаимно простыя числа, то $x - x_0$ должно дѣлиться на a. Обозначимъ частное этого дѣленія черезъ λ, гдѣ λ цѣлое число: слѣдовательно. $x - x_0 = \lambda a$. Если подставимъ эго значеніе $x - x_0$ въ уравненіе (3) и раздѣлимь на a, то получимъ: $y - y_0 = \lambda b$.

Итакъ,

$$x = x_0 + \lambda a, \quad y = y_0 + \lambda b. \tag{4}$$

Обратно, каково бы ни было λ, при соотношеніи (4)

$$ay - bx = ay_0 - bx_0$$

и, если x_0 y_0 удовлетворяютъ уравненію (1) то y и x также удовлетворяютъ уравненію (1). Если такимъ образомъ уравненіе (1) вообще имѣетъ рѣшеніе, то оно имѣетъ ихъ безконечное множество, и всѣ они выводятся изъ одного по формуламъ (4).

4. Наконецъ, мы получимъ упрощеніе, сведя общую задачу (1) къ частному случаю.

Если числа x_0, y_0 удовлетворяютъ уравненію

$$ay_0 - bx_0 = 1, \tag{5}$$

то числа

$$x = cx_0 \text{ и } y = cy_0$$

дадутъ рѣшеніе уравненія (1), въ чемъ убѣждаемся, умножая обѣ части равенства (5) на c.

Задача (1) сводится такимъ образомъ къ болѣе простой:

5. a и b *суть два цѣлыхъ положительныхъ числа, не имѣющихъ общихъ множителей; нужно найти какую нибудь пару цѣлыхъ чиселъ, удовлетворяющихъ равенству:*

$$ay - bx = 1. \tag{6}$$

По формуламъ (4) изъ одного рѣшенія этого уравненія найдемъ остальныя. Мы можемъ поэтому всегда получить *положительныя рѣшенія* [14]).

6. Если $a = 1$, то можно дать x произвольное значеніе; для y получаемъ $y = bx + 1$. Если $b = 1$. то $x = ay - 1$; если a и b больше 1, то въ формулахъ (4) можно за λ принять частное отъ дѣленія x на a, а за x_0 — остатокъ отъ этого дѣленія, такъ что

$$0 < x_0 < a.$$

---

[14]) Такъ какъ a и b, по условію, положительныя числа, то можно всегда дать числу λ настолько большое значеніе, чтобы получить положительныя же значенія для чиселъ z и y.

Тогда

$$0 < ay_0 = 1 + bx_0 < ab + 1.$$

Такъ какъ y_0 не равно b, ибо въ противномъ случаѣ 1 должна была бы дѣлиться на b, то

$$0 < y_0 < b.$$

Итакъ, существуетъ одно и только одно рѣшеніе задачи (6), для котораго x и y положительны и соотвѣтственно меньше a и b; такое рѣшеніе назовемъ наименьшимъ положительнымъ рѣшеніемъ.

7. Вѣрнымъ и сравнительно легко выполнимымъ средствомъ для дѣйствительнаго нахожденія рѣшеній уравненія Діофанта является способъ, основанный на Евклидовомъ алгориѳмѣ общаго наибольшаго дѣлителя (§ 15).

Пусть въ уравненіи (6) a и b суть данныя цѣлыя положительныя числа безъ общихъ множителей; положимъ, что оба они больше 1 и $a > b$. Если бы послѣднее условіе не выполнялось, то достаточно переставить коэффиціенты a и b и замѣнить x и y черезъ $-x$ и $-y$. Въ видахъ удобства обозначеній положимъ:

$$b = a_1$$

и составимъ алгориѳмъ § 15-го, который долженъ закончиться числомъ 1, такъ какъ a и a_1 суть числа первыя между собой:

$$\begin{aligned} a &= q a_1 + a_2, \\ a_1 &= q_1 a_2 + a_3, \\ a_2 &= q_2 a_3 + a_4, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + 1, \\ a_{n-1} &= q_{n-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Если мы опять поставимъ b вмѣсто a_1, то изъ перваго равенства получимъ:

$$a_2 = a - bq;$$

подставивъ это значеніе a_2 во второе равенство, получимъ:

$$a_3 = aq_1 - b(qq_1 + 1);$$

продолжая тотъ же процессъ дальше, мы увидимъ, что каждое изъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ выражается линейно черезъ a и b.

8. Предположимъ, что для нѣкотораго a_ν найдена формула:

$$(-1)^\nu a_\nu = aQ_{\nu-1} - bP_{\nu-1}. \tag{8}$$

Сравнивая эту формулу съ тѣми, которыя получены нами для $\nu = 2$ и $\nu = 3$ найдемъ:

$$\begin{aligned} &Q_1 = 1, \quad P_1 = q, \\ &Q_2 = q_1, \quad P_2 = qq_1 + 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь въ формулу

$$a_\nu = q_\nu a_{\nu+1} + a_{\nu+2}$$

подставимъ вмѣсто a_ν выраженіе (8), а вмѣсто $a_{\nu+1}$ соотвѣтственно:

$$(-1)^{\nu+1} a_{\nu+1} = aQ_\nu - bP_\nu; \tag{10}$$

тогда получимъ:

$$(-1)^{\nu+2} a_{\nu+2} = a(Q_\nu q_\nu + Q_{\nu-1}) - b(P_\nu q_\nu + P_{\nu-1}).$$

Итакъ, если имѣютъ мѣсто формулы (8) и (10), то имѣетъ мѣсто и соотношеніе:

$$(-1)^{\nu+2} a_{\nu+2} = aQ_{\nu+1} - bP_{\nu+1},$$

при чемъ

$$\begin{aligned} &P_{\nu+1} = P_\nu q_\nu + P_{\nu-1}, \\ &Q_{\nu+1} = Q_\nu q_\nu + Q_{\nu-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

По рекуррентнымъ формуламъ (11) легко найти числа P_ν и Q_ν. Получимъ, напр.:

$$\begin{aligned} &P_3 = qq_1q_2 + q_2 + q, \\ &Q_3 = q_1q_2 + 1, \\ &P_4 = qq_1q_2q_3 + qq_3 + q_2q_3 + qq_1 + 1, \\ &Q_4 = q_1q_2q_3 + q_3 + q_1, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Очевидно, что для вычисленія чиселъ P и Q нужно только знать частныя $q, q_1, q_2, \ldots$ Кромѣ того, всѣ числа P и Q положительны и

$$P_{\nu+1} > P_\nu, \; Q_{\nu+1} > Q_\nu \tag{12}$$

(только, если $q_1 = 1$, то $Q_2 = Q_1$).

9. Примѣнимъ уравненія (8) къ случаю $\nu = n$ и примемъ въ сооб-

раженіе, что $a_n = 1$; тогда получимъ:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^n \qquad (13)$$

Отсюда рѣшенія задачи (6) представляются въ видѣ:

$$\begin{aligned} x &= (-1)^n P_{n-1} \\ y &= (-1)^n Q_{n-1}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Если помножимъ первое изъ уравненій (11) на Q_ν, второе на P_ν, затѣмъ вычтемъ одно изъ другого и наконецъ помножимъ обѣ части на $(-1)^{\nu+1}$, то получимъ:

$$(-1)^{\nu+1}(P_{\nu+1}Q_\nu - Q_{\nu+1}P_\nu) = (-1)^\nu (P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1}).$$

Слѣдовательно, выраженіе

$$(-1)^\nu (P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1})$$

не мѣняетъ своего значенія съ измѣненіемъ индекса ν; если положимъ $\nu = 2$, то изъ соотношенія (9) слѣдуетъ, что

$$P_\nu Q_{\nu-1} - Q_\nu P_{\nu-1} = (-1)^\nu. \qquad (15)$$

Эта формула показываетъ, что числа P_ν и Q_ν при любомъ ν не имѣютъ общихъ множителей, такъ какъ такой множитель былъ бы дѣлителемъ числа ± 1.

10. Примѣнимъ формулу (10) къ случаю $\nu = n$; принимая здѣсь во вниманіе, что $a_{n+1} = 0$, получимъ:

$$aQ_n = bP_n.$$

Какъ a и b, такъ и P и Q суть числа взаимно простыя; поэтому

$$P_n = a, \quad Q_n = b;$$

а изъ неравенствъ (12) слѣдуетъ, что

$$P_{n-1} < a, \quad Q_{n-1} < b.$$

Изъ предыдущаго ясно, что формулы (14) при четномъ n даютъ наименьшія положительныя рѣшенія уравненія (6); при нечетномъ n наименьшія положительныя рѣшенія будутъ:

$$x = a - P_{n-1}, \quad y = b - Q_{n-1}.$$

11. Возьмемъ численный примѣръ; положимъ

$$a = 1000, \quad b = 221.$$

Образуемъ алгориѳмъ (7):

$$
\begin{aligned}
1000 &= 4 \,.\, 221 + 116,\\
221 &= 1 \,.\, 116 + 105,\\
116 &= 1 \,.\, 105 + 11,\\
105 &= 9 \,.\, 11 \;\; + 6,\\
11 &= 1 \,.\, 6 \;\;\; + 5,\\
6 &= 1 \,.\, 5 \;\;\; + 1,\\
5 &= 5 \,.\, 1.
\end{aligned}
$$

Мы находимъ такимъ образомъ, что $n = 7$. Для чиселъ же q получаемъ рядъ:

$$
\begin{aligned}
&q,\; q_1,\; q_2,\; q_3,\; q_4,\; q_5,\; q_6\\
&= 4,\; 1,\; 1,\; 9,\; 1,\; 1,\; 5.
\end{aligned}
$$

Отсюда:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 4, & Q_1 &= 1,\\
P_2 &= 5, & Q_2 &= 1,\\
P_3 &= 9, & Q_3 &= 2,\\
P_4 &= 86, & Q_4 &= 19,\\
P_5 &= 95, & Q_5 &= 21,\\
P_6 &= 181, & Q_6 &= 40,\\
P_7 &= 1000, & Q_7 &= 221;
\end{aligned}
$$

$$x = 1000 - 181 = 819, \quad y = 221 - 40 = 181$$

суть наименьшія положительныя рѣшенія уравненія

$$1000\, y - 221\, x = 1.$$

ГЛАВА XIV.

Неопредѣленныя уравненія второй степени.

§ 71. Теорема Вильсона.

1. Задачу, которую мы рѣшили въ § 70, можно представить въ другомъ видѣ. Уравненіе

$$ay - bx = c$$

показываетъ, что $ay - c$ дѣлится на b, т. е. (§ 67)

$$ay \equiv c \pmod{b}.$$

Такъ какъ a и b суть числа взаимно простыя, то произведенное выше изслѣдованіе даетъ намъ всегда одно рѣшеніе этого сравненія. Если же извѣстно одно рѣшеніе y_0 этого сравненія, то остальныя получаются по формулѣ $y = y_0 + \lambda b$ (§ 70). Число λ можно выбрать такъ, чтобы y получило положительное значеніе, меньшее, нежели b.

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующую теорему.

Если a и b суть числа первыя между собой, то сравненіе

$$ay \equiv c \pmod{b}$$

имѣетъ одно и только одно рѣшеніе въ ряду чиселъ

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ b-1.$$

2. Возьмемъ за модуль нечетное простое число и соотвѣтственно этому обозначимъ его черезъ p. Изъ нашей теоремы вытекаетъ слѣдующій частный случай.

Если a не дѣлится на p, то въ ряду $1, 2, \ldots, p-1$ всегда есть число a', удовлетворяющее сравненію:

$$aa' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Это число a' только въ томъ случаѣ можетъ быть равно a, если $a \equiv 1$ или $a \equiv -1$ [или, что то же, $\equiv p-1 \pmod{p}$]. Ибо, полагая $a' = a$,

получимъ $aa'-1 = a^2-1 = (a+1)(a-1)$. Послѣднее выраженіе дѣлится на p только въ томъ случаѣ, если на p дѣлится $a-1$ или $a+1$.

Числа $2, 3, \ldots, (p-2)$ при этомъ распадаются на $\frac{1}{2}(p-3)$ паръ чиселъ, a и a', произведеніе которыхъ aa' сравнимо съ 1, а произведеніе остальныхъ двухъ, $1.(p-1)$, сравнимо съ -1[1]). Слѣдовательно, произведеніе

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

что справедливо и для $p = 2$, такъ какъ $+1 \equiv -1 \pmod{2}$.

Въ словахъ это выражается такъ:

Если p есть простое число, то число $(p-1)!+1$ дѣлится на p.

3. Это важное предложеніе называется теоремой Вильсона (Wilson) *). Обратная теорема также справедлива:

Если p есть натуральное число и $(p-1)!+1$ дѣлится на p, то p есть простое число.

Если бы p содержало простого множителя q, меньшаго, чѣмъ p, то $(p-1)!$ дѣлилось бы на q, а $(p-1)!+1$ не дѣлилось бы на q, а потому не дѣлилось бы и на p. Теорема Вильсона даетъ, такимъ образомъ, признакъ для распознаванія простыхъ чиселъ.

4. Мы сдѣлаемъ очень важное примѣненіе теоремы Вильсона.

Если p по прежнему есть нечетное простое число, то каждому числу a въ ряду $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$ отвѣчаетъ число a'', удовлетворяющее

[1]) Если $a=1$ или $a=p-1$, то a' соотвѣтственно ровно 1 или $p-1$, какъ это было показано въ текстѣ. Поэтому мы опускаемъ эти два числа. Если a есть одно изъ $(p-3)$ остальныхъ чиселъ $2, 3, \ldots, p-2$, то a' не равно a; поэтому эти послѣднія числа и распадаются на такія пары, которыя даютъ произведенія, сравнимыя съ 1 по модулю p.

*) Первое упоминаніе объ этой теоремѣ встрѣчается у Варинга (Waring) въ „Meditationes algebraicae", первое изданіе которыхъ вышло въ 1870 году. Hanc maxime elegantem numerorum primorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicarum peritissimus Iohannes Wilson Armiger". Этотъ Iohannes Wilson Armiger, безъ сомнѣнія, есть никто иной, какъ Sir John Wilson, жившій отъ 1741 до 1793 г., о которомъ въ „National Biography" LXII, 107 (London 1900) сказано: „While still an undergraduate he is said to have made an able reply to the attack on Edward Warings Miscellanea analytica by William Samuel Powell" (письменное сообщеніе М. Кантора) [2]).

[2]) Переводъ латинской цитаты:

„Это въ высшей степени изящное свойство простыхъ чиселъ открылъ знаменитый и весьма свѣдущій въ математикѣ Іоаннъ Вильсонъ Армигеръ".

Переводъ англійской цитаты:

„Хотя этотъ скромный человѣкъ и не имѣлъ ученыхъ степеней, тѣмъ не менѣе онъ сумѣлъ, говорятъ, отразить нападенія, сдѣланныя на книгу Варинга „Miscellanea analytica" Самуиломъ Пауэлемъ.

сравненію

$$aa'' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Если при этомъ сравненіе

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p} \qquad (1)$$

не имѣетъ рѣшенія, то a'' ни въ какомъ случаѣ не равно a, и числа $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$ распадаются на $\frac{1}{2}(p-1)$ паръ чиселъ, произведеніе которыхъ по модулю p сравнимо съ -1. Поэтому

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

и въ то же время по теоремѣ Вильсона

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Слѣдовательно, при этихъ условіяхъ [3] $\frac{1}{2}(p-1)$ есть нечетное число, такъ какъ $+1$ и -1 не могутъ быть сравнимы по нечетному модулю.

5. Если сравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе, и $x=\alpha$ есть одно изъ рѣшеній, а x другое, то $x^2 \equiv \alpha^2$, т. е. $(x-\alpha)(x+\alpha)$ дѣлится на p, откуда либо $x \equiv +\alpha$, либо $x \equiv -\alpha$. Въ ряду чиселъ $1, 2, 3, \ldots, p-1$, существуютъ два и только два рѣшенія, произведеніе которыхъ $\alpha(p-\alpha) \equiv \equiv -\alpha^2 \equiv +1 \pmod{p}$ [4]. Числа $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$ распадаются теперь на $\frac{1}{2}(p-3)$ паръ, a, a'', произведеніе которыхъ сравнимо съ -1, а остальныя два числа α, $p-\alpha$ даютъ произведеніе $\alpha(p-\alpha)$, сравнимое съ 1. Принимая въ соображеніе теорему Вильсона, получимъ:

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

откуда слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ $\frac{p-1}{2}$ представляетъ собою четное число.

---

[3]) Т. е. когда сравненіе (1) не имѣетъ рѣшенія.

[4]) Если α есть одно рѣшеніе, то остальныя, какъ показано въ текстѣ, содержатся въ формулахъ:

$$\alpha + p\lambda \text{ и } -\alpha + p\lambda.$$

Каждое изъ нихъ даетъ только одно рѣшеніе, содержащееся въ ряду $1, 2, \ldots, (p-1)$. Если α и есть то рѣшеніе, которое содержится въ этомъ ряду, то вторая формула даетъ рѣшеніе $(p-\alpha)$, содержащееся въ томъ же ряду.

Всѣ нечетныя числа p (простыя и составныя) распадаются на два класса, смотря по тому, есть ли $\frac{1}{2}(p-1)$ четное или нечетное число. Первыя могутъ быть представлены вь видѣ $4n+1$, вторыя въ видѣ $4n+3$ или $4n-1$, гдѣ n обозначаетъ цѣлое число.

Для простыхъ чиселъ, принадлежащихъ къ первому классу, сравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе, а для простыхъ чиселъ второго класса оно не имѣетъ рѣшеній[5]).

Это предложеніе, впервые доказанное Эйлеромъ, мы выразимъ такъ:

6. Если p есть простое число вида $4n+1$, то вмѣсто x можно подставить такое число, что x^2+1 раздѣлится на p; если же p есть простое число вида $4n+3$, то это невозможно.

Къ простымъ числамъ перваго класса принадлежатъ, напримѣръ:

$$5,\ 13,\ 17,\ 29,\ 37,\ 41,\ 53,\ 61,\ 73;$$

ко второму классу:

$$3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 23,\ 31,\ 43,\ 47,\ 59,\ 67.$$

7. Для простыхъ чиселъ перваго класса, основываясь на теоремѣ Вильсона, легко найти рѣшенія сравненія (1).

Дѣйствительно:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv -(p-1) \\ 2 \equiv -(p-2) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \frac{p-1}{2} \equiv -\left(p-\frac{p-1}{2}\right) \end{array}\right\} \pmod{p} \qquad (2)$$

Если $p=4n+1$, то всѣ числа произведенія $(p-1)!$ распадаются на двѣ группы: $1, 2, \ldots, 2n$ и $(2n+1), (2n+2), \ldots, (p-1)$; произведеніе чисель первой группы сравнимо съ произведеніемъ чиселъ второй по модулю p[6]). Въ виду же теоремы Вильсона

$$(p-1)! \equiv \left(\frac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Такимъ образомъ мы получаемъ рѣшеніе сравненія (1) въ видѣ:

$$x \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

[5]) Въ текстѣ доказаны собственно обратныя предложенія: если сравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе, то p имѣетъ видъ $4n+1$: если же оно не имѣетъ рѣшенія, то p есть число вида $4n-1$.

[6]) Это получается перемноженіемъ сравненій (2), такъ какъ число этихъ сравненій есть $2n$.

Если, напримѣръ, $p = 13$, то $x \equiv 6! \equiv 720 \equiv 5 \pmod{13}$; дѣйствительно, $5^2 + 1 = 26$ дѣлится на 13.

При большихъ значеніяхъ p, конечно, на практикѣ нельзя примѣнять этого способа для вычисленія x. Гауссъ далъ средство, основанное на высшей ариѳметикѣ, для быстраго вычисленія x при большихъ значеніяхъ числа p. Мы не можемъ изложить способа Гаусса во всей его полнотѣ, но на примѣрѣ мы настолько его уяснимъ, что его можно будетъ примѣнять въ любомъ аналогичномъ случаѣ. Для этого требуются слѣдующія предварительныя соображенія.

§ 72. Квадратичные вычеты.

1. Пусть m есть любое натуральное число, а x одинъ изъ вычетовъ 0, 1, 2, 3, ... , $m-1$ по модулю m.

Два числа

$$x^2 \text{ и } (m-x)^2 = m^2 - 2mx + x^2$$

при дѣленіи на m даютъ одинаковые вычеты; кромѣ того, отъ дѣленія квадратовъ какихъ бы то ни было натуральныхъ чиселъ на m не можетъ получиться вычетовъ, отличныхъ отъ тѣхъ, которые получаются отъ дѣленія чиселъ x^2. Поэтому мы получимъ всѣ вычеты полныхъ квадратовъ, если будемъ дѣлить на m числа x^2, при чемъ достаточно дать x всѣ значенія, не превышающія $^1/_2\ m$.

Полученные такимъ образомъ вычеты называются квадратичными вычетами числа m. Число ихъ не превышаетъ $(\frac{1}{2}m + 1)$ [7].

Остальные вычеты по модулю m, которые ни въ какомъ случаѣ не могутъ быть вычетами квадратовъ натуральныхъ чиселъ, называются неквадратичными вычетами. Число ихъ не меньше $(\frac{1}{2}m - 1)$

2. Примѣры: $m = 3$:

Квадратичные	вычеты:	0, 1,
неквадратичные	„	2.
		$m = 4$:
Квадрат	„	0, 1.
неквадрат.	„	2, 3.

---

[7]) Если m есть четное число, то въ ряду $0, 1, 2, \ldots, m-1$ имѣется $\frac{1}{2}m + 1$ чисель, не превосходящихъ $\frac{1}{2}m$; если же m есть нечетное число, то ихъ имѣется только $\frac{m-1}{2}$.

$m = 5$:

Квадрат. „ 0, 1, 4,
неквадрат. „ 2, 3,

$m = 6$:

Квадрат. „ 0, 1, 3, 4,
неквадрат. „ 2, 5,

$m = 7$:

Квадрат. „ 0, 1, 2, 4,
неквадрат. „ 3, 5, 6,

$m = 8$:

Квадрат. „ 0, 1, 4,
неквадрат. „ 2, 3, 5, 6,

$m = 9$:

Квадрат. „ 0, 1, 4, 7.
неквадрат. „ 2, 3, 5, 6, 8,

$m = 11$:

Квадрат. „ 0, 1, 3, 4, 5, 9.
неквадрат. „ 2, 6, 7, 8, 10.

3. Обратимъ вниманіе на особую теорему, вытекающую изъ примѣра $m = 8$: квадратъ нечетнаго числа всегда имѣетъ видъ $8n + 1$ (а слѣдовательно, и $4n + 1$).

4. Считая, что $x^2 + 1$ дѣлится на простое число p, положимъ:

$$x^2 + 1 = py; \qquad (1)$$

мы разсматриваемъ здѣсь x и y какъ неизвѣстныя цѣлыя числа. Вмѣсто того, чтобы прямо искать x, можно искать сначала y; послѣднее должно удовлетворять условію, что $py - 1$ есть квадратъ натуральнаго числа.

Такъ какъ мы можемъ брать $x < \frac{1}{2} p$, то изъ равенства (1) слѣдуетъ, что $py < \frac{1}{4} p^2$, или $y < \frac{1}{4} p$. Итакъ, вмѣсто y достаточно подставить только четвертую часть чиселъ 1, 2, ... $p - 1$ и при этомъ слѣдить, будетъ ли $py - 1$ полнымъ квадратомъ или нѣтъ. Для того, чтобы рѣшить, будетъ ли данное число квадратомъ, мы имѣемъ простое и вѣрное средство (§ 21).

5. Можно еще уменьшить число значеній, которыя нужно подставить вмѣсто y. Для этой цѣли возьмемъ какое нибудь число e, которое называютъ **эксклюдентомъ** (сначала беремъ небольшія числа

3, 4, 5, 7, 8, . . . и т. д.). Числа 6 не стоитъ брать, такъ какъ оно даетъ то же, что и эксклюдентъ 3. Если β есть неквадратичный вычетъ по модулю e, то сравненіе:

$$py \equiv \beta + 1 \pmod{e}. \qquad (2)$$

не можетъ имѣть мѣста [8]).

Можно, поэтому, исключить всѣ значенія y, удовлетворяющія какому нибудь сравненію вида (2).

6. Для примѣра возьмемъ $p = 97$. Вмѣсто y намъ предстоитъ подставлять числа 1, 2, 3, . . . , 24.

Возьмемъ за эксклюдентъ $e = 3$; 2 есть неквадратичный вычетъ по модулю p Подставляя въ сравненіе (2) $\beta = 2$, получимъ, что нужно исключить всѣ числа, дѣлящіяся на 3; остаются числа:

$$y = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17. 19, 20, 22, 23.$$

Возьмемъ $e = 8$, $\beta = 2, 3, 5, 6$. Пользуясь этимъ. находимъ, что нужно вычеркнуть всѣ числа видовъ:

$$8n + 3,\ 8n + 4,\ 8n + 6,\ 8n + 7.$$

Остаются

$$y = 1, 2, 5, 8, 10, 13, 16, 17.$$

Положимъ далѣе $e = 5$, $\beta = 2, 3$; нужно вычеркнуть рѣшенія сравненія

$$2y \equiv 3, 4, \text{ т. е. } y \equiv 4, 2 \pmod 5)$$

Эти рѣшенія суть : 2 и 17.

Взявши еще числа $e = 9$ и $e = 7$, мы вычеркнемъ всѣ числа, кромѣ 5 и 13. Подставляя $y = 5$, находимъ:

$$97 \,.\, 5 - 1 = 484 = 22^2.$$

Сравненію $x^2 \equiv -1 \pmod{97}$ удовлетворяютъ $x \equiv 22$ и $x \equiv 75$. Изложенный пріемъ можно примѣнять и къ большимъ простымъ числамъ, если перебрать еще больше эксклюдентовъ; вычисленія при этомъ, конечно, увеличиваются. Такъ напримѣръ, для $p = 1901$ получаемъ $y = 25$, послѣ чего легко провѣрить:

$$218^2 \equiv -1 \pmod{1901}.$$

Дадимъ еще нѣсколько примѣровъ, на удачу взятыхъ изъ таблицы, вычисленной Эйлеромъ *).

*) „Commentationes arithmeticae", т. I, стр. 362.

[8]) Если y есть такое число, при которомъ можетъ быть удовлетворено сравненіе (1), то сравненіе (2) не можетъ имѣть мѣста, ибо иначе мы бы имѣли $\beta = x^2$, т. е. β было бы квадратичнымъ вычетомъ.

$$114^2 \equiv -1 \pmod{317}, \quad 78^2 \equiv -1 \pmod{1217}$$
$$208^2 \equiv -1 \pmod{509}, \quad 51^2 \equiv -1 \pmod{1301}$$
$$26^2 \equiv -1 \pmod{677}, \quad 225 \equiv -1 \pmod{1489}$$
$$317^2 \equiv -1 \pmod{773}, \quad 61^2 \equiv -1 \pmod{1861}$$
$$469^2 \equiv -1 \pmod{1009}, \quad 412^2 \equiv -1 \pmod{1997}$$

§ 73. Пиѳагоровы треугольники.

1. Еще въ глубокой древности знали, что треугольникъ, стороны котораго, измѣренныя одной единицей мѣры, выражаются числами 3, 4, 5, имѣетъ прямой уголъ; эти три числа обладаютъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что квадратъ большаго изъ нихъ равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ ($5^2 = 3^2 + 4^2$); послѣднее соотношеніе выражаетъ теорему Пиѳагора. Историки полагаютъ, что это ариѳметическое соображеніе послужило началомъ, источникомъ геометрической теоремы [Канторъ Исторія математики, томъ 1 стр. 160].

Прямоугольный треугольникъ называется Пиѳагоровымъ, если его стороны, измѣренныя одной и той же единицей мѣры, выражаются цѣлыми числами. Чтобы найти всѣ Пиѳагоровы треугольники, нужно рѣшить ариѳметическую задачу: найти всѣ натуральныя числа x, y, z, удовлетворяющія условію:

$$z^2 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

2. Чтобы рѣшить эту задачу, замѣтимъ сначала, что изъ одного рѣшенія уравненія (1) можно вывести сколь угодно много другихъ, умножая полученныя значенія x, y, z на одно и то же число. Точно такъ же мы можемъ сократить уравненіе (1) на g^2, если g есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ x, y и z, и тогда получимъ рѣшенія уравненія (1), не имѣющія общихъ множителей. Поэтому мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что x, y, z не имѣютъ общихъ дѣлителей. Но тогда эти числа и попарно не могутъ имѣть общихъ дѣлителей; въ самомъ дѣлѣ, если два изъ этихъ чиселъ дѣлятся на простое число q, то, въ виду равенства (1), и третье число должно дѣлиться на q.

Итакъ, изъ трехъ чиселъ x, y, z ни одна пара не можетъ имѣть общаго дѣлителя.

Вмѣстѣ съ тѣмъ между этими числами не можетъ быть двухъ четныхъ. Съ другой стороны, числа x и y не могутъ быть одновременно нечетными. Ибо, если $x = 2g + 1$, $y = 2k + 1$, то число

$$x^2 + y^2 = 4(g^2 + k^2) + 4(g + k) + 2$$

дѣлится на 2, но не дѣлится на 4 и потому не можетъ быть полнымъ

квадратомъ, такъ какъ каждый четный квадратъ дѣлится на 4. Мы не нарушимъ такимъ образомъ общности, если будемъ считать x нечетнымъ, y четнымъ, а z нечетнымъ числомъ. Напишемъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) \qquad (2)$$

Положимъ:

$$z + y = m,$$
$$z - y = n.$$

При нашихъ предложеніяхъ m и n суть числа нечетныя; отсюда

$$z = \frac{m+n}{2}, \quad y = \frac{m-n}{2};$$

изъ этихъ формулъ заключаемъ, что $m > n$, и что m и n не могутъ имѣть общаго множителя, ибо таковой могъ бы быть только нечетнымъ числомъ, а потому содержался бы также въ y и въ z. Изъ уравненія (2) слѣдуетъ:

$$x^2 = mn, \qquad (3)$$

откуда вытекаетъ, что числа m и n должны быть полными квадратами.

Дѣйствительно, если бы число m содержало какого нибудь простого множителя въ нечетной степени, то онъ долженъ былъ бы по крайней мѣрѣ одинъ разъ входить въ n; но это не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ m и n суть числа взаимно простыя.

Итакъ, $m = a^2$ и $n = b^2$, гдѣ a и b суть нечетныя числа, не имѣющія общихъ множителей; вмѣстѣ съ тѣмъ

$$x = ab, \; y = \frac{a^2 - b^2}{2}, \; z = \frac{a^2 + b^2}{2} \qquad (4)$$

3 Обратно, если a и b суть нечетныя цѣлыя числа, то выраженія (4) удовлетворяютъ уравненію (1). Дѣйствительно,

$$(ab)^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2$$

Формула (4) даетъ всѣ возможные Пиѳагоровы треугольники. Мы получаемъ, напримѣръ:

$$a = 3,\; b = 1,\; x = 3,\; y = 4,\; z = 5,$$
$$a = 5,\; b = 1,\; x = 5,\; y = 12,\; z = 13,$$
$$a = 5,\; b = 3,\; x = 15,\; y = 8,\; z = 17,$$

и т. д.

§ 74. Знаменитая теорема Фермата.

1. Задача о нахожденіи цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, удовлетворяющихъ уравненію

$$x^n + y^n = z^n$$

есть обобщеніе задачи, рѣшенной въ предыдущемъ параграфѣ. Ферматъ безъ доказательства высказалъ положеніе, что этому уравненію нельзя удовлетворить, если $n > 2$. До сихъ поръ не существуетъ доказательства этой теоремы въ общемъ видѣ, хотя справедливость ея не подвергается сомнѣнію. Она носитъ названіе великой теоремы Фермата. Эйлеръ далъ доказательство для двухъ случаевъ $n = 3$ и $n = 4$; Дирехле (Dirichelet) для случая $n = 5$; наконецъ Куммеръ (Kummer) при помощи высшей теоріи чиселъ далъ доказательство, непримѣнимое только для нѣкоторыхъ отдѣльныхъ значеній n, число которыхъ, по крайней мѣрѣ среди небольшихъ значеній n, очень невелико. Доказательство для случая $n = 4$ выполняется съ помощью элементарныхъ пріемовъ и можетъ быть здѣсь изложено.

2. Если предположить, что уравненіе

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (1)$$

имѣетъ рѣшеніе въ цѣлыхъ числахъ x, y и z, изъ которыхъ ни одно не равно нулю, то и уравненіе

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (2)$$

будетъ имѣть такое рѣшеніе. Нужно только въ уравненіи (2) положить z равнымъ квадрату того значенія, которое z имѣетъ въ первомъ уравненіи.

Если мы поэтому обнаружимъ, что уравненіе (2) не имѣетъ рѣшенія, то мы докажемъ даже больше того, что собственно требуется. Если же уравненіе (2), вообще, имѣетъ рѣшенія, то между ними будетъ одно (а можетъ быть и нѣсколько), въ которыхъ z^2 имѣетъ наименьшее значеніе. Эти именно рѣшенія, соотвѣтствующія нашему z, мы и будемъ теперь понимать подъ x, y и z. Тогда x и y не могутъ имѣть общихъ множителей: если бы x и y имѣли общаго дѣлителя d, то z должно бы дѣлиться на d^2; раздѣляя тогда уравненіе (2) на d^4, получимъ уравненіе того же вида, въ которомъ z имѣетъ меньшее значеніе.

3. Если мы удовлетворимъ уравненію (2), то x^2, y^2 и z суть стороны Пиѳагорова треугольника, а потому, согласно § 73, 2, мы можемъ положить:

$$x^2 = ab, \quad y^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}, \quad z = \frac{a^2 + b^2}{2}, \qquad (3)$$

гдѣ a и b нечетныя числа безъ общихъ дѣлителей ($a > b$). Изъ перваго равенства (3) заключаемъ точно такъ же, какъ въ § 73, 2 изъ равенства (3), что числа a и b сами также должны быть полными квадратами; положимъ поэтому:

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2,$$

гдѣ α и β опять нечетныя числа, не имѣющіе общихъ дѣлителей.

Пусть теперь:

$$\alpha + \beta = 2t, \quad \alpha - \beta = 2u,$$

и, слѣдовательно:

$$\alpha = t + u, \quad \beta = t - u,$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = 4tu, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 2(t^2 + u^2).$$

Ясно, что t и u также представляютъ собою цѣлыя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей. Изъ уравненій (3) вытекаетъ:

$$y^2 = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)}{2} = 4tu(t^2 + u^2),$$

откуда

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = tu(t^2 + u^2). \qquad (4)$$

Такъ какъ числа t и u не имѣютъ общихъ дѣлителей, то $t^2 + u^2$ не можетъ имѣть общихъ дѣлителей ни съ t ни съ u. Отсюда, на основаніи тѣхъ же соображеній, которыми мы воспользовались выше, мы заключаемъ, что три числа u, t и $u^2 + t^2$ суть полные квадраты. Положимъ:

$$t = x_1^2, \quad u = y_1^2, \quad t^2 + u^2 = z_1^2;$$

тогда

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2. \qquad (5)$$

Теперь

$$z_1^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{a + b}{2} = \frac{y^2}{a - b};$$

но, такъ какъ $a - b$ есть цѣлое положительное число, по крайней мѣрѣ равное 1, то

$$z_1^2 \leqslant y^2;$$

съ другой стороны, $y^4 = z^2 - x^2 < z^4$ и, слѣдовательно:

$$z_1^2 < z;$$

z_1^2 меньше z и тѣмъ болѣе меньше z^2; но это противорѣчитъ предположенію, что z^2 есть наименьшее число, для котораго удовлетворяется уравненіе (2). Итакъ, не существуетъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ x, y, z, удовлетворяющихъ уравненію (2), какъ того и требуетъ теорема Фермата.

§ 75. Разложеніе числа на сумму двухъ квадратовъ.

1. Каждое простое число вида $4n+1$ есть сумма двухъ квадратовъ *).

2. Если x и y суть цѣлыя числа и

$$m = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

есть сумма ихъ квадратовъ, то m можетъ быть нечетнымъ числомъ только въ томъ случаѣ, если одно изъ чиселъ x и y четное, а другое нечетное, такъ какъ сумма двухъ нечетныхъ или двухъ четныхъ чиселъ есть всегда четное число. Квадратъ четнаго числа дѣлится на 4, квадратъ нечетнаго по модулю 4 даетъ вычетъ 1; если поэтому въ формулѣ (1) m есть число нечетное, то оно имѣетъ видъ $4n+1$. Итакъ, если простое число (кромѣ $2 = 1^2 + 1^2$) есть сумма двухъ квадратовъ, то оно непремѣнно имѣетъ видъ $4n+1$. Гораздо труднѣе было доказать обратное, что дѣйствительно каждое простое число вида $4n+1$ всегда представляетъ собою сумму двухъ квадратовъ.

Если $m = x^2 + y^2$, гдѣ x и y цѣлыя числа, то говорятъ, что m разлагается на два квадрата, или что m можетъ быть представлено въ видѣ суммы двухъ квадратовъ. Если при этомъ x и y суть числа первыя между собой, то разложеніе называется правильнымъ (или собственнымъ); если же x и y имѣютъ общаго множителя, то разложеніе называется неправильнымъ.

Если x и y имѣютъ общаго множителя, то, въ силу равенства (1), въ составъ числа m долженъ входить квадратъ этого множителя; если поэтому m есть простое число, то x и y суть числа взаимно простыя.

3. Предположимъ теперь, что нѣкоторое нечетное простое число p не разлагается на два квадрата, но входитъ множителемъ въ сумму двухъ

*) Теорема эта дана Ферматомъ безъ доказательства. Доказательство принадлежитъ Эйлеру (1754. „Commentationes arithmeticae“, т. I) Въ настоящее время теорема эта является частнымъ случаемъ теоріи квадратичныхъ формъ.

квадратовъ. Иными словами, допустимъ, что имѣетъ мѣсто равенство

$$x^2 + y^2 = np, \qquad (2)$$

гдѣ x, y и n суть цѣлыя числа, при чемъ x и y не дѣлятся на p. Мы покажемъ, что въ такомъ случаѣ можно найти отсюда другія числа, удовлетворяющія равенству вида (2) только съ меньшимъ множителемъ n, такъ что послѣдовательно мы непремѣнно придемъ къ разложенію числа p на два квадрата.

4. Раздѣляя x и y на p, мы получимъ:

$$x = pa + x_1,$$
$$y = pb + y_1,$$

гдѣ a и b суть частныя, x_1 и y_1 отличные отъ нуля остатки дѣленія. Мы возьмемъ при этомъ не наименьшіе положительные, а абсолютно наименьшіе остатки (§ 15, 3). Поэтому, x_1 и y_1 могутъ быть и положительными и отрицательными числами, но по абсолютной величинѣ

$$x_1 < \frac{1}{2}p, \text{ и } y_1 < \frac{1}{2}p;$$

слѣдовательно:

$$x_1^2 + y_1^2 < \frac{1}{2}p^2. \qquad (3)$$

Съ другой стороны, такъ какъ число $x^2 + y^2$ дѣлится на p (2), то и

$$x_1^2 + y_1^2 = p^2(a^2 + b^2) - 2p(ax + by) + (x^2 + y^2)$$

должно дѣлиться на p; если поэтому n_1 есть частное отъ этого дѣленія, то

$$x_1^2 + y_1^2 = n_1 p. \qquad (4)$$

Въ виду же неравенства (3)

$$n_1 < \frac{1}{2}p.$$

Здѣсь x_1 и y_1 не дѣлятся на p, такъ какъ въ противномъ случаѣ $n_1 p$ дѣлилось бы на p^2, т. е. n_1 дѣлилось бы на p, чего не можетъ быть, такъ какъ число n_1 меньше, чѣмъ $\frac{1}{2}p$, но отлично отъ нуля.

5. Теперь повторимъ тотъ же пріемъ съ тою разницей, что за дѣлителя возьмемъ n_1. Пусть

$$x_1 = n_1 a_1 + \alpha,$$
$$y_1 = n_1 b_1 + \beta; \qquad (5)$$

a_1 и b_1 опредѣлимъ такъ, чтобы остатки α и β были по абсолютной величинѣ равны или меньше $\frac{1}{2}n_1$, такъ что

$$\alpha^2+\beta^2 \leqq \frac{1}{2}n_1^2.$$

Изъ равенства (4), какъ и выше, выводимъ снова, что $\alpha^2+\beta^2$ дѣлится на n_1, и потому положимъ:

$$\alpha^2+\beta^2 = n_1 n_2; \qquad (5')$$

при этомъ, въ виду предыдущаго неравенства,

$$n_2 \leqq \frac{1}{2} n_1 < \frac{1}{4} p.$$

Оба числа α и β могли бы быть равны нулю только въ томъ случаѣ, если бы x_1 и y_1 дѣлились на n_1. Въ послѣднемъ случаѣ $n_1 p$ должно было бы дѣлиться на n_1^2 [9]), а потому p дѣлилось бы на n_1; но такъ какъ p есть простое число, то либо $n_1 = p$, а этого быть не можетъ, такъ какъ $n_1 < \frac{1}{2}p$,—либо $n_1 = 1$. Если же $n_1 = 1$, то равенство (4) даетъ требуемое разложеніе числа p на два квадрата.

Такимъ образомъ, если n_1 больше 1, то α и β не равны одновременно нулю, и слѣдовательно, частное n_2 также отлично отъ нуля.

Изъ равенства (5), принимая во вниманіе (4), выводимъ, что

$$\alpha x_1+\beta y_1 = x_1^2+y_1^2 - n_1(a_1x_1+b_1y_1) = n_1(p-a_1x_1-b_1y_1),$$
$$\alpha y_1-\beta x_1 = -n_1(a_1y_1-b_1x_1)$$

и, слѣдовательно, числа $\alpha x_1+\beta y_1$ и $\alpha y_1-\beta x_1$ дѣлятся на n_1. Въ виду этого мы можемъ опредѣлить два такихъ числа x_2 и y_2, что

$$\alpha x_1+\beta y_1 = n_1 x_2,$$
$$\alpha y_1-\beta x_1 = n_1 y_2. \qquad (6)$$

Возводя эти равенства въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$n_1^2(x_2^2+y_2^2) = (\alpha^2+\beta^2)(x_1^2+y_1^2),$$

а слѣдовательно:

$$x_2^2+y_2^2 = n_2 p \text{ [10]}). \qquad (7)$$

Если бы числа x_2 и y_2 дѣлились на p, то n_2 также дѣлилось бы на p,

---

[9]) Въ виду равенства (4).

[10]) Въ виду соотношеній (4) и (5')

что невозможно, такъ какъ n_2 меньше p; поэтому x_2 и y_2 не дѣлятся на p.

Формула (7) того же вида, что и (4), только на мѣстѣ n_1 стоитъ меньшее число n_2. Если n_2 еще не равно 1, то мы можемъ повторить нашъ пріемъ и такимъ образомъ мы необходимо придемъ въ концѣ концовъ къ разложенію числа p на два квадрата.

6. Если p есть простое число вида $4n+1$, то сравненіе

$$x^2+1\equiv 0 \pmod{p},$$

какъ было показано въ § 71, 6, всегда имѣетъ рѣшеніе. Это значитъ, что мы можемъ найти такое число n, что

$$x^2+1=np.$$

Это равенство совпадаетъ съ равенствомъ (2), если въ послѣднемъ положимъ $y=1$. Итакъ, уравненію (2) можно всегда удовлетворить, если p есть простое число вида $4n+1$: этимъ доказана теорема п. 1-го. Ходъ доказательства даетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и самый способъ разложенія числа p на два квадрата, если только извѣстно хотя бы одно рѣшеніе сравненія $x^2\equiv -1 \pmod{p}$ [11]).

7. Для примѣра возьмемъ $p=1901$. Такъ какъ въ формулѣ

$$218^2+1=25\,.\,1901$$

множитель 25 уже меньше $\frac{p}{2}$, то мы можемъ исходить прямо изъ формулы (4), т. е. положить $x_1=218, y_1=1, n_1=25$. Изъ равенства (5) получаемъ:

$$218=25\,.\,9-7,\quad 1=25\,.\,0+1,$$

т. е. $\alpha=-7$, $\beta=1$. Для опредѣленія чиселъ x_2 и y_2 получаемъ изъ уравненій (6):

$$7\,.\,218+1=-25\,.\,61$$
$$-7-218=-25\,.\,9$$
$$7^2+1^2=2\,.\,25,$$

[11]) Сдѣлаемъ краткій обзоръ этого довольно сложнаго доказательства.

Нужно доказать, что простое число p вида $4n+1$ разлагается на два квадрата. Мы допускаемъ сначала, что число p есть дѣлитель суммы двухъ квадратовъ, т. е. что имѣетъ мѣсто равенство (2). Далѣе доказывается, что равенство (2) можетъ быть замѣнено равенствомъ того же вида съ тою разницей, однако, что частное n имѣетъ меньшее значеніе. Именно, отъ равенства (2) мы переходимъ къ равенству (4) (п. 4); далѣе, продолжая тотъ же пріемъ, мы показываемъ, что если только $n_1>1$, то мы отъ равенства (4) можемъ перейти къ равенству (7), при чемъ $n_2<n_1$. Такимъ образомъ, мы постепенно должны довести частное до единицы и, слѣдовательно, p разлагается на 2 квадрата. Но доказательство основано на допущеніи, что p есть дѣлитель суммы двухъ квадратовъ; надо, слѣдовательно, доказать, что это допущеніе всегда соотвѣтствуетъ дѣйствительности; этому и посвященъ п. 6.

т. е. $x_2 = 61$, $y_2 = 9$, $n_2 = 2$. Итакъ,

$$61^2 + 9^2 = 2 \,.\, 1901.$$

Повторяя ту же операцію для чиселъ: $n_1 = 2$, $x_1 = 61$, $y_1 = 9$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $2x_2 = 61 + 9$, $2y_2 = 61 - 9$, получимъ:

$$35^2 + 26^2 = 1901.$$

8. Изъ разсужденій предыдущаго параграфа вытекаютъ попутно слѣдующія теоремы:

Если x и y суть числа взаимно простыя, и $m = x^2 + y^2$, то m есть либо нечетное число, либо удвоенное нечетное число; каждый нечетный простой дѣлитель числа m имѣетъ видъ $4n + 1$.

Дѣйствительно, если x и y суть оба нечетныя числа, то ихъ квадраты имѣютъ видъ $8n + 1$ (§ 72, 3.), а сумма послѣднихъ есть число вида $8n + 2$, т. е. число, кратное 2, но не кратное 4.

Съ другой стороны, какъ доказано въ пунктахъ 3 — 6 каждое простое число, входящее множителемъ въ m, само по себѣ есть сумма двухъ квадратовъ, т. е. есть число вида $4n + 1$.

9. Если число m допускаетъ правильное разложеніе на два квадрата $m = x^2 + y^2$, а p есть простой множитель числа m (не исключая и $p = 2$), такъ что $m = pn$, то n тоже допускаетъ правильное разложеніе на два квадрата.

Дѣйствительно, въ пунктахъ 8 и въ 1 мы показали, что и p есть сумма двухъ квадратовъ:

$$p = a^2 + b^2; \tag{8}$$

здѣсь a и b непремѣнно взаимно простыя числа, такъ какъ p простое число.

Если теперь

$$m = pn = x^2 + y^2, \tag{9}$$

то и

$$x^2(a^2 + b^2) - b^2(x^2 + y^2) = a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$$

дѣлится на p, такъ какъ и $a^2 + b^2$ и $x^2 + y^2$ дѣлятся на p. Но p есть простое число; поэтому оно должно быть дѣлителемъ одного изъ множителей $ax + by$ или $ax - by$. Мы можемъ предположить, что p дѣлитъ $ax + by$, такъ какъ въ противномъ случаѣ можно замѣнить y на $-y$.

Далѣе:

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = pm;$$

слѣдовательно, и $ax - by$ дѣлится на p, такъ какъ правая часть дѣлится

на p. Вслѣдствіе этого существуютъ два числа α и β, удовлетворяющія равенствамъ:

$$\begin{aligned} ax + by &= \alpha p, \mid a \quad b \\ bx - ay &= \beta p, \mid b \quad -a \end{aligned}$$

Помножая на приписанныхъ справа множителей, складывая и сокращая на p, получимъ:

$$\begin{aligned} x &= \alpha a + \beta b, \\ y &= \alpha b - \beta a. \end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что α и β не имѣютъ общихъ множителей, такъ какъ каждый ихъ общій множитель входилъ бы въ x и y, которыя мы предположили взаимно простыми.

Если мы возведемъ наши уравненія въ квадратъ и сложимъ, то получимъ:

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)(\alpha^2 + \beta^2),$$

что въ виду равенствъ (8) и (9) даетъ:

$$n = \alpha^2 + \beta^2,$$

что и требовалось доказать.

Примѣняя достаточное число разъ предложеніе 9, получимъ теорему:

10. Если число m разлагается правильно на два квадрата, то и каждый множитель числа m также допускаетъ правильное разложеніе.

Далѣе:

11. Первоначальное число p вида $4n + 1$ можетъ быть разложено на два квадрата только однимъ способомъ.

Допустимъ, что нѣкоторое число m вида $4n + 1$ разлагается на два квадрата (правильно или неправильно) двумя способами:

$$m = x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2. \tag{10}$$

Предположимъ, что числа x, y, x_1, y_1 положительны; оба разложенія не будутъ отличаться одно отъ другого какъ въ томъ случаѣ, если $x = x_1$, $y = y_1$; такъ и если $x = y_1$, $y = x_1$. Предположимъ, что число $x > x_1$; тогда $y < y_1$.

Обозначимъ черезъ δ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ $x - x_1$ и $y_1 - y$ и положимъ:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \delta\alpha, \\ y_1 &= y + \delta\beta, \end{aligned} \tag{11}$$

гдѣ α и β суть положительныя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей. Изъ равенствъ (10) получимъ:

$$(x_1+\delta\alpha)^2+y^2=(y+\delta\beta)^2+x_1^2,$$

или, сокращая на δ:

$$2\alpha x_1+\delta\alpha^2=2\beta y+\delta\beta^2;$$

общее значеніе этихъ двухъ выраженій есть число, дѣлящееся и на α и на β; такъ какъ α и β суть числа первыя между собою, то это число дѣлится на $\alpha\beta$ (§ 15); положимъ его поэтому равнымъ $\alpha\beta\gamma$, гдѣ γ, во всякомъ случаѣ, цѣлое положительное число. Тогда

$$\begin{aligned}2x_1&=\beta\gamma-\delta\alpha\\ 2y&=\alpha\gamma-\delta\beta;\end{aligned}\qquad(12)$$

а изъ уравненій (11) получимъ:

$$\begin{aligned}2x&=\beta\gamma+\delta\alpha\\ 2y_1&=\alpha\gamma+\delta\beta.\end{aligned}\qquad(13)$$

Здѣсь α, β, γ, δ четыре положительныхъ числа, изъ которыхъ ни одно не равно 0.

Изъ равенствъ (12) и (13) легко получить:

$$4(x^2+y^2)=\alpha^2\gamma^2+\delta^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\delta^2\alpha^2,$$

т. е.

$$m=\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)}{4}.\qquad(14)$$

Мы не погрѣшимъ противъ общности, если будемъ считать числа x и x_1 четными, а слѣдовательно, y и y_1 нечетными (п. 2). Тогда первое изъ равенствъ (11) обнаруживаетъ, что δ дѣлится на 2; такъ какъ α и β суть числа взаимно простыя и не могутъ быть одновременно четными, то равенство (12) обнаруживаетъ, что γ также представляетъ собой четное число. Слѣдовательно, $^1/_4(\gamma^2+\delta^2)$ есть цѣлое число, во всякомъ случаѣ большее 1 [12]). Вмѣстѣ съ тѣмъ $\alpha^2+\beta^2>1$ и m такимъ образомъ представляется въ видѣ произведенія двухъ множителей и поэтому не можетъ быть простымъ числомъ, что и требовалось доказать.

12. Если x и y суть числа взаимно простыя и $m=x^2+y^2$ есть нечетное составное число, то существуетъ еще одно раз-

---

[12]) Это число могло бы быть равно 1 только въ томъ случаѣ, если бы $\gamma=\delta=2$. Но тогда равенства (12) дали бы: $x_1=-y$, что невозможно, такъ какъ, по предположенію, x_1 и y суть положительныя числа.

ложеніе числа m на два квадрата.

Дѣйствительно, пусть $m = m_1 m_2$ и оба числа m_1 и m_2 больше 2. По теоремѣ 10 каждое изъ чиселъ m_1 и m_2 допускаетъ правильное разложеніе на два квадрата. Пусть

$$m_1 = x_1^2 + y_1^2, \; m_2 = x_2^2 + y_2^2; \tag{15}$$

положимъ далѣе:

$$x' = x_1 x_2 + y_1 y_2, \; x'' = x_1 x_2 - y_1 y_2.$$
$$y' = x_1 y_2 - y_1 x_2, \; y'' = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Возведя въ квадратъ и сложивъ, получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} x'^2 + y'^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = m_1 m_2 = m, \\ x''^2 + y''^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = m_1 m_2 = m; \end{array}\right\} \tag{16}$$

оба эти разложенія числа m тождественны только въ томъ случаѣ, когда $x' = \pm x''$ или $x' = \pm y''$. Первое соотношеніе было бы возможно только въ томъ случаѣ, если бы одно изъ чиселъ x_1, x_2, y_1, y_2 равнялось нулю; но тогда разложенія (15) не были бы правильными [13]). Изъ соотношенія же $x' = \pm y''$ слѣдовало бы:

$$(x_1 \pm y_1)(x_2 \pm y_2) = 0,$$

т. е. либо $x_1 = \pm y_1$, либо $x_2 = \pm y_2$. Это опять невозможно, такъ какъ разложенія (15) и въ этомъ случаѣ не были бы правильными. Оба разложенія (16), такимъ образомъ, отличны другъ отъ друга, и вмѣстѣ съ тѣмъ теорема 12 доказана. Нужно замѣтить, что разложенія (16) могутъ и не быть правильными.

§ 76. Разложеніе большихъ чиселъ на простыхъ множителей.

1. На основаніи того, что теоремы 11 и 12 § 75-го рѣзко различаютъ простыя и составныя числа вида $4n + 1$, можно построить пріемъ для рѣшенія вопроса, представляетъ ли собой данное число вида $4n + 1$ простое или составное число.

Пусть m будетъ число вида $4n + 1$, относительно котораго не установлено еще, простое оно или составное. Если m есть число простое, то оно единственнымъ способомъ разлагается на два квадрата:

$$m = x^2 + y^2: \tag{1}$$

[13]) Если, напримѣръ, $y_1 = 0$, то x_1 и y_1 не представляютъ собой взаимно простыхъ чиселъ.

если же m есть число составное, то оно либо совсѣмъ не разлагается на два квадрата, либо его можно представить въ этой формѣ нѣсколькими способами. Въ томъ случаѣ, когда такое разложеніе возможно, мы можемъ положить:

$$x^2 \leqslant y^2,$$

и тогда $$x^2 \leqslant {}^1/_2\, m; \tag{2}$$

далѣе изъ равенства (1) слѣдуетъ:

$$m - x^2 = y^2. \tag{3}$$

Остается подставить вмѣсто x всѣ числа, удовлетворяющія неравенству (2), и посмотрѣть, есть ли между ними такія, которыя дѣлаютъ разность $m - x^2$ квадратомъ, и сколько имѣется такихъ значеній. Если имѣется только одно такое число x, то m простое число; если же ихъ нѣтъ вовсе или если есть нѣсколько, то m есть составное число; въ послѣднемъ случаѣ, пользуясь разсужденіями § 75, 11, мы тотчасъ получимъ разложеніе числа m на двухъ множителей. Эйлеръ, которому мы обязаны этимъ пріемомъ, даетъ очень удобное правило для расположенія этихъ вычисленій. При этомъ полезно имѣть таблицу квадратовъ въ томъ видѣ, какъ она дана въ упомянутомъ уже выше „Собраніи математическихъ таблицъ" Вега—Гюльзе (стр. 135). И въ этомъ случаѣ съ помощью метода эксклюдентовъ можно значительно уменьшить число значеній x, подлежащихъ испытанію. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какое нибудь число e за эксклюдентъ и любой его неквадратичный вычетъ β; всѣ числа, удовлетворяющія сравненію:

$$m - x^2 \equiv \beta \pmod{e}$$

подлежатъ исключенію [14]).

2. Для примѣра возьмемъ число $m = 19\,109$. Здѣсь x нужно брать не больше 97, такъ какъ $2.98^2 = 19208$, т. е. больше m.

Число m имѣетъ видъ $8n + 1$. Если x дѣлится на 2, но не дѣлится на 4, то $m - x^2$ имѣетъ видъ $8n + 5$ и не можетъ быть квадратомъ, такъ какъ 5 есть неквадратичный вычетъ по модулю 8. Поэтому всѣ четныя числа, не дѣлящіяся на 4 можно выбросить изъ ряда значеній x.

Если x дѣлится на 3, то $m - x^2$ имѣетъ видъ $3n + 2$ [15]), а

---

[14]) Дѣйствительно, если при $x = \alpha$

$$m - \alpha^2 \equiv \beta \pmod{e},$$

то $m - \alpha^2$ не только не можетъ быть полнымъ квадратомъ, но не можетъ даже быть сравнимо съ полнымъ квадратомъ по модулю e.

[15]) Ибо такой видъ имѣетъ само число m.

такъ какъ 2 есть неквадратичный вычетъ по модулю 3, то нужно выбросить числа, дѣлящіяся на 3.

Эксклюдентъ 5 приводитъ къ исключенію чиселъ $x \equiv 1, 4 \pmod{5}$. Если тѣмъ же способомъ использовать 7, 11, 13, то окажется, что исключенію подлежатъ также числа:

$$x \equiv 0, \pm 1 \pmod{7}$$
$$x \equiv 0, \pm 4, \pm 5 \pmod{11}$$
$$x \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 6 \pmod{13};$$

испытанію подлежатъ, такимъ образомъ, только числа 10, 23, 47, 65.

Составимъ табличку:

x	x^2	$m - x^2$
10	100	19 009
23	529	18 580
47	2209	16 900
65	4225	14 884.

Въ послѣдней колоннѣ нужно найти полные квадраты. Съ перваго взгляда мы видимъ, что нужно еще выбросить число 18 580, которое дѣлится на 5, но не дѣлится на 25 и потому не можетъ быть полнымъ квадратомъ. Между остальными содержатся квадраты:

$$16\,900 = 130^2, \quad 14\,884 = 122^2.$$

Соотвѣтствующія разложенія даютъ:

$$19\,109 = 47^2 + 130^2 = 65^2 + 122^2.$$

Итакъ, 19 109 не простое число.

Чтобы найти его разложеніе на множителей по § 75, 11, положимъ:

$$x = 65, \quad y = 122, \quad x_1 = 47, \quad y_1 = 130,$$
$$x = x_1 + 2 \,.\, 9,$$
$$y_1 = y + 2 \,.\, 4,$$
$$\alpha = 9, \quad \beta = 4;$$

одинъ изъ множителей есть:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 81 + 16 = 97.$$

Другой находимъ дѣленіемъ:

$$19\,109 = 97 \,.\, 197.$$

Тѣмъ же путемъ можно показать, напримѣръ, что

$$2^{16}+1=65\,537$$

есть простое число, такъ какъ оно можетъ быть разложено на два квадрата только однимъ способомъ:

$$256^2+1.$$

3. Къ послѣднему результату можно придти еще другимъ путемъ. Число вида 2^n+1 навѣрное не представляетъ собой простого числа, если показатель n не есть степень числа 2. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $n=2^{\lambda}m$, гдѣ m уже нечетное число. При всякомъ m мы имѣемъ (§ 58):

$$1-x^m=(1-x)(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{m-1}).$$

Если мы здѣсь положимъ $x=-2^{2^{\lambda}}$, то мы получимъ, что $1+2^n$ дѣлится на $1+2^{2^{\lambda}}$; это же число меньше, чѣмъ $1+2^n$, если $m>1$.

Итакъ, положимъ, что $n=2^{\lambda}$, и изслѣдуемъ, представляетъ ли собой $1+2^n$ простое число или составное.

Чтобы найти простыя числа, которыя входятъ въ составъ числа 2^n+1, достаточно производить испытанія посредствомъ дѣленія вплоть до наибольшаго простого числа, которое меньше $2^{\frac{1}{2}n}$. Если 2^n+1 дѣлится на p, то

$$2^n\equiv-1,\quad 2^{2n}\equiv1\pmod{p}. \tag{4}$$

Пусть f будетъ наименьшій положительный показатель, при которомъ $2^f\equiv1$; если тогда $2^g\equiv1$, то g должно дѣлиться на f (§ 68,2). Въ нашемъ случаѣ, слѣдовательно, $2n$ должно дѣлиться на f, а потому f должно быть степенью числа 2. Но сравненія (4) обнаруживаютъ, что f не можетъ быть меньше $2n$, а потому $f=2n$.

Съ другой стороны, по теоремѣ Фермата, $2^{p-1}\equiv1$, а потому p-1 должно дѣлиться на $2n$.

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующую теорему:

Каждый простой дѣлитель числа 2^n+1 имѣетъ видъ $p=2nx+1$, гдѣ x есть цѣлое число.

4. Для числа $2^{16}+1=65\,537$ испытанію подлежатъ только простыя числа, которыя меньше $2^8=256$. Но между послѣдними имѣются только два, а именно 97 и 193, которыя имѣютъ видъ $32x+1$; такъ какъ $2^{16}+1$ ни на одно изъ этихъ двухъ чиселъ не дѣлится, то оно представляетъ собой простое число.

5. Для числа $2^{32}+1$ нужно испытать въ качествѣ дѣлителей простыя числа вида $64x+1$, которыя меньше 65 536. Первыя 5 изъ этихъ

простыхъ чиселъ суть:

$$193,\ 257,\ 449,\ 577,\ 641;$$

такъ какъ дѣленіе на 641 совершается нацѣло, то вопросъ рѣшенъ. Этимъ путемъ Эйлеръ нашелъ разложеніе:

$$2^{32}+1=4\,294\,967\,297=641 \, . \, 6\,700\,417$$

и такимъ образомъ опровергъ предположніе Фермата, что всякое число вида $2^{2^{\lambda}}+1$ есть простое число.

§ 77. Совершенныя числа.

1. Если извѣстно разложеніе какого нибудь числа m на простыхъ множителей, то легко найти всѣхъ возможныхъ дѣлителей этого числа. Чтобы это показать, положимъ, что $a, b, c, \ldots$ суть всѣ различные простые множители числа m, а $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, показатели наивысшихъ степеней, въ которыхъ эти простые множители входятъ въ составъ числа m. Итакъ:

$$m=a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots,$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ цѣлыя положительныя числа. Каждый дѣлитель числа m содержитъ только тѣхъ простыхъ множителей, которые входятъ въ m, и при томъ въ степеняхъ, соотвѣтственно не выше $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Всѣ дѣлители d числа m содержатся такимъ образомъ въ формулѣ:

$$d=a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots$$

гдѣ числа $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ могутъ быть и нулями, но во всякомъ случаѣ не превосходятъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Такъ напримѣръ, α' можетъ имѣть одно изъ значеній: $0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha$. Обратно, всякое число такого вида есть дѣлитель числа m. Среди этихъ дѣлителей нужно считать 1, получающуюся изъ нашей формулы при $\alpha'=0$, $\beta'=0$, $\gamma'=0, \ldots$, и m, при $\alpha'=\alpha$, $\beta'=\beta$, $\gamma'=\gamma, \ldots$

Число всѣхъ значеній, которыя можетъ принимать α', есть $\alpha+1$, число значеній β' есть $\beta+1$ и т. д. Такъ какъ всѣ эти значенія могутъ соединяться между собой, то число всѣхъ дѣлителей числа m есть

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \ldots;$$

это число не зависитъ отъ простыхъ множителей $a, b, c, \ldots$, а только отъ показателей $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Такъ для примѣра, число дѣлителей числа $360=8 \cdot 9 \cdot 5=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ равно $(3+1)(2+1)(1+1)=24$. Такъ же велико число дѣлителей числа $5^3 \cdot 7^2 \cdot 2=10\,250$.

2. Въ тѣсной связи съ предыдущей задачей стоитъ задача объ опре-

дѣленіи суммы всѣхъ дѣлителей числа m. Мы рѣшимъ ее рекуррентнымъ способомъ. Пусть

$$m = a^{\alpha} m',$$

гдѣ $m' = b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$, есть частное, полученное при дѣленіи m на a^{α}. Среди дѣлителей d числа m находятся непремѣнно всѣ дѣлители d' числа m' и, кромѣ того, всѣ произведенія: ad', a^2d', a^3d', $\ldots$, $a^{\alpha}d'$. Этимъ исчерпываются всѣ дѣлители числа m. Обозначимъ черезъ $S(m)$ сумму всѣхъ дѣлителей числа m.

Тогда

$$S(m') = (1 + a + a^2 + \cdots + a^{\alpha})\, S(m').$$

Съ другой стороны, какъ мы видѣли выше (§ 58),

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{\alpha} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1};$$

слѣдовательно,

$$S(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}\, S(m').$$

Примѣнимъ эту формулу къ $S(m')$; полагая $m' = b^{\beta} m''$, получимъ:

$$S(m') = \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}\, S(m'')$$

Это разсужденіе мы можемъ продолжать, пока не исчерпаемъ всѣхъ простыхъ множителей числа m. Въ результатѣ, такъ какъ $S(1) = 1$, получимъ:

$$S(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1}$$

Съ правой стороны будетъ столько множителей, сколько простыхъ множителей a, b, c, $\ldots$ входитъ въ число m. Эти множители правой части только по виду представляются дробями; на самомъ же дѣлѣ

$$\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{\alpha}$$

есть цѣлое число.

Примѣръ:

$$S(360) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170.$$

3. Всѣхъ дѣлителей числа m, которые отличны отъ самого числа m,

называютъ правильными дѣлителями его. Сумма такихъ дѣлителей, очевидно, равна $S(m) - m$. Число, равное суммѣ своихъ правильныхъ дѣлителей, называется совершеннымъ*). Таковы:

$$6 = 2 + 3 + 1, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Совершенное число опредѣляется условіемъ $S(m) - m = m$, или

$$S(m) = 2m. \qquad (1)$$

Разсмотримъ сначала четныя совершенныя числа и положимъ для этого

$$m = 2^{n-1} a,$$

гдѣ a есть нечетное цѣлое число и $n > 1$. Принимая въ соображеніе п. 2, мы представимъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$(2^n - 1)\, S(a) = 2^n a;$$

такъ какъ $2^n - 1$ есть число нечетное, то $S(a)$ должно дѣлиться на 2^n.

Положимъ:

$$S(a) = 2^n \theta, \qquad (2)$$

гдѣ θ есть цѣлое число; тогда

$$a = \theta(2^n - 1); \qquad (3)$$

слѣдовательно, θ должно быть дѣлителемъ числа a. Изъ соотношеній (2) и (3) слѣдуетъ:

$$S(a) = a + \theta.$$

Итакъ, a и θ суть дѣлители числа a, сумма же всѣхъ дѣлителей числа a равна $a + \theta$; слѣдовательно, a имѣетъ только двухъ дѣлителей a и θ. Но каждое число имѣетъ по крайней мѣрѣ двухъ дѣлителей 1 и самого себя. Значитъ $\theta = 1$, а a есть простое число, которое, въ виду равенства (3), имѣетъ видъ:

$$a = 2^n - 1.$$

*) Совершенными числами (τέλειοι ἀριθμοί) много занимались въ древности, особенно Пиѳагорейцы. У Евклида („Elementa", книга IX, 36) есть теорема, которая содержитъ почти все, что мы и теперь знаемъ объ этихъ числахъ. Самая постановка вопроса представляется нѣсколько произвольной. Интересъ заключается только въ трудности нахожденія такихъ чиселъ и въ связи этихъ чиселъ съ нѣкоторыми большими простыми числами. То же можно сказать о такъ называемыхъ союзныхъ числахъ (numeri amicabiles); подъ этимъ названіемъ разумѣютъ пары чиселъ, каждое изъ которыхъ равно суммѣ правильныхъ дѣлителей другого, напр. 220 и 284). Изслѣдованіемъ такихъ чиселъ занимался Эйлеръ („Commentationes arithmeticae", томъ I, стр. 102).

Обратно, если выполняются эти условія, то число $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ удовлетворяетъ равенству (1), т. е. m есть совершенное число. Мы получимъ, такимъ образомъ, слѣдующую теорему:

4. Четное число m въ томъ и только въ томъ случаѣ представляетъ собою совершенное число, если оно имѣетъ видъ:

$$m = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

и если при этомъ $2^n - 1$ есть число простое.

Нечетнаго совершеннаго числа мы не знаемъ ни одного; но до сихъ поръ не доказано, что ихъ не существуетъ.

5. Для нахожденія совершенныхъ чиселъ остается найти показателей n, при которыхъ $2^n - 1$ представляетъ собой простое число. Для этого прежде всего требуется, чтобы само n было простымъ числомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы $n = ab$, гдѣ и a и b больше 1, то тождество

$$2^{ab} - 1 = (2^b - 1)(1 + 2^b + 2^{2b} + \cdots + 2^{(a-1)b})$$

(по формулѣ суммы геометрической прогрессіи) показывало бы, что $2^{ab} - 1$ не простое число, такъ какъ оба множителя правой части больше 1.

До сихъ поръ изъ простыхъ чиселъ вида $2^n - 1$ опредѣлены слѣдующія девять:

$$2^2 - 1 = 3,$$
$$2^3 - 1 = 7,$$
$$2^5 - 1 = 31,$$
$$2^7 - 1 = 127,$$
$$2^{13} - 1 = 8\,191,$$
$$2^{17} - 1 = 131\,071,$$
$$2^{19} - 1 = 524\,287,$$
$$2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647,$$
$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951.$$

Послѣднее изъ этихъ чиселъ $2^{61} - 1$, какъ уже упомянуто выше, есть наибольшее изъ извѣстныхъ простыхъ чиселъ.

Показатель 11 не даетъ простого числа, такъ какъ $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$.

ГЛАВА XV.

Непрерывныя дроби.

§ 78. Обращеніе ирраціональныхъ чиселъ въ непрерывныя дроби.

1. Если x есть произвольное раціональное или ирраціональное, положительное или отрицательное число, то всегда существуетъ одно опредѣленное наибольшее цѣлое число, содержащееся въ q, т. е. наибольшее цѣлое число, не превосходящее x. Это число, очевидно, удовлетворяетъ условію:

$$q \leq x < q + 1.$$

Если x есть число отрицательное, то и q отрицательно; если x есть положительная правильная дробь, то $q = 0$: если $x > 1$, то q есть положительное цѣлое число. Если x не равно q, то можно положить:

$$x = q + \frac{1}{x_1},$$

гдѣ $\frac{1}{x_1} < 1$, т. е. $x_1 > 1$. Поступимъ съ x_1 такъ же, какъ мы поступили съ x, и обозначимъ черезъ q_1 наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x_1, которое теперь уже, во всякомъ случаѣ, есть число положительное. Тогда

$$x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2};$$

здѣсь x_2 опять больше 1. Мы можемъ написать теперь:

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{x_2}}. \qquad (1)$$

Поступая такимъ образомъ, построимъ алгориѳмъ:

$$
\begin{aligned}
x &= q + \frac{1}{x_1}, \\
x_1 &= q_1 + \frac{1}{x_2}, \\
x_2 &= q_2 + \frac{1}{x_3}, \\
&\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= q_{n-1} + \frac{1}{x_n},
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

который можно продолжать до тѣхъ поръ, пока x_n само не представляетъ собою цѣлаго числа. Если подставимъ каждое x_k въ предыдущее выраженіе для x_{k-1}, то въ результатѣ мы выразимъ число x въ видѣ непрерывной дроби. Выраженіе (1) служитъ примѣромъ такой дроби. Значеніе дроби существенно зависитъ только отъ ряда чиселъ $q, q_1, q_2, \ldots$, который опредѣляется вполнѣ природой числа x.

2. Если x есть раціональное число, то и $x_1, x_2, \ldots$ тоже представляютъ собой раціональныя числа. Если положимъ $x = a/a_1$, то $x_1 = a_1/a_2$, гдѣ q будетъ частное, а a_2—остатокъ отъ дѣленія a на a_1. Алгориѳмъ (2) въ этомъ случаѣ совпадаетъ съ Евклидовымъ алгориѳмомъ (§ 15). Если же x есть число ирраціональнное, то и всѣ послѣдующія числа $x_1, x_2, \ldots$ ирраціональны; ни одно x_n не можетъ быть цѣлымъ числомъ и въ этомъ случаѣ алгориѳмъ (2) можно продолжать безъ конца.

Разсмотримъ случай, когда x есть число ирраціональное, сверхъ того положимъ $x > 1$; тогда всѣ числа $q, q_1, q_2, \ldots$ будутъ положительны.

3. Изъ чиселъ $q, q_1, q_2, \ldots$ мы образуемъ рядъ новыхъ чиселъ R_n съ помощью рекуррентной формулы:

$$R_n = R_{n-1}\, q_{n-1} + R_{n-2}.$$

Начнемъ съ $n = 1$ и предположимъ, что числа R_{-1}, R_0 заданы произвольно. Если только извѣстны всѣ числа q_n, то изъ нашей формулы можно однозначно опредѣлить числа $R_1, R_2, R_3, \ldots$

Мы припишемъ числамъ R_0 и R_{-1} двѣ пары частныхъ значеній; числа R, соотвѣтствующія первой парѣ значеній, обозначимъ черезъ:

$$P_{-1},\ P_0,\ P_1,\ P_2, \ldots, \qquad (\alpha)$$

числа же, соотвѣтствующія второй парѣ значеній R_0 и R_{-1}, обозначимъ черезъ:

$$Q_{-1},\ Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots \qquad (\beta)$$

Мы положимъ:

$$P_{-1} = 0,\ P_0 = 1, \qquad (3)$$
$$Q_{-1} = 1, Q_0 = 0;$$

для обоихъ рядовъ мы будемъ, слѣдовательно, имѣть формулы:

$$P_n = P_{n-1}\, q_{n-1} + P_{n-2}, \qquad (4)$$
$$Q_n = Q_{n-1}\, q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

Такъ, напримѣръ:

$$P_1 = q,\ Q_1 = 1,$$
$$P_2 = qq_1 + 1,\ Q_2 = q.$$

Общее же выраженіе для R_n мы можемъ представить съ помощью P_n и Q_n въ формѣ $R_n = aP_n + bQ_n$, гдѣ a и b произвольныя числа, не зависящія отъ n [1]). Въ § 70 мы встрѣчали уже точно такіе же ряды чиселъ P_n и Q_n, только теперь мы представляемъ себѣ эти ряды, продолжающимися безъ конца.

4. Числа P_n, Q_n находятся въ тѣсной связи съ алгориѳмомъ (2)

Мы встрѣтимся съ этими числами, если постараемся выразить x черезъ x_n, исключая промежуточныя числа $x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1}$.

Именно, можно показать, что

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}. \qquad (5)$$

Эта формула при $n = 0$ даетъ:

$$x = \frac{P_0 x_0 + P_{-1}}{Q_0 x_0 + Q_{-1}} = x_0,$$

[1]) Авторъ хочетъ сказать слѣдующее. Фиксировавъ двумя способами числа R_0 и R_{-1}, мы получимъ два ряда чиселъ (α) и (β). Выбравъ теперь какъ нибудь иначе числа R_{-1} и R_0, мы получимъ новый рядъ чиселъ R_n; но въ этомъ случаѣ всегда $R_n = aP_n + bQ_n$, гдѣ a и b суть нѣкоторыя числа, не зависящія отъ n. Это, въ сущности, уже доказано въ § 70, 8; мы предоставляемъ читателю убѣдиться въ этомъ самому, тѣмъ болѣе, что это для дальнѣйшаго значенія не имѣетъ-

при $n = 1$

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_0}{Q_1 x_1 + Q_0} = q + \frac{1}{x_1}.$$

Такимъ образомъ, если мы будемъ подъ x_0 разумѣть то же, что и подъ x, то формула (5) при $n = 0$ и $n = 1$ справедлива. Положимъ, что она справедлива, если замѣнить n черезъ $n - 1$, т. е. что

$$x = \frac{P_{n-1} x_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1} x_{n-1} + Q_{n-2}};$$

если теперь, согласно послѣдней изъ формулъ (2), сдѣлаемъ подстановку $x_{n-1} = q_{n-1} + \frac{1}{x_n}$ и помножимъ числителя и знаменателя нашей дроби на x_n, то получимъ соотношеніе (5), которое, такимъ образомъ, доказано въ общемъ видѣ.

5. Помножая первое изъ равенствъ (4) на Q_{n-1}, второе на $-P_{n-1}$ и складывая ихъ, получимъ:

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}).$$

Это значитъ, что $(-1)^n (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})$ не зависитъ отъ n. Но такъ какъ для $n = 0$ значеніе этой величины есть 1, то и вообще

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n. \qquad (6)$$

Послѣднее соотношеніе имѣетъ большое значеніе

Прежде всего мы отсюда заключаемъ, что цѣлыя числа P_n и Q_n не имѣютъ общихъ дѣлителей: такой дѣлитель долженъ былъ бы дѣлить ± 1.

6. Такъ какъ, въ силу нашего предположенія ($x > 1$) $q, q_1, q_2, \ldots$, суть цѣлыя и положительныя числа, то, въ виду соотношеній (4), P_n и Q_n также представляютъ собою цѣлыя и положительныя числа: они составлены изъ чиселъ q посредствомъ дѣйствій сложенія и умноженія.

Изъ соотношеній (4) слѣдуетъ далѣе, что

$$P_n > P_{n-1}, \quad Q_n > Q_{n-1}. \qquad (7)$$

Такъ какъ P_n и Q_n суть цѣлыя числа, то мы отсюда заключаемъ, что они возрастаютъ неограниченно вмѣстѣ съ n. Если $q = 1$, то $P_0 = P_1$, $Q_1 = Q_2$; возрастаніе начинается съ P_1 и Q_2; для большихъ значеній n возможность равенства исключается, въ виду соотношеній (7). Наростаніе отъ P_{n-1} къ P_n и отъ Q_{n-1} къ Q_n тѣмъ сильнѣе, чѣмъ больше соотвѣтствующее число q_{n-1}.

§ 79. Приближенное выраженіе ирраціональныхъ чиселъ при помощи раціональныхъ дробей.

1. Изъ формулъ (5) и (6) § 78 получаемъ:

$$\frac{P_n}{Q_n} - x = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}} = \tag{1}$$

$$= \frac{P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n x_n + Q_{n-1})},$$

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}}, \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_{n-2}}, \tag{2}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^{n+1}(Q_n - Q_{n-2})}{Q_n Q_{n-1} Q_{n-2}}. \tag{3}$$

Изъ этого можно вывести слѣдующія заключенія.

2. Изъ равенствъ (1) слѣдуетъ, что раціональная дробь P_n/Q_n больше x, если n есть четное число, и меньше x, если n нечетное число.

3. Такъ какъ $Q_n - Q_{n-2}$ есть положительное число, то изъ равенства (3) слѣдуетъ, что дроби

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \quad \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}, \quad \frac{P_{2n+4}}{Q_{2n+4}}, \ldots \tag{4}$$

образуютъ рядъ убывающихъ чиселъ, а дроби

$$\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}, \quad \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad \frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}, \ldots \tag{5}$$

образуютъ рядъ возрастающихъ чиселъ. Согласно п. 2, члены перваго ряда больше x, члены второго меньше x.

4. Изъ равенствъ (2) слѣдуетъ, что разности между двумя соотвѣтствующими членами рядовъ (4) и (5) становятся меньше всякой данной величины, такъ какъ Q_n неограниченно возрастаетъ. Слѣдовательно, x представляетъ собой въ одно и то же время нижнюю границу перваго ряда и верхнюю границу второго.

Дробь $\dfrac{P_n}{Q_n}$ называется поэтому **подходящей** дробью къ непрерывной дроби x.

5. Подходящія дроби служатъ для выраженія приближенныхъ зна-

ченій ирраціональныхъ чиселъ (или раціональныхъ, выражающихся съ помощью оченъ большихъ чиселъ) при помощи раціональныхъ дробей съ небольшими числителями и знаменателями. Въ этомъ отношеніи имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Если между двумя послѣдовательными подходящими дробями заключена другая раціональная дробь M/N, которая подходитъ, слѣдовательно, къ x ближе, чѣмъ одна изъ подходящихъ дробей, то N больше, чѣмъ Q_n.

Дѣйствительно, если M/N заключается между P_{n-1}/Q_{n-1} и P_n/Q_n, то разности

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\quad \frac{M}{N}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ (положительный при четномъ n, отрицательный при нечетномъ), по абсолютной же величинѣ первая разность больше второй. Поэтому

$$(-1)^n\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)>(-1)^n\left(\frac{M}{N}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)>0,$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ (§ 78, (6))

$$\frac{1}{Q_nQ_{n-1}}>(-1)^n\frac{MQ_{n-1}-NP_{n-1}}{NQ_{n-1}}>0,$$

откуда

$$N>(-1)^nQ_n(MQ_{n-1}-NP_{n-1});$$

а такъ какъ $(-1)^n(MQ_{n-1}-NP_{n-1})$ есть цѣлое положительное число, т. е. по меньшей мѣрѣ 1, то $N>Q_n$, что и требовалось доказать.

Если считать болѣе простой дробь съ меньшимъ знаменателемъ, то предыдущая теорема обнаруживаетъ, что всякая дробь, стоящая къ x ближе подходящей, менѣе проста, чѣмъ эта подходящая.

Для примѣра возьмемъ число

$$\pi=3,14159265359\ .$$

съ помощью простого дѣленія получимъ:

$$q=3,\ q_1=7,\ q_2=15,\ q_3=1,$$

что даетъ подходящія дроби

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{3}{1},\quad \frac{P_1}{Q_1}=\frac{22}{7},\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{333}{106},\quad \frac{P_3}{Q_3}=\frac{355}{113}.$$

Для сравненія обратимъ эти раціональныя дроби опять въ десятичныя:

$$\frac{22}{7} = 3,14285\ .$$

$$\frac{333}{106} = 3,141509$$

$$\frac{355}{113} = 3,14159292\ \ldots\ ^{*})$$

§ 80. Обращеніе квадратныхъ корней въ непрерывныя дроби.

1. Посмотримъ, какъ обращаются въ непрерывныя дроби простѣйшія ирраціональныя числа, именно квадратные корни. Подъ D будемъ разумѣть цѣлое положительное число, не представляющее собой полнаго квадрата. Каждое равенство, содержащее, кромѣ раціональныхъ чиселъ, только $\sqrt{D}$, влечетъ за собою другое равенство, которое получается изъ перваго, если замѣнить $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$. Въ самомъ дѣлѣ, такое равенство всегда можно привести къ виду $A + B\sqrt{D} = 0$; но это равенство возможно только въ томъ случаѣ, когда $A = B = 0$, ибо иначе мы получимъ раціональное значеніе для $\sqrt{D}$, именно $-\frac{A}{B}$, что, согласно § 22, 1, не можетъ имѣть мѣста; а потому и $A - B\sqrt{D} = 0$.

2. Приложимъ алгориѳмъ § 78 (2) къ числу $x = \sqrt{D}$.

Если q есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ $\sqrt{D}$, то

$$0 < \sqrt{D} - q < 1;$$

а $\frac{1}{x_1} = \sqrt{D} - q$; отсюда:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - q} = \frac{\sqrt{D} + q}{D - q^2};$$

если же положимъ.

$$q = b_1,\ D - b_1^2 = c_1,$$

$^{*})$ Это прекрасное приближеніе $\left(\frac{355}{113}\right)$ дано Адріаномъ Антоніемъ изъ Меца (Adriaen Antonisz aus Metz. 1517—1601). Какимъ образомъ онъ нашелъ это число, въ точности не извѣстно. Въ іюньской тетради журнала „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" за 1905 г. Гарцеръ (Harzer) въ статьѣ „О точныхъ наукахъ въ древней Японіи" даетъ 27 первыхъ подходящихъ дробей для числа π и 8 первыхъ подходящихъ для числа π^2; онъ указываетъ при этомъ, что у японскихъ авторовъ XVII и XVIII столѣтія встрѣчаются 12-ая и 27-ая подходящія дроби.

то

$$x_1 = \frac{\sqrt{D}+b_1}{c_1}.$$

Если q_1 есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x_1, то изъ равенства $x_1 = q_1 + 1/x_2$ слѣдуетъ:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1} = \frac{c_1}{\sqrt{D}-(c_1q_1-b_1)} = \frac{\sqrt{D}+b_2}{c_2};$$ [2])

такъ какъ $D = b_1^2 + c_1$, то здѣсь

$$b_2 = c_1q_1 - b_1,$$

$$c_2 = \frac{D - b_2^2}{c_1} = 1 - c_1q_1^2 + 2b_1q_1,$$

$$D - b_2^2 = c_1c_2.$$

3. Положимъ, что соотношенія

$$x_n = \frac{\sqrt{D}+b_n}{c_n} \text{ и } D - b_n^2 = c_{n-1}\,c_n, \qquad (1)$$

гдѣ b_n, c_{n-1} и c_n суть цѣлыя числа, оказались справедливыми для нѣкотораго опредѣленнаго n. Докажемъ, что въ этомъ случаѣ и для x_{n+1} будетъ существовать такая же формула. Пусть q_n наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x_n; тогда

$$x_n = q_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

и поэтому

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - q_n} = \frac{c_n}{\sqrt{D} - (c_nq_n - b_n)}.$$

---

[2]) Умножая въ выраженіи

$$\frac{c_1}{\sqrt{D}-(c_1q_1-b_1)}$$

числителя и знаменателя на $\sqrt{D}+(c_1q_1-b_1)$, получимъ:

$$\frac{c_1[\sqrt{D}+(c_1q_1-b_1)]}{D-b_1^2+2c_1q_1b_1-c_1^2q_1^2},$$

раздѣляя здѣсь числителя и знаменателя на c_1, мы приведемъ выраженіе къ указанному виду, гдѣ b_2 и c_2 имѣютъ значенія, приведенныя ниже въ текстѣ.

Положимъ:

$$c_n q_n - b_n = b_{n+1}; \qquad (2)$$

тогда

$$x_{n+1} = \frac{c_n(\sqrt{D}+b_{n+1})}{D-b_{n+1}^2};$$

но

$$D - b_{n+1}^2 = D - b_n^2 - c_n^2 q_n^2 + 2b_n c_n q_n;$$

и если положить:

$$c_{n-1} + 2b_n q_n - c_n q_n^2 = c_{n+1}, \qquad (3)$$

то получимъ:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{D}+b_{n+1}}{c_{n+1}}, \quad D - b_{n+1}^2 = c_{n+1} c_n.$$

Мы такимъ образомъ доказали формулу (1) въ общемъ видѣ.

4. Изъ выраженій x_1, b_1, c_1 въ пунктѣ 2 слѣдуетъ неравенство:

$$0 < \frac{\sqrt{D}-b_1}{c_1} < 1 < \frac{\sqrt{D}+b_1}{c_1}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $x_1 > 1$ [3]), а $\sqrt{D}-b_1 = \sqrt{D}-q$ по опредѣленію числа q есть положительная правильная дробь; такъ какъ c_1 есть цѣлое положительное число, т. е. по крайней мѣрѣ $= 1$, то $(\sqrt{D}-b_1)/c_1$ есть положительная правильная дробь.

Допустимъ, что неравенства

$$0 < \frac{\sqrt{D}-b_n}{c_n} < 1 < \frac{\sqrt{D}+b_n}{c_n} \qquad (4)$$

доказаны для какого нибудь значенія числа n. Если мы въ этомъ предположеніи докажемъ его справедливость для $n+1$, то мы этимъ самымъ докажемъ его для всякаго n. Съ одной стороны,

$$\frac{\sqrt{D}+b_{n+1}}{c_{n+1}} = x_{n+1} > 1;$$

[3]) А поэтому и $\frac{\sqrt{D}+b_1}{c_1} > 1$.

слѣдовательно, одно изъ этихъ неравенствъ доказано. Съ другой стороны,

$$\frac{\sqrt{D}-b_{n+1}}{c_{n+1}}=\frac{D-b_{n+1}^2}{c_{n+1}(\sqrt{D}+b_{n+1})}=\frac{c_n}{\sqrt{D}+c_nq_n-b_n}=$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{D}-b_n}{c_n}+q_n}.$$

Мы предположили справедливость неравенствъ (4); слѣдовательно, $(\sqrt{D}-b_n)/c_n)$ есть положительное число, а такъ какъ q_n, по меньшей мѣрѣ, равняется 1, то и

$$0<\frac{1}{\frac{\sqrt{D}-b_n}{c_n}+q_n}<1.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$0<\frac{\sqrt{D}-b_{n+1}}{c_{n+1}}<1<\frac{\sqrt{D}+b_{n+1}}{c_{n+1}}.$$

Неравенства (4) доказаны такимъ образомъ для всякаго n.

5. Если положимъ:

$$x_n=\frac{\sqrt{D}+b_n}{c_n},\quad x'_n=\frac{\sqrt{D}-b_n}{c_n}, \tag{5}$$

то

$$x_n=q_n+\frac{1}{x_{n+1}},\quad x'_n=-q_n+\frac{1}{x'_{n+1}};$$

второе изъ этихъ равенствъ получается изъ перваго, если замѣнить $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$ [*]) (п. 1).

Такъ какъ x_n, x_{n+1} суть неправильныя дроби, а x'_n, x'_{n+1}, въ силу неравенствъ (4), представляютъ собой правильныя дроби, то q_n есть наи-

*) Это становится очевиднымъ, если примемъ во вниманіе, что x_n переходитъ въ x'_n, если мы замѣнимъ $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$.

большее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{1}{x'_{n+1}}$ [5]), q_{n-1} есть наибольшее цѣлое число, заключающееся въ $\frac{1}{x'_n}$. При данномъ D цѣлыя числа q_n и q_{n-1}, а слѣдовательно и x_{n+1} и x_{n-1}, однозначно опредѣляются числомъ x_n, т. е. числами b_n и c_n. [6])

6 Неравенства (4) показываютъ, что b_n и c_n суть положительныя числа. Въ самомъ дѣлѣ, они должны имѣть одинаковые знаки, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы бы имѣли:

$$\frac{\sqrt{D}-b_n}{c_n} > \frac{\sqrt{D}+b_n}{c_n}, \text{ [7]}$$

что противорѣчитъ неравенству (4); кромѣ того, оба числа не могутъ быть одновременно отрицательными, такъ какъ тогда и число $(\sqrt{D}-b_n):c_n$ было бы отрицательнымъ, что опять таки противорѣчитъ неравенствамъ (4). Далѣе тѣ же неравенства (4) даютъ:

$$0 < b_n < \sqrt{D},\ c_n < \sqrt{D}+b_n,\ 0 < c_n < 2\sqrt{D}.$$

Но такъ какъ b_n и c_n суть цѣлыя числа, то мы отсюда заключаемъ, что существуетъ только конечное число значенiй, которыя они могутъ принимать; вмѣстѣ съ тѣмъ и число x_n имѣетъ только конечное число значенiй. Слѣдовательно, въ ряду чиселъ

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (6)$$

мы должны встрѣтить повторяющiеся члены.

Если же $x_k = x_{k+n}$, то по пункту 5 и

$$x_{k-1} = x_{k+n-1},\ x_{k+1} = x_{k+n+1}$$

[5]) Ибо предыдущее равенство обнаруживаетъ, что обѣ разности

$$x_n - q_n \text{ и } \frac{1}{x'_{n+1}} - q_n$$

суть правильныя положительныя дроби.

[6]) *Если даны числа* b_n *и* c_n, *то равенство (5) опредѣляетъ числа* x_n *и* x'_n, *а* слѣдовательно, и наибольшiя цѣлыя числа, содержащiяся въ x_n и въ $\frac{1}{x'_n}$.

[7]) Ибо разность между лѣвой и правой частью $-\frac{2b_n}{c_n}$ была бы положительнымъ числомъ.

и, слѣдовательно, первымъ долженъ повториться членъ $x_1 = x_{n+1}$. Отсюда слѣдуетъ, что $x_2 = x_{n+2}$, $x_3 = x_{n+3} \ldots$; рядъ (6) распадается на періоды:

$$\left[x_1, x_2, \ldots x_n\right], \qquad (7)$$

въ которыхъ уже ни одинъ членъ не появляется больше одного раза. Рядъ (6) такимъ образомъ составленъ изъ безконечно повторяющихся періодовъ. Слѣдовательно, и рядъ

$$q_1, q_2, q_3, \ldots \qquad (8)$$

также состоитъ изъ періодовъ:

$$\left[q_1, q_2, q_3, \ldots q_n\right]. \qquad (9)$$

Замѣтимъ, что въ періодѣ (9) среди чисель q одно и то же число можетъ повторяться нѣсколько разъ [8]). Мы приходимъ, такимъ образомъ, къ слѣдующему выводу:

Непрерывная дробь, въ которую обращается квадратный корень изъ положительнаго цѣлаго числа, періодична. Періодъ начинается, однако, всегда съ q_1 [9]).

---

[8]) Въ періодѣ (7) всѣ числа различны; q_i есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ x_i; ясно, что x_i и x_j могутъ быть и не равны, хотя въ нихъ и содержится одно и то же наибольшее цѣлое число.

[9]) Чтобы лучше выяснить это довольно сложное доказательство, укажемъ еще разъ общій ходъ разсужденія. Авторъ разлагаетъ число $x = \sqrt{D}$ въ непрерывную дробь, слѣдуя общему правилу, указанному въ § 78, 1. Далѣе онъ обнаруживаетъ, что всѣ полныя частныя x_n могутъ быть всегда представлены въ видѣ (1), гдѣ b_n и c_n суть цѣлыя числа (п. 3). Далѣе доказывается, что каждое число x_n опредѣляетъ однозначно какъ послѣдующее число x_{n+1}, такъ и предыдущее число x_{n-1}. Если поэтому повторится число x_i, то вслѣдъ за нимъ должно повториться число x_{i+1}, а до него должно было повториться число x_{i-1}. Остается поэтому доказать, что въ ряду (6) съ возрастаніемъ индекса непремѣнно повторяется одно изъ бывшихъ уже чисель. Для этого авторъ доказываетъ, что b_n и c_n суть числа положительныя и не могутъ превосходить первое $\sqrt{D}$, а второе $2\sqrt{D}$. Вслѣдствіе этого каждое изъ этихъ чисель можетъ имѣть лишь конечное число значеній и рано или поздно должна повториться та же пара значеній b_n и c_n; а вмѣстѣ съ этимъ повторится и число x_n.

Идея этого доказательства принадлежитъ Лагранжу.

§ 81. Уравненіе Пелля.

1. Разсмотримъ теперь подходящія дроби для $\sqrt{D}$. Такъ какъ P_n и Q_n постоянно возрастаютъ вмѣстѣ съ n, то они, конечно, не могутъ періодически повторяться.

$$\sqrt{D}=\frac{P_{n+1}\,x_{n+1}+P_n}{Q_{n+1}\,x_{n+1}+Q_n};$$

а такъ какъ $x_{n+1}=x_1=1:(\sqrt{D}-q)$ (§ 80,2), то

$$\sqrt{D}=\frac{(P_{n+1}-qP_n)+P_n\sqrt{D}}{(Q_{n+1}-qQ_n)+Q_n\sqrt{D}}.$$

Помножая на знаменателя обѣ части, получаемъ:

$$(Q_{n+1}-qQ_n)\sqrt{D}+D\,Q_n=(P_{n+1}-qP_n)+P_n\sqrt{D}.$$

Согласно § 80, 1, это равенство разлагается на два:

$$\begin{array}{ll|l} P_n & Q_{n+1}-qQ_n, & P_n \\ D\,Q_n & P_{n+1}-qP_n, & -Q_n. \end{array}$$

Помножая эти равенства на множителей, приписанныхъ сбоку, складывая ихъ и замѣняя $P_n\,Q_{n+1}-Q_n\,P_{n+1}$ черезъ $(-1)^n$ [§ 78 (6)], получимъ:

$$P_n^2-D\,Q_n^2=(-1)^n. \qquad (1)$$

Послѣдняя формула остается справедливой, если замѣнить n черезъ $2n$, $3n$, $4n$,

$$P_{2n}^2-D\,Q_{2n}^2=1,$$
$$P_{3n}^2-D\,Q_{3n}^2=(-1)^n,$$

Въ самомъ дѣлѣ, при выводѣ равенства (1), мы опирались только на то, что $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$, есть періодъ непрерывной дроби, выражающей $\sqrt{D}$. Дѣло не измѣнится, если два и три періода соединить и считать за одинъ періодъ.

2. Полученные нами результаты содержатъ рѣшеніе знаменитой задачи объ опредѣленіи цѣлыхъ чиселъ T и U, удовлетворяющихъ уравненію

$$T^2-D\,U^2=1, \qquad (2)$$

гдѣ D есть данное положительное число, не представляющее собой полнаго квадрата.

Чтобы рѣшить эту задачу, нужно обратить въ непрерывную дробь $\sqrt{D}$. Если n (число членовъ періода) есть четное число, то уравненіе (2) удовлетворяется безчисленнымъ множествомъ чиселъ T и U по формуламъ:

$$T = P_{mn},\quad U = Q_{mn},$$

гдѣ m произвольное цѣлое положительное число. Если же n есть нечетное число, то въ этихъ формулахъ m нужно брать четнымъ. При нечетныхъ значеніяхъ m мы въ этомъ случаѣ получимъ рѣшенія уравненія:

$$T^2 - DU^2 = -1. \qquad (3)$$

Уравненіе (2) имѣетъ всегда безчисленное множество рѣшеній, а уравненіе (3) имѣетъ рѣшенія только въ случаѣ нечетнаго n *).

Уравненіе (2) называется уравненіемь Пелля (Pell).

Значенія чисель T и U измѣняются очень неправильно и трудно усмотрѣть ихъ связь съ числомъ D. Вычисленіе ихъ, но крайней мѣрѣ для небольшихъ значеній D, производится довольно просто. Мы увидимъ это сейчасъ на примѣрѣ.

3. Примѣръ:.

$$\sqrt{D} = \sqrt{59}, \qquad q = 7. \qquad (1)$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{10},\quad q_1 = 1,$$

$$x_2 = \frac{10}{\sqrt{59}-3} = \frac{\sqrt{59}+3}{5},\quad q_2 = 2,$$

$$x_3 = \frac{5}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{2},\quad q_3 = 7,$$

$$x_4 = \frac{2}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{5},\quad q_4 = 2,$$

$$x_5 = \frac{5}{\sqrt{59}-3} = \frac{\sqrt{59}+3}{10},\quad q_5 = 1,$$

$$x_6 = \frac{10}{\sqrt{59}-7} = \frac{\sqrt{59}+7}{1},\quad q_6 = 14,$$

$$x_7 = \frac{1}{\sqrt{59}-7} = x_1.$$

*) Здѣсь, собственно, рѣчь идетъ только о рѣшеніяхъ, получающихся дан-

Періодъ состоитъ изъ шести членовъ:

$$[1,\ 2,\ 7,\ 2,\ 1,\ 14],$$

а до періода стоитъ число $q = 7$.

По § 78, (3) и (4):

$$\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{0}{1},\ \frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0},\ \frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{1},\ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{8}{1},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{23}{3},\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{169}{22},\ \frac{P_5}{Q_5} = \frac{361}{47},\ \frac{P_6}{Q_6} = \frac{530}{69}.$$

Значитъ $T = 530$, $U = 69$. Дѣйствительно, легко повѣрить справедливость равенства:

$$530^2 - 59 \cdot 69^2 = 1.$$

Приведемъ еще нѣсколько примѣровъ съ ихъ рѣшеніями, но безъ вычисленій:

$$\sqrt{D} = \sqrt{19},\quad q = 4,\quad n = 6, \tag{2}$$
$$T = 170,\quad U = 39,\quad T^2 - 19\,U^2 = 1.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{103},\quad q = 10,\quad n = 12, \tag{3}$$
$$T = 227\,528,\quad U = 22\,419,\quad T^2 - 103\,U^2 = 1.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{38},\quad q = 6,\quad n = 2, \tag{4}$$
$$T = 37,\quad U = 6,\quad T^2 - 38\,U^2 = 1.$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{29},\quad q = 5,\quad n = 5,$$
$$T = 70,\quad U = 13,\quad T^2 - 29\,U^2 = -1.$$

Можно выбирать примѣры совершенно произвольно; если число D не превышаетъ сотни, вычисленіе не отличается сложностью *).

нымъ путемъ, посредствомъ обращенія $\sqrt{D}$ въ непрерывную дробь. Въ теоріи чиселъ доказывается, однако, что этотъ способъ исчерпываетъ всѣ рѣшенія уравненій (2) и (3).

*) Дегенъ (Degen) вычислилъ таблицу рѣшеній уравненія Пелля („Canon Pellianus", Hafniae 1817). Въ теоріи чиселъ Лежандра („Zahlentheorie" [10]). Bd. 1, 3 Aufl. 1830, deutch von Maser, 1886) находится такая же таблица для всѣхъ значеній D до 1003. Совершенно неумѣстно вообще распространенное названіе: „уравненія Пелля"; Пелль не занимался рѣшеніемъ этихъ уравненій. По мнѣнію Энестрема (Eneström. „Bibliotheca mathematica", 3. Folge, Bd. 3, Leipzig 1902, S. 204), ошибка произошла потому, что Эйлеръ смѣшалъ двухъ англійскихъ математиковъ Пелля и Браункера (Brouncker).

[10]) Подлинникъ носитъ названіе: A. M. Legendre. „Théorie des Nombres". Paris. 1798.

ГЛАВА XVI.

Алгебраическое рѣшеніе уравненій 3-ей и 4-ой степени.

—

§ 82. Трисекція угла.

1. Трисекція угла есть несомнѣнно самая популярная изъ всѣхъ геометрическихъ задачъ, приводящихъ къ уравненію третьей степени.

Чтобы составить соотвѣтствующее уравненіе, мы будемъ исходить изъ формулы Муавра (§ 47, 8.):

$$\left(\cos\frac{1}{3}\,\vartheta + i\sin\frac{1}{3}\,\vartheta\right)^3 = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.$$

Возводя въ кубъ и отдѣляя дѣйствительную часть отъ мнимой, получимъ:

$$\cos\vartheta = \left(\cos\frac{1}{3}\,\vartheta\right)^3 - 3\cos\frac{1}{3}\,\vartheta\left(\sin\frac{1}{3}\,\vartheta\right)^2,$$

$$\sin\vartheta = 3\left(\cos\frac{1}{3}\,\vartheta\right)^2\sin\frac{1}{3}\,\vartheta - \left(\sin\frac{1}{3}\,\vartheta\right)^3.$$

Если положимъ:

$$2\cos\frac{1}{3}\,\vartheta = x$$

и замѣнимъ $\left(\sin\frac{1}{3}\,\vartheta\right)^2$ черезъ $1 - \left(\cos\frac{1}{3}\,\vartheta\right)^2$, то первое уравненіе приметъ видъ:

$$x^3 - 3x = 2\cos\vartheta, \qquad (1)$$

а второе:

$$(x^2 - 1)\sin\frac{1}{3}\,\vartheta = \sin\vartheta. \qquad (2)$$

Значеніе $\cos\vartheta$ не измѣняется, когда аргументъ ϑ увеличивается или уменьшается на 2π. Поэтому, кромѣ $x = 2\cos\frac{1}{3}\vartheta$, уравненіе (1) имѣетъ еще два корня $x = 2\cos\frac{1}{3}(\vartheta + 2\pi)$ и $x = 2\cos\frac{1}{3}(\vartheta - 2\pi)$ [1]) или $x = -2\cos\frac{1}{3}(\pi - \vartheta)$ и $x = -2\cos\frac{1}{3}(\pi + \vartheta)$. Итакъ, уравненіе (1) имѣетъ три вещественныхъ корня:

$$x_0 = 2\cos\frac{\vartheta}{3}, \quad x_1 = -2\cos\frac{\pi - \vartheta}{3}, \quad x_2 = -2\cos\frac{\pi + \vartheta}{3}.$$

Изъ уравненія (2) найдемъ соотвѣтствующія значенія синуса:

$$\sin\frac{\vartheta}{3} = \frac{\sin\vartheta}{x_0^2 - 1}, \quad \sin\frac{\pi - \vartheta}{3} = \frac{\sin\vartheta}{x_1^2 - 1}, \quad \sin\frac{\pi + \vartheta}{3} = -\frac{\sin\vartheta}{x_2^2 - 1}.$$

Итакъ, если данъ $\cos\vartheta$ или, лучше сказать, $\log\cos\vartheta$, то съ помощью логариѳмическихъ таблицъ тригонометрическихъ величинъ можно вычислить всѣ три корня уравненія (1) съ тою степенью точности, какую допускаютъ эти таблицы.

2. Пусть $f(x) = x^3 - 3x - 2\cos\vartheta$. Такъ какъ производная $f(x)$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, то ея корень $x = \pm 1$ можетъ быть двукратнымъ корнемъ функціи $f(x)$; для этого нужно, чтобы $\cos\vartheta = \pm 1$. Тогда $f(x)$ имѣетъ еще одинъ простой корень $x = \mp 2$. Этотъ частный случай соотвѣтствуетъ трисекціи прямого угла.

3. Изслѣдуемъ теперь, нельзя ли въ болѣе общемъ случаѣ привести уравненіе третьей степени къ виду (1) и такимъ образомъ рѣшить его съ помощью тригонометрическихъ таблицъ.

Положимъ, что намъ дано уравненіе третьей степени:

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0;$$

мы можемъ упростить его, положивъ:

$$z = y - \frac{1}{3}A;$$

[1]) Если $2x = \cos\frac{\vartheta}{3}$, то $\frac{1}{2}(x^3 - 3x)$ даетъ $\cos\vartheta$; если поэтому положимъ $2x = \cos\frac{\vartheta + 2\pi}{3}$, то $\frac{1}{2}(x^3 - 3x)$ дастъ $\cos(\vartheta + 2\pi)$, т. е. также $\cos\vartheta$.

тогда

$$z^2 = y^2 - \frac{2}{3}Ay + \frac{1}{9}A^2$$

$$z^3 = y^3 - Ay^2 + \frac{1}{3}A^2 y - \frac{1}{27}A^3.$$

Послѣ подстановки этихъ выраженій наше уравненіе приметъ видъ:

$$y^3 + ay = b, \qquad (3)$$

гдѣ

$$a = B - \frac{1}{3}A^2,$$

$$b = -\frac{2}{27}A^3 + \frac{1}{3}AB - C.$$

Положимъ, наконецъ, $x = gy$, разумѣя подъ g неопредѣленный множитель; тогда уравненіе (3) перейдетъ въ

$$x^3 + ag^2x = bg^3.$$

Если опредѣлимъ g такъ, чтобы

$$ag^2 = -3, \quad bg^3 = 2\cos\vartheta,$$

то послѣднее уравненіе будетъ тождественно съ уравненіемъ (1).

Первому изъ этихъ уравненій можно удовлетворить вещественнымъ значеніемъ g только въ томъ случаѣ, если a есть отрицательное число. Тогда

$$g = \sqrt{-\frac{3}{a}}, \quad \cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{-\frac{27}{a^3}}.$$

Замѣтимъ, что знакъ передъ квадратнымъ корнемъ мы можемъ выбрать произвольно; поэтому его можно считать положительнымъ. Далѣе, значеніе косинуса по модулю всегда меньше 1; слѣдовательно, уголъ ϑ можетъ быть опредѣленъ только въ томъ случаѣ, если $-27b^2/4a^3$ правильная дробь, т. е. если $b^2/4 < -a^3/27$.

Полагая

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27},$$

мы видимъ, что R должно быть отрицательнымъ числомъ; вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ:

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{27R}{a^3}}.$$

Если $a > 0$, то R во всякомъ случаѣ есть положительное число; слѣдовательно, предполагая R отрицательнымъ, мы тѣмъ самымъ принимаемъ, что и a есть отрицательное число; но при отрицательномъ a R можетъ и не быть отрицательнымъ.

Взявъ при радикалахъ положительные знаки, мы получимъ опредѣленныя значенія для $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, которымъ отвѣчаетъ опредѣленный уголъ ϑ, содержащійся между 0 и π. Этотъ уголъ при $b > 0$ заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, при $b < 0$ между $\frac{\pi}{2}$ и π.

Опредѣливъ такимъ образомъ уголъ ϑ при помощи логариѳмическихъ таблицъ, мы найдемъ всѣ три корня уравненія (3):

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\vartheta}{3},\quad y_2 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\pi-\vartheta}{3},$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{\pi+\vartheta}{3}$$

Если b есть положительное число, а слѣдовательно, ϑ заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то углы $\frac{1}{3}\vartheta$, $\frac{1}{3}(\pi - \vartheta)$, $\frac{1}{3}(\pi + \vartheta)$ всѣ лежатъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$, ихъ косинусы имѣютъ поэтому положительныя значенія, такъ что y_1 есть положительное, y_2 и y_3 отрицательныя числа.

4. Для примѣра возьмемъ кубическое уравненіе:

$$z^3 + z^2 - 4z + 1 = 0.$$

Положимъ $z = -y - \frac{1}{3}$ (чтобы получить положительный коэффиціентъ b). Для y получимъ уравненіе:

$$y^3 - \frac{13}{3}y - \frac{65}{27};$$

слѣдовательно.

$$b = \frac{65}{27},\ a = -\frac{13}{3},\ \cos\vartheta = \frac{65}{2\sqrt{13^3}},$$

$$\log\cos\vartheta = 9{,}8409685 - 10,\ \vartheta = 46^0\ 6'\ 7{,}7'',$$

$$\frac{\vartheta}{3} = 15^0\ 22'\ 2{,}5'',\ \frac{\pi-\vartheta}{3} = 44^0\ 37'\ 57{,}5'',\ \frac{\pi+\vartheta}{3} = 75^0\ 22'\ 2{,}5'',$$

$$\log y_1 = 0{,}3650684, \qquad y_1 = 2{,}317760,$$

$$\log(-y_2) = 0{,}2331322, \qquad y_2 = -1{,}710536,$$

$$\log(-y_3) = 0{,}7833491 - 1, \qquad y_3 = -0{,}607224$$

§ 83. Формула Кардана.

1. Рѣшеніе уравненія

$$x^3 + ax = b \tag{1}$$

въ томъ случаѣ, когда

$$R = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} < 0,$$

было приведено разсужденіями предыдущаго параграфа къ трисекціи угла. Для этого послужили подстановки:

$$\cos\vartheta = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}}, \quad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{27R}{a^3}}, \quad x = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\cos\frac{1}{3}\vartheta, \tag{2}$$

изъ которыхъ выводимъ:

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = \left(\sqrt{\frac{-3}{a}}\right)^3\left(\frac{b}{2} - \sqrt{R}\right),$$

$$\cos\vartheta - i\sin\vartheta = \left(\sqrt{\frac{-3}{a}}\right)^3\left(\frac{b}{2} + \sqrt{R}\right).$$

Извлекая изъ обѣихъ частей этихъ равенствъ кубическіе корни и пользуясь въ примѣненіи къ лѣвымъ частямъ формулой Муавра, получимъ:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\cos\frac{1}{3}\vartheta + i\sin\frac{1}{3}\vartheta\right) &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}},\\ \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\cos\frac{1}{3}\vartheta - i\sin\frac{1}{3}\vartheta\right) &= \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}}.\end{aligned} \tag{3}$$

Перемноживъ равенства (3) почленно, получимъ:

$$\frac{-a}{3} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}; \tag{4}$$

и наконецъ, сложивъ почленно равенства (3), имѣемъ:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}. \tag{5}$$

Здѣсь корень x представленъ въ видѣ суммы двухъ корней третьей степени изъ мнимыхъ величинъ. Позже мы увидимъ, что въ случаѣ $R < 0$ корни уравненія третьей степени никоимъ образомъ нельзя представить въ такомъ видѣ, чтобы вещественные корни выражались при помощи ве-

щественныхъ радикаловъ. Благодаря этому, въ прежнее время математики называли случай, когда $R < 0$, **неприводимымъ случаемъ** уравненія третьей степени (casus irreducibilis) *).

2. Если предположить R положительнымъ, то оба кубическихъ корня

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}}, \quad \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}$$

имѣютъ вещественныя значенія, а въ равенствѣ (4) ихъ произведеніе есть

$$\sqrt[3]{\frac{b^2}{4} - R} = \sqrt[3]{\frac{-a^3}{27}} = \frac{-a}{3}$$

Равенство (5) даетъ вещественное значеніе для y, которое и въ этомъ случаѣ удовлетворяетъ уравненію (1). Въ послѣднемъ легко убѣдиться съ помощью несложной передѣлки.

Выраженіе (5) для корней кубическаго уравненія носитъ названіе **формулы Кардана** (Cardano) **).

3. Къ той же формулѣ рѣшенія уравненія третьей степени можно придти прямымъ путемъ, не пользуясь тригонометрическими функціями.

Положимъ для этого

$$y = u + v, \tag{6}$$

не опредѣляя пока u и v ближе. Тогда

$$\begin{aligned} y^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \\ &= u^3 + v^3 \quad + 3uv(u + v). \end{aligned}$$

Если y есть корень уравненія (1), то

$$u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) = b. \tag{7}$$

Этому уравненію можно удовлетворить, если положить: [1])

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= b \\ 3uv &= -a. \end{aligned}$$

*) Въ выраженіи „casus irreducibilis" терминъ „**неприводимый**" употребляется не въ обычномъ значеніи этого слова (§ 63).

**) Hieronimo Cardano (Cardanus). „Practica arithmeticae generalis". 1537. О правѣ первенства на рѣшеніе уравненія третьей степени возгорѣлся споръ, особенно между Кардано и Тарталья (Tartaglia) (Cantor. „Geschichte der Mathematik," Bd. II S. 482 f). Ученикъ Кардано, Феррари (Luigi Ferrari) нашелъ рѣшеніе уравненія четвертой степени.

[1]) Такъ какъ u и v связаны только уравненіемъ (7), то мы можемъ подчи-

Итакъ, намъ извѣстны сумма и произведеніе двухъ величинъ u^3 и v^3. Какъ было выведено въ § 46, 4,

$$u^3 - v^3 = 2\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = 2\sqrt{R};$$

слѣдовательно:

$$u = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{R}},\quad v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{R}}$$

Соотношеніе (6) $y = u + v$ даетъ для y вновь выраженіе (5). Оба кубическихъ корня связаны между собой уравненіемъ $3uv = -a$, какъ и прежде

§ 84. Мнимые корни.

1. Какъ мы уже видѣли выше, если извѣстенъ одинъ корень уравненія, то разысканіе остальныхъ приводится къ рѣшенію уравненія низшей степени. Кубическое уравненіе имѣетъ три корня. Если найденъ одинъ вещественный корень $y = u + v$, то остальные два корня могутъ быть найдены изъ квадратнаго уравненія. Составимъ это квадратное уравненіе.

2. Если функцію $y^3 + ay - b$ раздѣлить на $y - y_1$, то это дѣленіе совершается нацѣло и мы получимъ (§ 61, 3):

$$y^3 + ay - b = (y - y_1)(y^2 + yy_1 + y_1^2 + a).$$

Недостающіе два корня кубическаго уравненія y_2, y_3 будутъ корнями квадратнаго уравненія:

$$y^2 + yy_1 + y_1^2 + a = 0,$$

или:

$$\left(y + \frac{1}{2}y_1\right)^2 = -\frac{3}{4}y_1^2 - a.$$

Если подставить въ это уравненіе $y_1 = u + v$, $a = -3uv$, то оно

нить ихъ еще условію

$$3uv + a = 0,$$

тогда уравненіе (7) даетъ

$$u^3 + v^3 = b.$$

приметъ видъ:

$$\left[y+\frac{1}{2}(u+v)\right]^2=-\frac{3}{4}(u-v)^2,$$

такъ какъ $(u+v)^2-4uv=(u-v)^2$.

Послѣднее уравненіе имѣетъ корни:

$$-\frac{1}{2}(u+v)\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v);$$

если для сокращенія положимъ:

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\varepsilon, \qquad (1)$$

то, возводя въ квадратъ, получимъ:

$$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\varepsilon^2, \qquad (2)$$

а оба корня y_2, y_3 предложеннаго кубическаго уравненія получатся въ формѣ:

$$y_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v,\quad y_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v. \qquad (3)$$

3. Полученные нами корни (при вещественныхъ u и v, т. е. при $R>0$) суть сопряженныя мнимыя числа.

Изъ уравненій (1) и (2) слѣдуетъ, что $\varepsilon^3=1$, т. е. ε есть мнимый корень третьей степени изъ 1. Онъ удовлетворяетъ также квадратному уравненію

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2=0; \qquad (4)$$

въ частности, кубическое уравненіе $x^3-1=0$ имѣетъ, такимъ образомъ, корни 1, ε, ε^2.

§ 85. Дискриминантъ кубическаго уравненія.

1. Значеніе величины R станетъ яснѣе, если выразить R черезъ корни кубическаго уравненія. Пусть, по прежнему,

$$y_1=u+v,\quad y_2=\varepsilon u+\varepsilon^2 v,\quad y_3=\varepsilon^2 u+\varepsilon v.$$

Такъ какъ $\varepsilon=(-1+i\sqrt{3}):2$, $\varepsilon^2=(-1-i\sqrt{3}):2$, то

$$1-\varepsilon=\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2},\quad 1-\varepsilon^2=\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2},\quad \varepsilon-\varepsilon^2=i\sqrt{3};$$

слѣдовательно:

$$y_1 - y_2 = \frac{3}{2}(u+v) - i\sqrt{3}\frac{u-v}{2},$$

$$y_1 - y_3 = \frac{3}{2}(u+v) + i\sqrt{3}\frac{u-v}{2}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получимъ:

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = \frac{9}{4}(u+v)^2 + \frac{3}{4}(u-v)^2$$
$$= 3(u^2 + v^2 + uv).$$

Наконецъ, это равенство перемножимъ почленно съ равенствомъ:

$$y_2 - y_3 = i\sqrt{3}(u - v);$$

тогда получимъ:

$$(y_2 - y_3)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = \sqrt{-27}(u^3 - v^3).$$

Но $u^3 - v^3 = 2\sqrt{R}$ (§ 83, 3.), слѣдовательно:

$$(y_2 - y_3)(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = 2\sqrt{-27R} = \sqrt{-(27b^2 + 4a^3)}.$$

Выраженіе

$$D = (y_2 - y_3)^2 (y_1 - y_3)^2 (y_1 - y_2)^2,$$

представляющее собой квадратъ лѣвой части послѣдняго равенства, называется дискриминантомъ (D) кубическаго уравненія. Этотъ дискриминантъ равенъ, очевидно, $-4.27\,R$.

2. Если два изъ корней y_1, y_2, y_3 равны между собой, то дискриминантъ равенъ нулю. Обратно, если дискриминантъ равенъ нулю, то между корнями y_1, y_2, y_3 имѣется два равныхъ. Слѣдовательно, $D = 0$ есть необходимое и достаточное условіе для того, чтобы кубическое уравненіе имѣло двойной корень. Въ этомъ случаѣ

$$u = v = \sqrt[3]{\frac{b}{2}},$$

$$y_1 = 2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}, \quad y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}.$$

Если дискриминантъ D имѣетъ положительное значеніе (слѣдовательно, $R < 0$), то всѣ три корня вещественны, а если дискриминантъ имѣетъ отрицательное значеніе (слѣдовательно,

$R > 0$), то уравненіе имѣетъ одинъ вещественный и два мнимыхъ корня.

§ 86. Тригонометрическое рѣшеніе кубическаго уравненія.

1. Въ § 82 мы видѣли, что въ случаѣ $R < 0$ нахожденіе корней уравненія

$$y^3 + ay = b \tag{1}$$

приводится къ трисекціи угла и такимъ образомъ производится съ помощью тригонометрическихъ таблицъ. Можно и при $R > 0$ пользоваться тригонометрическими таблицами; это облегчаетъ рѣшеніе уравненія.

Мы можемъ считать свободный членъ b положительнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы найти корни уравненія

$$y^3 + ay = -b,$$

достаточно перемѣнить знаки при корняхъ уравненія

$$y^3 + ay = b.$$

Такимъ образомъ намъ остается только различать два случая, когда $a > 0$ и когда $a < 0$.

2. При положительномъ a съ помощью подстановки

$$\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{a^3}{27}}\operatorname{cotg}\vartheta, \quad \sqrt{R} = \sqrt{\frac{a^3}{27}}\,\frac{1}{\sin\vartheta} \tag{2}$$

согласно § 83. 3. получимъ:

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27}}\left(\operatorname{cotg}\vartheta + \frac{1}{\sin\vartheta}\right)} = \sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}$$

$$v = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{27}}\left(\operatorname{cotg}\vartheta - \frac{1}{\sin\vartheta}\right)} = -\sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt[3]{\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}$$

$$y = u + v = \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}} - \sqrt[3]{\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}\right).$$

Положимъ теперь

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^3; \tag{3}$$

тогда

$$y = 2\sqrt{\frac{a}{3}}\,\mathrm{cotg}\,\varphi. \qquad (4)$$

Формулы (2), (3), (4) даютъ возможность вычислить значеніе y съ помощью тригонометрическихъ таблицъ.

3. При отрицательномъ a положимъ:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-a^3}{27}}\,\frac{1}{\sin\vartheta}, \quad \sqrt{R} = \sqrt{\frac{-a^3}{27}}\,\mathrm{cotg}\,\vartheta, \qquad (5)$$

$$y = \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}} + \sqrt[3]{\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{-a}{3}}\left(\sqrt[3]{\mathrm{cotg}\,\frac{\vartheta}{2}} + \sqrt[3]{\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}}\right).$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2} = \left(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^3, \qquad (6)$$

$$y = 2\sqrt{\frac{-a}{3}}\,\frac{1}{\sin\varphi}. \qquad (7)$$

Возьмемъ слѣдующій примѣръ:

$$y^3 = 2y + 2,$$

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{8}{27}},$$

и по семизначнымъ таблицамъ получимъ, что $y = 1{,}769292$, при чемъ только послѣдній десятичный знакъ не вполнѣ надеженъ

§ 87. Рѣшеніе уравненій четвертой степени.

1. Рѣшеніе уравненія четвертой степени можетъ быть приведено къ рѣшенію уравненія третьей степени и при томъ различными способами.

*) Богатый матеріалъ для упражненій даетъ E. Lampe въ приложеніи къ годичному отчету (Programm) Луизенштадскаго высшаго реальнаго училища въ Берлинѣ. „Задачи на рѣшеніе уравненій высшихъ степеней изъ области геометріи и механики" („Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade". Ostern, 1885. Gaertners Verlagsbuchhandlung).

Простѣйшій изъ нихъ есть способъ Феррари;*) онъ очень напоминаетъ способъ рѣшенія уравненія третьей степени [3]).

Точно такъ же, какъ уравненіе 3-ей степени, общее уравненіе 4-ой степени

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

подстановкой

$$y = x - \frac{1}{4} A$$

приводится къ болѣе простому виду, безъ члена третьей степени:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0; \qquad (1)$$

коэффиценты a, b, c очень легко выразить въ коэффиціентахъ A, B, C, D.

Разложимъ теперь x на три слагаемыхъ; именно положимъ:

$$2x = u + v + w.$$

Тогда

$$4x^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw),$$
$$16x^4 = (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2)(uv + vw + wu) +$$
$$+ 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 8uvw(u + v + w).$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ:

$$(u^2 + v^2 + w^2)^2 + 4(uw + vw + wu)(u^2 + v^2 + w^2 + 2a) +$$
$$+ 4a(u^2 + v^2 + w^2) + 8(uvw + b)(u + v + w) +$$
$$+ 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 16c = 0.$$

Мы упростимъ наше уравненіе, если подчинимъ u, v и w условіямъ:

$$u^2 + v^2 + w^2 = -2a \qquad (2)$$
$$uvw = -b. \qquad (3)$$

Оно приметъ тогда видъ:

$$4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + 4a(u^2 + v^2 + w^2) +$$
$$+ (u^2 + v^2 + w^2)^2 + 16c = 0,$$

а въ виду соотношенія (2) оно еще болѣе упрощается:

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = a^2 - 4c. \qquad (4)$$

Если z есть неопредѣленная величина, то изъ равенствъ (2), (3) и (4) вытекаетъ тождество:

$$(z - u^2)(z - v^2)(z - w^2) = z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2,$$

*) Ludovico Ferrari, ученикъ Кардана 1522—1565.

[3]) Рѣшеніе уравненія, какъ оно изложено въ текстѣ, ближе всего подходитъ къ пріему Эйлера, какъ это и отмѣчаетъ авторъ во второмъ изданіи. Euler. „Vollständige Anleitung zur Algebra". II Theil, 1 Abschnitt, Nr. 15.

т. е. u^2, v^2 и w^2 суть корни кубическаго уравненія:

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0, \qquad (5)$$

(§ 64, 1). Обозначимъ корни этого уравненія черезъ z_1, z_2 и z_3; тогда:

$$u = \sqrt{z_1},\ v = \sqrt{z_2},\ w = \sqrt{z_3}. \qquad (7)$$

Знаки передъ этими радикалами не вполнѣ произвольны; въ виду соотношенія (3) знакъ одного изъ нихъ опредѣляется знаками двухъ другихъ. Итакъ, имѣя въ виду равенство $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -b$, мы получимъ четыре корня заданнаго уравненія въ видѣ:

$$2x_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3},$$
$$2x_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$2x_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$
$$2x_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}.$$

Уравненіе 3-ей степени (5) называется **кубической резольвентой** даннаго уравненія четвертой степени. Такъ какъ $z_1 z_2 z_3 = b^2$ всегда представляетъ собою положительное число, то здѣсь могутъ имѣть мѣсто три случая:

1) z_1, z_2, z_3 суть вещественныя положительныя числа; тогда уравненіе четвертой степени имѣетъ четыре вещественныхъ корня.

2) Два изъ корней уравненія (5), скажемъ z_2, z_3, имѣютъ отрицательныя значенія, а третій z_1 положительное. Въ этомъ случаѣ всѣ четыре корня x_1 x_2 x_3 x_4 представляютъ собой мнимыя числа, причемъ x_1 и x_2, x_3 и x_4 суть числа, попарно сопряженныя.

3) Уравненіе 3-ей степени (5) имѣетъ два сопряженныхъ мнимыхъ корня, скажемъ z_2 и z_3. Такъ какъ произведеніе $z_2 z_3$ есть число положительное, то и z_1 должно быть положительнымъ числомъ. Знаки при квадратныхъ корняхъ опредѣлимъ такъ, чтобы $\sqrt{z_2}$ и $\sqrt{z_3}$ имѣли сопряженныя значенія.

Тогда x_1 и x_2 будутъ вещественныя, x_3 и x_4 сопряженныя мнимыя числа.

§ 88. Дискриминантъ уравненія четвертой степени.

1. По коэффиціентамъ уравненія (1), не рѣшая его, можно опредѣлить, какой изъ указанныхъ трехъ случаевъ будетъ имѣть мѣсто.

Съ этой цѣлью составимъ сначала разности:

$$x_1-x_2=\sqrt{\zeta_2}+\sqrt{\zeta_3},\quad x_3-x_4=\sqrt{\zeta_2}-\sqrt{\zeta_3},$$
$$x_1-x_3=\sqrt{\zeta_1}+\sqrt{\zeta_3},\quad x_2-x_4=\sqrt{\zeta_1}-\sqrt{\zeta_3},$$
$$x_1-x_4=\sqrt{\zeta_1}+\sqrt{\zeta_2},\quad x_2-x_3=\sqrt{\zeta_1}-\sqrt{\zeta_2}.$$

Перемножая между собой эти равенства, получимъ:

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_3-x_4)(x_2-x_4)(x_2-x_3)= \\ =(\zeta_2-\zeta_3)(\zeta_1-\zeta_3)(\zeta_1-\zeta_2). \qquad (1)$$

Квадратъ этой величины называется дискриминантомъ уравненія четвертой степени. Онъ представляетъ собою симметрическую функцію корней x_1, x_2, x_3, x_4 и, слѣдовательно, согласно § 64, выражается раціонально черезъ коэффиціенты a, b, c.

Необходимое и достаточное условіе для того, чтобы уравненіе четвертой степени имѣло кратные корни, состоитъ въ томъ, что дискриминантъ долженъ быть равенъ нулю.

2. Соотношеніе (1) заключаетъ въ себѣ теорему: дискриминантъ уравненія четвертой степени равенъ дискриминанту его кубической резольвенты. Чтобы образовать дискриминантъ кубической резольвенты, нужно по правилу, указанному въ § 85, предварительно подстановкой

$$\zeta=y-\frac{2a}{3}$$

освободить его отъ члена, содержащаго неизвѣстное во второй степени. Какъ мы видѣли въ § 82, 3, мы получимъ для y уравненіе:

$$y^3+Ay+B=0,$$

гдѣ

$$A=-\frac{a^2}{3}-4c,$$

$$B=-\frac{2a^3}{27}+\frac{8ac}{3}-b^2$$

Дискриминантъ этого уравненія

$$D=-27B^2-4A^3$$

представляетъ собой также дискриминантъ уравненія четвертой степени.

Если мы выполнимъ вычисленія и выразимъ дискриминантъ въ коэффиціентахъ даннаго уравненія четвертой степени, то получимъ:

$$D=16a^4c-4a^3b^2-128a^2c^2+144acb^2+256c^3-27b^4.$$

3. Посмотримъ теперь, какъ съ помощью дискриминанта различаются упомянутые три случая. Замѣтимъ прежде всего, что случай 3), когда уравненіе четвертой степени имѣетъ два вещественныхъ и два мнимыхъ корня, вполнѣ характеризуется тѣмъ, что дискриминантъ D имѣетъ отрицательное значеніе [4]).

Намъ остается установить различіе между случаями 1) и 2), т. е. между случаемъ, когда всѣ корни вещественные, и тѣмъ случаемъ, когда всѣ корни мнимые. Въ обоихъ случаяхъ $D > 0$. Въ первомъ кубическая резольвента имѣетъ три положительныхъ корня, во второмъ одинъ положительный и два отрицательныхъ

Изъ резольвенты § 87, (5) по теоремамъ § 64-го получимъ соотношенія:

$$2a = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3,$$
$$a^2 - 4c = \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3;$$

если всѣ три величины $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ и $\mathfrak{z}_3$ положительны, то

$$a < 0, \quad a^2 - 4c > 0. \tag{2}$$

Докажемъ теперь, что эти два условія вмѣстѣ съ условіемъ $D > 0$ достаточны для того, чтобы уравненіе четвертой степени имѣло четыре вещественныхъ корня.

4. Произведеніе $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3 = b^2$ есть число положительное: поэтому, если $D > 0$ [5]), то возможны только два случая: либо всѣ три корня $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ положительны, либо два изъ нихъ отрицательны. Положимъ, что $\mathfrak{z}_2 = -\xi_2$, $\mathfrak{z}_3 = -\xi_3$, гдѣ ξ_2 и ξ_3 положительныя числа.

Если $a < 0$, то

$$\mathfrak{z}_1 > \xi_2 + \xi_3,$$
$$\mathfrak{z}_1(\xi_2 + \xi_3) > (\xi_2 + \xi_3)^2,$$
$$\mathfrak{z}_1(\xi_2 + \xi_3) - \xi_2\xi_3 > \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_2\xi_3 > 0.$$

и, слѣдовательно:

$$\mathfrak{z}_1(\mathfrak{z}_2 + \mathfrak{z}_3) + \mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3 < 0, \quad a^2 - 4c < 0.$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ либо $a \geqslant 0$, либо $a^2 - 4c < 0$, т. е. условія (2) не выполняются. Слѣдовательно, эти условія (2) характеризуютъ первый случай. Если b, а слѣдовательно, и одинъ изъ корней $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ обращаются въ нуль, то наши разсужденія все таки остаются въ силѣ.

5. Если $D = 0$, то какія либо двѣ изъ величинъ $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, $\mathfrak{z}_3$ равны

[4]) Ибо въ этомъ и только въ этомъ случаѣ соотвѣтствующее уравненіе третьей степени имѣетъ два мнимыхъ корня (§ 85,2).

[5]) Такъ что $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ и $\mathfrak{z}_3$ суть вещественныя числа.

между собой. Пусть $\zeta_2 = \zeta_3$; допустимъ, ζ_2 и ζ_3 не равны нулю. Вмѣстѣ съ тѣмъ ζ_1 должно быть положительнымъ или, по крайней мѣрѣ, не отрицательнымъ числомъ, такъ какъ произведеніе $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 = b^2$ не можетъ быть отрицательнымъ числомъ. Тогда

$$2x_1 = \sqrt{\zeta_1} + 2\sqrt{\zeta_2}, \quad 2x_2 = \sqrt{\zeta_1} - 2\sqrt{\zeta_2},$$
$$2x_3 = 2x_4 = -\sqrt{\zeta_1}.$$

Уравненіе четвертой степени имѣетъ въ этомъ случаѣ двойной вещественный корень; два же другіе либо также вещественные, либо мнимые сопряженные, смотря по тому, представляетъ ли собою ζ_2 отрицательное или положительное число. Ясно, что неравенства (2) являются необходимымъ и достаточнымъ условіемъ, чтобы уравненіе четвертой степени имѣло исключительно вещественные корни.

6. Въ частности, подъ это условіе подходитъ случай $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 > 0$. Тогда:

$$x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{\zeta_1}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\zeta_1},$$

т. е. уравненіе четвертой степени въ этомъ случаѣ имѣетъ корень третьей кратности. Необходимое и достаточное для этого условіе выражается равенствомъ:

$$\zeta^3 + 2a\zeta^2 + (a^2 - 4c)\zeta - b^2 = (\zeta - \zeta_1)^3,$$

откуда: [6])

$$3\zeta_1 = -2a, \quad 3\zeta_1^2 = a^2 - 4c, \quad \zeta_1^3 = b^2;$$

исключивъ ζ_1, получимъ:

$$a^2 + 12c = 0, \quad 8a^3 + 27b^2 = 0.$$

7. Если $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$, то

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\zeta_1}, \quad x_3 = x_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{\zeta_1},$$

т. е. уравненіе четвертой степени имѣетъ два двойныхъ корня. Эти корни представляютъ собой вещественныя или мнимыя сопряженныя числа, смотря по тому, есть ли ζ_1 положительное или отрицательное число.

Условія, соотвѣтствующія этому случаю, выражаются равенствами:

$$b = 0, \quad a^2 - 4b = 0;$$

ζ_1 есть положительное или отрицательное число, смотря по тому, пред-

[6]) Это соотношеніе должно имѣть мѣсто тождественно относительно ζ.

ставляетъ ли собою a положительное или отрицательное число. Если, наконецъ, $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, то

$$a = 0, \quad a^2 - 4c = 0, \quad b = 0$$

и уравненіе четвертой степени имѣетъ четыре равныхъ корня. Общее значеніе этихъ корней есть нуль [7]).

§ 89. Группа уравненія четвертой степени.

1. Болѣе глубокія основанія, вслѣдствіе которыхъ уравненія четвертой степени приводятъ къ кубической резольвентѣ, заключаются въ свойствахъ группы перестановокъ изъ четырехъ элементовъ (§ 52, 6.) *). Эта группа, какъ мы видѣли, состоитъ изъ 24 перестановокъ. Если мы условимся разумѣть подъ элементами этихъ перестановокъ четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4 уравненія четвертой степени, то **симметрической функціей** этихъ корней будетъ такая, которая остается тождественной самой себѣ при всѣхъ перестановкахъ. Такая функція выражается раціонально черезъ коэффиціенты уравненія четвертой степени. Если между корнями x_1, x_2, x_3, x_4 не существуетъ какихъ либо особыхъ соотношеній, то симметрическія функціи суть единственныя, обладающія этимъ свойствомъ [8]). Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что коэффиціенты уравненія суть основныя симметрическія функціи,

$$\begin{aligned}
-a_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\
a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\
-a_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \\
a_4 &= x_1x_2x_3x_4,
\end{aligned}$$

мы отсюда заключаемъ обратно, что всякая раціональная функція этихъ коэффиціентовъ есть въ то же время симметрическая функція величинъ x_1, x_2, x_3, x_4, которыя представляютъ собой корни уравненія четвертой

---

[7]) Можетъ показаться страннымъ, что въ томъ случаѣ, когда всѣ четыре корня уравненія четвертой степени равны, они необходимо равны нулю; но нужно имѣть въ виду, что здѣсь идетъ рѣчь объ уравненіи, приведенномъ къ виду (1) § 87-го.

*) Созданіе теоріи группъ и приложеній этой теоріи къ алгебрѣ принадлежитъ Галуа (Galois). Эваристъ Галуа былъ убитъ на дуэли едва 20 лѣтъ въ 1832 году. Вечеромъ, наканунѣ смерти въ письмѣ къ другу онъ изложилъ свою теорію.

[8]) Это значитъ: симметрическія функціи суть единственныя, которыя выражаются въ коэффиціентахъ раціонально, какія бы значенія ни имѣли количества a_1, a_2, a_3, a_4.

степени:

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Эта группа изъ 24 перестановокъ называется группой Галуа общаго уравненія четвертой степени.

2. Въ этой группѣ, какъ было показано выше, содержится группа четныхъ перестановокъ, состоящая изъ 12 элементовъ. Существуютъ функціи, остающіяся безъ перемѣнъ только при четныхъ перестановкахъ. Такія функціи называются знакоперемѣнными, а самая группа четныхъ перестановокъ поэтому тоже называется знакоперемѣнной. Примѣромъ такой функціи можетъ служить произведеніе разностей:

$$P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4).$$

квадратъ котораго есть дискриминантъ. Эта функція мѣняетъ знакъ, если произвести одну какую нибудь транспозицію (§49,1) напримѣръ, замѣнить другъ другомъ x_1 и x_2, и принимаетъ прежнее значеніе, если сдѣлать двѣ или, вообще, четное число транспозицій [9].

---

[9]) Чтобы вполнѣ уяснить себѣ какъ этотъ пунктъ, такъ и дальнѣйшее, нужно отдать себѣ полный отчетъ въ значеніи терминовъ, которые авторъ употребляетъ. Мы имѣемъ функцію $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Подъ знакомъ функціи F здѣсь стоять перемѣнныя въ послѣдовательности, соотвѣтствующей основной перестановкѣ $E = x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$. Если мы, однако, замѣнимъ перестановку E другой перестановкой $S = x'_1, x'_2, x'_3, \ldots, x'_n$, т. е. въ функціи произведемъ субституцію, ведущую отъ перестановки E къ перестановкѣ S, то мы получимъ функцію $F(S) = F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, которая иногда совпадаетъ съ первоначальной функціей, иногда отличается отъ нея.

Пусть, напримѣръ,

$$F(E) = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 x_4.$$

Если перестановка $S = x_2, x_1, x_3, x_4 = (x_1, x_2)$, то

$$F(S) = F(x_2, x_1, x_3, x_4) = x_2 + x_1 + x_3 x_4.$$

Если перестановка $T = x_1, x_2, x_4, x_3 = (x_3, x_4)$, то

$$F(T) = F(x_1, x_2, x_4, x_3) = x_1 + x_2 + x_4 x_3$$

Точно также

$$F(ST) = F(x_2, x_1, x_4, x_3) = x_2 + x_1 + x_4 x_3$$

Ясно, что наша функція при перестановкахъ S, T и ST имѣетъ то же значеніе, что и при перестановкѣ E. Но при перестановкѣ $R = x_1, x_3, x_2, x_4 = (x_2, x_3)$ она получаетъ уже другое значеніе:

$$F(R) = F(x_1, x_3, x_2, x_4) = x_1 + x_3 + x_2 x_4.$$

При такихъ условіяхъ говорятъ, что наша функція не мѣняется при перестановкахъ S, T, ST и мѣняется при остальныхъ перестановкахъ, напримѣръ, при

3. Каждая цѣлая функція Q отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая не мѣняется при перестановкахъ знакоперемѣнной группы, выражается раціонально черезъ коэффиціенты a_1, a_2, a_3, a_4 и приведенную выше функцію P.

Положимъ, что такая функція Q_1 при какой-нибудь транспозиціи, напримѣръ (x_1, x_2), переходитъ въ Q_2. Въ такомъ случаѣ Q_2, въ свою очередь, послѣ вторичной перестановки какихъ нибудь двухъ элементовъ переходитъ въ Q_1 [10]). Вообще, функція эта не можетъ имѣть другихъ значеній, кромѣ Q_1 и Q_2, такъ какъ каждая нечетная перестановка получается изъ четной помощью транспозиціи. Слѣдовательно, $Q_1 + Q_2$ есть симметрическая функція. Разность $Q_1 - Q_2$ мѣняетъ знакъ, если переставить x_1 и x_2, и потому равна нулю при $x_1 = x_2$. Поэтому $Q_1 - Q_2$, какъ цѣлая функція отъ x_1, дѣлится на $x_1 - x_2$ и точно такъ же и на остальныя разности $x_1 - x_3$, $x_1 - x_4, \ldots$, т. е. на произведеніе P. Частное $(Q_1 - Q_2)/P$ опять представляетъ собой симметрическую функцію.

Если положимъ $P = \sqrt{D}$, то D есть дискриминантъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$Q_1 + Q_2 = 2A, \quad Q_1 - Q_2 = 2B\sqrt{D},$$

гдѣ A и B суть раціональныя функціи коэффиціентовъ: слѣдовательно,

$$Q_1 = A + B\sqrt{D},$$

что и требовалось доказать [11]).

4. Въ группѣ 24 перестановокъ заключается группа изъ 8 переста-

перестановкѣ R.

Если мы въ функціи P, приведенной въ текстѣ, произведемъ какую либо транспозицію, напримѣръ (x_1, x_2), то получимъ:

$$P(x_2, x_1, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) = -P.$$

Функція мѣняетъ знакъ при каждой транспозиціи, а потому остается безъ измѣненія при четныхъ перестановкахъ и мѣняетъ знакъ при нечетныхъ.

Чтобы понять дальнѣйшія примѣчанія, нужно замѣтить слѣдующее.

Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будетъ нѣкоторая функція отъ перемѣнныхъ x_i, R нѣкоторая перестановка. Положимъ далѣе, что $F(R) = F_1(x_1, x_2 \ldots x_n)$, а S другая перестановка. Если мы теперь въ функціи F_1 произведемъ субституцію, ведущую отъ перестановки E къ S, то это все равно, что въ функціи F произвести субституцію, ведущую отъ E къ перестановкѣ RS. Иначе:

$$\text{Если } F(R) = F_1(x_1, x_2 \ldots x_n), \text{ то } F(RS) = F_1(S).$$

[10]) Потому что двѣ транспозиціи, по условію, не мѣняютъ функціи Q_1.

[11]) Изложимъ это доказательство подробнѣе.

По условію $Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть знакоперемѣнная функція, т. е. не мѣня-

новокъ (§ 52, 6):

$$G_1 = (1), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3),$$
$$(1, 2), (3, 4), (1, 4, 2, 3), (1, 3, 2, 4).$$

Каждую изъ этихъ перестановокъ соединимъ послѣдовательно съ двумя перестановками, не входящими въ эту группу, скажемъ, съ перестановками:

$$(1, 4) \text{ и } (1, 3).$$

Если, соединяя перестановки группы G_1 съ перестановкой (1, 4), мы будемъ ставить послѣднюю на второмъ мѣстѣ, то получимъ слѣдующую систему перестановокъ:

$$G_2 = (1, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 4, 2), (2, 3), (1, 2, 4), (1, 4, 3), (2, 3, 4), (1, 3, 2);$$

а соединяя съ (1, 3):

$$G_3 = (1, 3), (1, 2, 3, 4), (2, 4), (1, 4, 3, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 2), (2, 4, 3).$$

Въ системахъ G_1, G_2, G_3, взятыхъ вмѣстѣ, заключаются всѣ 24 перестановки (§ 52).

G_2 и G_3 не могутъ быть названы группами въ собственномъ смыслѣ этого слова, такъ какъ результатъ соединенія двухъ элементовъ, положимъ изъ системы G_2, не всегда содержится въ G_2. Поэтому системы G_2 и G_3 называются относительно группы G_1 ея согруппами.

Если y_1 есть функція перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, x_4, которая не мѣняется при перестановкахъ G_1, то при всѣхъ вообще перестановкахъ

ется при четныхъ перестановкахъ, такъ что, если R есть четная перестановка, то $Q_1(R) = Q_1$.

Пусть теперь S будетъ нечетная перестановка. Въ такомъ случаѣ $Q_1(S)$ представляетъ собой нѣкоторую другую функцію Q_2. Покажемъ теперь, что при всякой другой нечетной перестановкѣ T $Q_1(T)$ также равно Q_2. Въ самомъ дѣлѣ, мы всегда можемъ найти перестановку V, удовлетворяющую условію $T = VS$. Такъ какъ T и S суть нечетныя перестановки, то V есть четная перестановка. Поэтому $Q_1(V) = Q_1$, а слѣдовательно $Q_1(VS) = Q_1(S)$; или иначе, $Q_1(T) = Q_1(S) = Q_2$.

Итакъ, наша функція при всѣхъ четныхъ перестановкахъ имѣетъ значеніе Q_1, при всѣхъ нечетныхъ—значеніе Q_2.

Легко видѣть, что функція Q_2, въ свою очередь, при четныхъ перестановкахъ остается безъ измѣненія, при нечетныхъ же переходитъ въ Q_1. Въ самомъ дѣлѣ, если R есть четная, а S нечетная перестановка, то $Q_1(S) = Q_2$, а потому $Q_2(R) = Q_1(SR)$; но такъ какъ SR также представляетъ собой нечетную перестановку, то $Q_1(SR) = Q_2$, а потому $Q_2(R) = Q_2$. Напротивъ, $Q_2(S) = Q_1(SS)$; а такъ какъ SS есть четная перестановка, то $Q_1(SS) = Q_1$, а потому $Q_2(S) = Q_1$.

Итакъ, функціи Q_1 и Q_2 не измѣняются при четныхъ перестановкахъ и переходятъ одна въ другую при нечетныхъ перестановкахъ. Поэтому функ-

она можетъ принимать только три значенія y_1, y_2, y_3 [5]). Основныя симметрическія функціи y:

$$-A_1 = y_1 + y_2 + y_3,$$
$$A_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3,$$
$$-A_3 = y_1 y_2 y_3$$

представляютъ собой симметрическія функціи отъ x и поэтому выражаются раціонально черезъ коэффиціенты уравненія четвертой степени. Количества же y_1, y_2, y_3 суть корни уравненія третьей степени

$$y^3 + A_1 y^2 + A_2 y + A_3 = 0. \qquad (2)$$

Каждое такое уравненіе называется кубической резольвентой уравненія четвертой степени (1).

Если функція y_1 не измѣняется при перестановкахъ группы G_1 и имѣетъ три значенія, то говорятъ, что она принадлежитъ группѣ G_1.

5. Функціи, принадлежащія группѣ G_1, могутъ быть составлены многими способами. Вмѣстѣ съ тѣмъ и уравненіе четвертой степени можно рѣшить различными пріемами. Феррари пользовался функціей

$$z_1 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$

которая, очевидно, не мѣняется при перестановкахъ группы G_1, а при

ція $Q_1 + Q_2$ не измѣняется ни при четныхъ, ни при нечетныхъ перестановкахъ.

Если мы теперь въ функціи $Q_1 - Q_2$ замѣнимъ x_1 на x_2, т. е. произведемъ транспозицію (x_1, x_2), то она перейдетъ въ $Q_2 - Q_1$, т. е. перемѣнитъ знакъ. Но если $x_1 = x_2$, то это замѣщеніе не должно измѣнить функціи; поэтому при $x_1 = x_2$ функція $Q_1 - Q_1$ обращается въ нуль. Отсюда, какъ указано въ текстѣ, заключаемъ, что функція $Q_1 - Q_2$ дѣлится нацѣло на P. Если мы теперь разсмотримъ частное $\frac{Q_1 - Q_2}{P}$, то при четной перестановкѣ какъ числитель, такъ и знаменатель остаются безъ измѣненія; при нечетной перестановкѣ числитель и знаменатель мѣняютъ знаки; поэтому частное не измѣняется ни при какой перестановкѣ.

Итакъ, $Q_1 + Q_2$ и $\frac{Q_1 - Q_2}{P}$ суть симметрическія функціи отъ $x_1, x_2 \ldots x_n$; поэтому онѣ выражаются раціонально въ коэффиціентахъ $a_1, a_2 \ldots a_n$. Эти двѣ функціи и обозначены въ текстѣ черезъ $2A$ и $2B$.

[5]) Если мы въ функціи y_1 замѣнимъ x_1, x_2, x_3, x_4 перестановкой, входящей въ составъ группы G_1, то она не измѣняется. Если мы въ ней замѣнимъ x_1, x_2, x_3, x_4 какой либо перестановкой согруппы G_2, то это все равно, что замѣнить x_1, x_2, x_3, x_4 нѣкоторой перестановкой группы G_1 (отчего функція не измѣнится), а потомъ произвести транспозицію (x_1, x_4); мы получимъ функцію G_2; точно такъ же, если мы замѣнимъ x_1, x_2, x_3, x_4 какой либо перестановкой согруппы G_3, то мы получимъ одну и ту же функцію y_3.

G_2 и G_3 переходитъ соотвѣтственно въ

$$z_2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$

$$z_3 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2.$$

Если извѣстны три корня кубической резольвенты, [6]) то чтобы опредѣлить корни x, остается только извлечь квадратные корни изъ этихъ трехъ величинъ; корни эти связаны еще соотношеніемъ:

$$\sqrt{z_1}\ \sqrt{z_2}\ \sqrt{z_3} = -b.$$

6. Между функціями, принадлежащими группѣ G_1, есть еще болѣе простая, именно:

$$y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4;$$

при перестановкахъ согруппъ G_2 и G_3 она переходитъ въ

$$y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4$$
$$y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

Коэффиціенты A_1, A_2, A_3, какъ симметрическія функціи, легко вычисляются. По обозначеніямъ § 64-го:

$$-A_1 = y_1 + y_2 + y_3 = \Sigma x_1 x_2 = a_2,$$
$$A_2 = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = \Sigma x_1^2 x_2 x_3 =$$
$$= \Sigma x_1 \, \Sigma x_1 x_2 x_3 - 4 x_1 x_2 x_3 x_4 = a_1 a_3 - 4 a_4,$$
$$-A_3 = y_1 y_2 y_3 = \Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 + \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 =$$
$$= x_1 x_2 x_3 x_4 \, \Sigma x_1^2 + (\Sigma x_1 x_2 x_3)^2 - 2 \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4;$$

но

$$\Sigma x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 \, \Sigma x_1 x_2 = a_2 a_4,$$
$$\Sigma x_1^2 = (\Sigma x_1)^2 - 2 \Sigma x_1 x_2 = a_1^2 - 2 a_2,$$

а слѣдовательно,

$$-A_3 = a_1^2 a_4 + a_3^2 - 4 a_2 a_4.$$

Кубической резольвентой въ данномъ случаѣ служитъ уравненіе:

$$y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4 a_4) y + 4 a_2 a_4 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0. \quad (3)$$

Это уравненіе нѣсколько упрощается, если самое уравненіе четвертой степени задано въ упрощенномъ видѣ, т. е. если $a_1 = 0$.

[6]) Эта резольвента и есть уравненіе (5) § 87-го.

7. Положимъ, въ уравненіи (3)

$$3y = t + a_2;$$

тогда членъ, содержащій неизвѣстное во второй степени, обратится въ нуль. Путемъ простыхъ вычисленій мы получимъ кубическую резольвенту въ видѣ:

$$t^3 - 3At - B = 0. \qquad (4)$$

Здѣсь для сокращенія положено:

$$A = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_4,$$
$$B = 27a_1^2a_4 + 27a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_2a_4 - 9a_1a_2a_3.$$

Коэффиціенты A и B называются **первымъ** и **вторымъ инваріантами уравненія четвертой степени** (1).

8. Зная корни резольвенты (3), т. е. y_1, y_2, y_3, можно вычислить z_1, z_2, z_3 при помощи формулы:

$$z_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$
$$= a_1^2 - 4a_2 + 4y_1; \qquad (5)$$

подобныя же формулы можно написать для z_2 и z_3. Извлекая квадратные корни изъ полученныхъ трехъ выраженій, легко получимъ x_1, x_2, x_3, x_4. Упомянутые три квадратныхъ корня связаны соотношеніемъ, опредѣляющимъ одинъ изъ нихъ въ зависимости отъ двухъ другихъ. Въ самомъ дѣлѣ,

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

есть симметрическая функція и легко выражается въ коэффиціентахъ уравненія (1):

$$-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3$$ [7]).

9. Функція u_1, которая не мѣняется при перестановкахъ группы изъ четырехъ двойныхъ двучленныхъ цикловъ:

(1), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3),

можетъ имѣть только шесть различныхъ значеній. Если же мы ограни-

---

[7]) Изъ соотношенія (5) мы выводимъ:

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1};$$

такимъ же образомъ найдемъ:

$$x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_2}$$
$$x_1 + x_4 - x_2 - x_3 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_3}.$$

чимся только четными перестановками, то получимъ только три значенія u_1, u_2, u_3. Симметрическія функціи этихъ трехъ значеній:

$$-B_1 = u_1 + u_2 + u_3,$$
$$B_2 = u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3,$$
$$-B_3 = u_1 u_2 u_3$$

не измѣняются при перестановкахъ знакоперемѣнной группы и поэтому выражаются раціонально черезъ коэффиціенты и квадратный корень $\sqrt{D}$. Такимъ образомъ мы придемъ къ кубическимъ резольвентамъ другого рода. Простѣйшая функція этого рода будетъ:

$$u_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4),$$
$$u_2 = (x_1 - x_3)(x_4 - x_2),$$
$$u_3 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3).$$

Складывая и перемножая, получимъ:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$
$$u_1 u_2 u_3 = -\sqrt{D},$$

т. е. $B_1 = 0$ и $B_3 = \sqrt{D}$. Нѣсколько труднѣе составить B_2. Выполняя умноженія, мы получимъ:

$$-(u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3) = \Sigma x_1^2 x_2^2 - \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 6 x_1 x_2 x_3 x_4 =$$
$$= (\Sigma x_1 x_2)^2 - 3 \Sigma x_1^2 x_2 x_3,$$
$$\Sigma x_1^2 x_2 x_3 = \Sigma x_1 \Sigma x_1 x_2 x_3 - 4 x_1 x_2 x_3 x_4,$$

а потому

$$-B_2 = a_2^2 - 3 a_1 a_3 + 12 a_4 = A,$$

при чемъ A имѣетъ то же значеніе, какъ и въ п. 7. Мы получили кубическую резольвенту:

$$u^3 - Au + \sqrt{D} = 0. \qquad (5)$$

Если сюда присоединимъ еще соотношеніе

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1,$$

то мы легко найдемъ всѣ корни x_1, x_2, x_3, x_4. Именно, складывая эти уравненія, мы получимъ:

$$4x_1 = \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1} + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_2} + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_3} - a_1$$

Какъ указано въ текстѣ, произведеніе трехъ радикаловъ равно $-a_1^3 + 4a_1a_2 - 8a_3$. Если поэтому выбраны знаки двухъ радикаловъ, то знакъ третьяго этимъ опредѣляется. Комбинируя четырьмя возможными способами знаки двухъ радикаловъ, мы изъ того же выраженія получимъ всѣ четыре корня.

Зная u_1, u_2, u_3, мы можемъ найти y_1, y_2, y_3, такъ какъ

$$u_2 - u_3 = x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_3 + x_2x_4 - 2x_1x_2 - 2x_3x_4 =$$
$$= a_2 - 3y_1.$$

Какъ и выше, извлекая квадратные корни, мы по корнямъ y найдемъ корни x.

§ 90. Система двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными.

1. Къ уравненію четвертой степени приводится, въ частности, задача объ опредѣленіи двухъ неизвѣстныхъ изъ двухъ уравненій второй степени. Общее уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными имѣетъ видъ:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy = 0. \quad (1)$$

Если одному изъ этихъ двухъ неизвѣстныхъ, скажемъ x, будемъ придавать произвольныя значенія, то другое получитъ каждый разъ два значенія, которыя находимъ, рѣшая квадратное уравненіе:

$$by^2 + 2y(c'x + a') + ax^2 + 2b'x + c = 0.$$

Если b не нуль, то корни этого уравненія суть:

$$by = -(c'x + a') \pm \sqrt{(c'x + a')^2 - b(ax^2 + 2b'x + c)},$$

или

$$by = -(c'x + a') \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

гдѣ A, B и C сокращенно обозначаютъ:

$$A = c'^2 - ab, \quad B = a'c' - bb' \quad C = a'^2 - bc.$$

Выраженіе, стоящее подъ знакомъ радикала, можетъ иногда быть полнымъ квадратомъ линейной функціи $\alpha x + \beta$. Въ этомъ случаѣ функція второй степени $f(x, y)$ разлагается на двѣ линейныя функціи:

$$by + c'x + a' \pm (\alpha x + \beta).$$

Послѣднее имѣетъ мѣсто, если

$$\alpha^2 = A, \quad \alpha\beta = B \text{ и } B^2 = C,$$

т. е. если

$$AC - B^2 = 0,$$

откуда

$$\alpha = \sqrt{A}, \quad \beta = B : \sqrt{A} = \sqrt{C}.$$

Итакъ, условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы функція второй степени $f(x, y)$ разлагалась на два линейныхъ множителя, выражается равенствомъ:

$$(c'^2 - ab)(a'^2 - bc) - (a'c' - bb')^2 = 0.$$

Если развернуть это выраженіе и отбросить множителя b, то получится:

$$abc - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 + 2a'b'c' = 0, \qquad (2)$$

или въ формѣ опредѣлителя (§ 40):

$$\begin{vmatrix} a, & c', & b' \\ c', & b, & a' \\ b', & a', & c \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Выраженіе, составляющее лѣвую часть этого равенства, называется опредѣлителемъ функціи $f(x, y)$.

2. Мы предполагали b отличнымъ отъ нуля. Если $b = 0$, то разрѣшая уравненіе (1) относительно y вмѣсто x, придемъ къ тому же результату [8]). Если коэффиціенты a и b оба равны нулю, то c' не можетъ равняться нулю, если только $f(x, y)$ не линейная функція. Если при этомъ функція

$$c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy$$

разлагается на два линейныхъ множителя, то она должна имѣть видъ:

$$2c'(x + m)(y + n),$$

откуда

$$c'n = b', \quad c'm = a', \quad 2c'mn = c;$$

а такъ какъ c' не нуль, то

$$2a'b' - cc' = 0.$$

Къ этому сводится равенство (2), если въ немъ положить $a = b = 0$.

[8]) Если $b = 0$, то уравненіе (1) будетъ первой степени относительно y; вмѣстѣ съ тѣмъ переходъ къ равенству (2) былъ бы въ этомъ случаѣ неправиленъ, такъ какъ множителя b нельзя было бы удалить. Но, какъ указано въ текстѣ, мы все же можемъ придти къ тому же результату, рѣшая уравненіе относительно x. Однако, въ этомъ случаѣ придется опустить множителя a. Поэтому нужно еще разсмотрѣть отдѣльно тотъ случай, когда и $a = 0$. Это авторъ и дѣлаетъ въ текстѣ.

Если, наконецъ, a, b и c' равны нулю, то равенство (2) обращается въ тождество.

Слѣдовательно, равенство (2) выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы функція $f(x, y)$ либо была линейной, либо разлагалась на два линейныхъ множителя.

3. Положимъ теперь, что значенія двухъ неизвѣстныхъ x и y должны быть опредѣлены изъ двухъ уравненій второй степени:

$$f(x, y) = ax^2 + by^2 + c + 2a'y + 2b'x + 2c'xy = 0,$$
$$\varphi(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma + 2\alpha'y + 2\beta'x + 2\gamma'xy = 0.$$

Въ частномъ случаѣ, если обѣ функціи f и φ разлагаются на линейныхъ множителей $f = f_1 f_2$, $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, рѣшенія получаются изъ четырехъ паръ линейныхъ уравненій:

$$1)\quad f_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0,$$
$$2)\quad f_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0,$$
$$3)\quad f_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0,$$
$$3)\quad f_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Общій случай приводится къ этому частному случаю; приходится только разрѣшить предварительно нѣкоторое уравненіе третьей степени.

Чтобы это показать, составимъ функцію

$$F = f + \lambda\varphi,$$

гдѣ λ означаетъ произвольный коэффиціентъ. Функція второй степени F обращается въ нуль для всѣхъ тѣхъ паръ значеній x и y, для которыхъ одновременно обращаются въ нуль функціи f и φ.

Полагая детерминантъ (3) функціи F равнымъ нулю, мы получимъ кубическое уравненіе относительно λ.

$$\begin{vmatrix} a + \lambda\alpha, & c' + \lambda\gamma', & b' + \lambda\beta' \\ c' + \lambda\gamma', & b + \lambda\beta, & a' + \lambda\alpha' \\ b' + \lambda\beta', & a' + \lambda\alpha', & c + \lambda\gamma \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Слѣдовательно, троякимъ образомъ можно λ опредѣлить такъ, чтобы функція F разлагалась на линейныхъ множителей. Если λ_1 и λ_2 суть два различныхъ корня этого кубическаго уравненія, то обѣ функціи

$$F_1 = f + \lambda_1\varphi, \quad F_2 = f + \lambda_2\varphi$$

разлагаются на линейныхъ множителей [9]).

---

[9]) Мы найдемъ, слѣдовательно, системы значеній x и y, которыя обращаютъ

Этимъ путемъ мы сразу приходимъ къ кубической резольвентѣ, не прибѣгая къ вычисленію коэффиціентовъ уравненія четвертой степени, которое получается исключеніемъ y или x изъ системы $f=0$ и $\varphi=0$.

4. Уравненіе четвертой степени можно самыми разнообразными способами замѣнить двумя квадратными уравненіями съ двумя неизвѣстными. Эта замѣна даетъ возможность рѣшить уравненіе четвертой степени изложеннымъ сейчасъ методомъ. Наиболѣе простой путь слѣдующій.

Пусть дано уравненіе четвертой степени:

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0. \qquad (5)$$

Положимъ

$$xy-1=0 \text{ [10]}; \qquad (6)$$

помножая уравненіе (5) на y^2, получимъ:

$$x^2+a_1x+a_2+a_3y+a_4y^2=0. \qquad (7)$$

Кубическая резольвента относительно λ [11]) имѣетъ видъ:

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{2}\lambda, & \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{2}\lambda, & a_4, & \frac{1}{2}a_3 \\ \frac{1}{2}a_1, & \frac{1}{2}a_3, & a_2-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или въ развернутомъ видѣ:

$$\lambda^3-\lambda^2a_2+\lambda(a_1a_3-4a_4)+4a_2a_4-a_1^2a_4-a_3^2=0;$$

это уравненіе совпадаетъ съ резольвентой, найденной въ § 89,6

5. Чтобы сообщить наглядность полученнымъ результатамъ, посмотримъ, *какое значеніе они имѣютъ въ аналитической геометріи.* Если x и y суть прямоугольныя координаты, то уравненіе второй степени $f(x, y)=0$ выражаетъ коническое сѣченіе. Два коническихъ сѣченія $f=0$ и $\varphi=0$ пересѣкаются въ четырехъ точкахъ. Черезъ эти четыре точки 1, 2, 3, 4 можно тремя способами провести двѣ прямыя, а именно: $\overline{12}$, $\overline{34}$; $\overline{13}$, $\overline{24}$; $\overline{14}$, $\overline{23}$; зная уравненія этихъ паръ линій, мы опредѣлили бы четыре точки пересѣченія 1, 2, 3, 4 изъ линейныхъ уравненій.

Каждое коническое сѣченіе, выражаемое уравненіемъ вида $f+\lambda\varphi=0$, проходитъ черезъ точки пересѣченія обоихъ коническихъ сѣченій $f=0$

въ нуль функціи F_1 и F_2; тѣ же значенія обращаютъ въ нуль f и φ - и обратно.

[10]) Т. е. присоединимъ къ уравненію (5) еще уравненіе (6). Затѣмъ уравненіе (5) замѣняется уравненіемъ (7) и мы получаемъ два уравненія (6) и (7) второй степени.

[11]) Для уравненій (6) и (7).

и $\varphi = 0$. Если λ можетъ принимать различныя произвольныя значенія, то совокупность всѣхъ коническихъ сѣченій, выражаемыхъ уравненіемъ $f + \lambda\varphi = 0$, называется пучкомъ коническихъ сѣченій. Въ каждомъ такомъ пучкѣ содержатся три особыхъ коническихъ сѣченія, которыя состоятъ каждое изъ двухъ пересѣкающихся прямыхъ линій; соотвѣтствующія значенія λ получаются, какъ корни кубическаго уравненія (4). Подробнѣе этотъ вопросъ разсматривается въ главѣ, посвященной аналитической геометріи.

ГЛАВА XVII.

Приближенное вычисленіе корней численныхъ уравненій.

§ 91. Декартово правило знаковъ.

1. Вопросъ объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій имѣетъ очень мало значенія для практическихъ вычисленій. Для этой цѣли нужно только умѣть по даннымъ численнымъ коэффиціентамъ уравненія вычислить его корни съ опредѣленнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ; иначе говоря, нужно найти два раціональныхъ числа, разность которыхъ не превышаетъ нѣкоторой данной величины и между которыми лежить опредѣляемый корень. Эта задача всегда разрѣшима; мало того, для этого существуютъ такіе простые и практическіе способы, что нерѣдко предпочитаютъ пользоваться ими для уравненій третьей и четвертой степени, чѣмъ вычислять алгебраическое выраженіе корня, напримѣръ, по формулѣ Кардана.

2. Если коэффиціентами даннаго уравненія служатъ раціональныя числа, то прежде всего, по способу, указанному въ § 63,1, нужно посмотрѣть, не имѣетъ ли оно раціональныхъ корней; если a есть такой корень, то, раздѣляя $f(x)$ на $x-a$, получаемъ уже уравненіе низшей степени. Чтобы возможно болѣе упростить вычисленіе корней, слѣдуетъ предварительно на всякій случай попробовать разложить функцію $f(x)$ на множителей низшихъ степеней (§ 63).

3. Если α и β суть два такихъ числа, что $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имѣютъ различные знаки, то между α и β навѣрное заключается по крайней мѣрѣ одинъ корень; въ самомъ дѣлѣ, если x проходить черезъ всѣ значенія отъ α до β, то $f(x)$ переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ; при этомъ функція $f(x)$ должна (§ 66, 5.) пройти также черезъ значеніе нуль. Можетъ случиться, что $f(x)$ пройдетъ черезъ нуль три раза, пять и вообще нечетное число разъ; въ этомъ случаѣ между α и β будутъ находиться три, пять и т. д. корней [1]).

[1]) Изъ разсужденій автора вытекаетъ только, что функція $f(x)$ должна обра-

При этомъ нужно имѣть въ виду, что тѣ значенія x, при которыхъ $F(x)$ обращается въ нуль, не мѣняя своего знака, нужно считать два или вообще четное число разъ [2]).

4. Прежде всего, однако, возникаетъ вопросъ, сколько вообще корней [3]) имѣетъ данное уравненіе и. въ частности, сколько оно имѣетъ положительныхъ и отрицательныхъ корней. Прежде чѣмъ этотъ вопросъ былъ окончательно и вполнѣ рѣшенъ теоремой Штурма; *) былъ установлено нѣсколько предложеній, не дававшихъ, правда, общаго и вполнѣ точнаго отвѣта на этотъ вопросъ, но все же очень полезныхъ, благодаря своей простотѣ. Наиболѣе простымъ и наиболѣе извѣстнымъ изъ этихъ предложеній является Декартово правило знаковъ. Въ формулировкѣ и доказательствѣ этого предложенія мы будемъ слѣдовать Гауссу **).

5. Пусть X будетъ полиномъ m-ой степени, въ которомъ коэффиціентъ при x^m равенъ 1, а свободный членъ не равенъ нулю, такъ что 0 не принадлежитъ къ числу корней этого полинома. Если мы расположимъ полиномъ X по убывающимъ степенямъ перемѣннаго x, то онъ будетъ

щаться въ нуль между α и β, если $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имѣютъ противоположные знаки. Но допустимъ, что между α и β функція уничтожается только при $x=\gamma$. Можемъ ли мы утверждать, что γ есть корень нечетной кратности? Можемъ ли мы утверждать, что между α и β есть нечетное число корней, если каждый корень считать по степени его кратности? Это изъ разсужденій автора не вытекаетъ, хотя доказывается очень просто.

Пусть $a_1, a_2, \ldots a_n$ будутъ корни функціи $f(x)$. Тогда

$$F(x) = a(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

$$\frac{F(\alpha)}{F(\beta)} = \left(\frac{\alpha-a_1}{\beta-a_1}\right)\left(\frac{\alpha-a_2}{\beta-a_2}\right)\ldots\left(\frac{\alpha-a_n}{\beta-a_n}\right).$$

Если $F(\alpha)$ и $F(\beta)$ имѣютъ различные знаки, то $\frac{F(\alpha)}{F(\beta)}$ есть отрицательная дробь а потому въ правой части предыдущаго равенства должно быть нечетное число отрицательныхъ множителей вида

$$\frac{\alpha-a_i}{\beta-a_i}$$

Но такая дробь имѣетъ отрицательное значеніе только въ томъ случаѣ, если a_i содержится между α и β. Слѣдовательно, между α и β заключается нечетное число корней a_i.

[2]) Точнѣе говоря, если функція $F(x)$ проходитъ черезъ корень γ, не мѣняя при этомъ знака, то γ есть корень четной кратности. Это доказывается точно такъ же, какъ предыдущее предложеніе въ примѣчаніи [1]).

[3]) Конечно, вещественныхъ.

*) J. F. K. Sturm (род. 1803 въ Женевѣ, ум. 1855 въ Парижѣ) далъ эту теорему въ работѣ, озаглавленной: „Mémoire sur la résolution des équations numériques“ 1835. Сочиненіе это было написано на соисканіе преміи и премировано Парижской Академіей.

**) Указаніе на это предложеніе имѣется уже у Кардана; ясно же и опре-

начинаться съ коэффиціента $+1$. Вопросъ сводится къ тому, сколько разъ происходитъ перемѣна знака при коэффиціентахъ, когда мы переходимъ отъ перваго члена къ послѣднему; недостающіе степени при этомъ не проставляются съ коэффиціентами 0, а просто опускаются.

Положимъ теперь, что въ нашемъ полиномѣ первый отрицательный членъ есть $-Nx^n$, которому предшествуетъ членъ $N'x^{n'}$; пусть, далѣе, Px^p будетъ ближайшій за нимъ положительный членъ, которому предшествуетъ отрицательный членъ $-P'x^{p'}$, и т. д. Наконецъ, пусть $\pm Sx^s$ будетъ членъ, при которомъ въ послѣдній разъ происходитъ перемѣна знака и которому, такимъ образомъ, предшествуетъ членъ $\mp S'x^{s'}$. Знакъ $\pm$ сохраняется уже, слѣдовательно, до конца, т. е. вплоть до независимаго члена $\pm T$.

Сообразно этому мы представимъ полиномъ X въ видѣ:

$$\begin{aligned} X = x^m + \ldots + N'x^{n'} - \\ - Nx^n - \ldots - P'x^{p'} + \\ + Px^p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad \mp S'x^{s'} \pm \\ \pm Sx^s \pm \quad . \quad . \quad \pm T. \end{aligned} \tag{1}$$

Первая строка содержитъ положительные члены, вторая—отрицательные, третья опять положительные и т. д.; такимъ образомъ, число строкъ на 1 больше, нежели число перемѣнъ знака при коэффиціентахъ полинома X, каковое число мы обозначимъ черезъ w.

6. Исходя отъ выраженія (1), мы составимъ теперь произведеніе

$$X_1 = X(x - \alpha), \tag{2}$$

гдѣ α представляетъ собой произвольное положительное число; мы получимъ выраженіе $(m+1)$-ой степени:

$$\begin{aligned} X_1 = x^{m+1} + \ldots \\ - N_1 x^{n+1} \\ + P_1 x^{p+1} + \ldots \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \pm S_1 x^{s+1} \pm \\ \pm T_1. \end{aligned} \tag{3}$$

дѣленно оно формулировано впервые въ „Геометріи“ Декарта (1637). Джонъ Валлисъ (John Wallis) въ своемъ „Treatise of Algebra“ (1685) приписываетъ открытіе этого предложенія Ѳомѣ Гарріоту (Thomas Harriot жилъ въ Оксфордѣ 1560 - 1621); Канторъ полагаетъ, однако, что это неправильно („Geschichte der Mathematik,“ Bd. III. S. 4). Тѣмъ не менѣе это предложеніе и теперь еще часто называютъ теоремой Гарріота. Ср. Gauss, „Beweis eines algebraischen Lehrsatzes,“ Werke, Bd. III, S. 67.

Если n' больше, чѣмъ $n+1$, то въ этомъ выраженіи $N_1 = N$; если же $n' = n+1$, то $N_1 = N + \alpha N'$; поэтому N_1 во всякомъ случаѣ представляетъ собой положительное число.

Какъ измѣняются знаки въ каждой изъ строкъ (3), указать нельзя. Но во всякомъ случаѣ при переходѣ отъ x^{m+1} къ $-N_1 x^{n+1}$ знакъ мѣняется одинъ или нѣсколько разъ и при томъ непремѣнно нечетное число разъ [4]).

То же самое относится также къ переходу отъ $-N_1 x^{n+1}$ къ $+P_1 x^{p+1}$ и т. д. и, наконецъ, къ переходу отъ $\pm S_1 x^{s+1}$ къ $\mp T_1$.

Такимъ образомъ, число перемѣнъ w_1 въ полиномѣ X_1 превышаетъ число перемѣнъ w въ полиномѣ X по крайней мѣрѣ на единицу и во всякомъ случаѣ на нечетное число [5]); слѣдовательно,

$$w_1 = w + 1 + g,$$

гдѣ g есть четное не отрицательное число (т. е. $g \geqslant 0$).

7. Если функція X не имѣетъ положительныхъ корней, то въ ряду ея коэффиціентовъ либо вовсе нѣтъ перемѣнъ, либо таковыхъ имѣется четное число. Въ самомъ дѣлѣ, при нечетномъ числѣ перемѣнъ послѣдній членъ $\pm T$ имѣетъ отрицательное значеніе, а потому функція при $x = 0$ имѣетъ отрицательное значеніе; между тѣмъ, при достаточно большихъ значеніяхъ x, функція имѣетъ значенія того же знака, что и x^{m+1}, т. е. положительное. Слѣдовательно, при такихъ условіяхъ функція имѣла бы по крайней мѣрѣ одинъ положительный корень.

8. Выдѣлимъ теперь всѣ положительные корни функціи $f(x)$; пусть это будетъ $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ Тогда

$$f(x) = X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$

гдѣ x есть цѣлая функція, имѣющая только отрицательные или мнимые корни; если функція $f(x)$ имѣетъ исключительно положительные корни, то X сводится къ 1.

Согласно тому, что было изложено въ п. 6-омъ, введеніе каждаго изъ множителей $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma \ldots$ прибавляетъ къ числу перемѣнъ, имѣющихся въ функціи X, еще одну или во всякомъ случаѣ нечетное число ихъ. Принимая же во вниманіе, что въ полиномѣ X, какъ показано въ пунктѣ 7, имѣется четное число перемѣнъ, мы приходимъ къ слѣдующему выводу:

Число положительныхъ корней цѣлой функціи $f(x)$ либо

[4]) Ибо послѣ четнаго числа перемѣнъ мы возвратились бы къ тому же знаку $+$, а не къ обратному.

[5]) Нужно принять во вниманіе, что число строкъ (3) на 1 больше числа строкъ (2).

ровно числу перемѣнъ въ ряду ея коэффиціентовъ, либо меньше послѣдняго на четное число.

9. Каждому отрицательному корню функціи $f(x)$ отвѣчаетъ положительный корень функціи $f(-x)$; сообразно этому мы можемъ дополнить это предложеніе слѣдующимъ образомъ:

Число отрицательныхъ корней функціи $f(x)$ либо равняется числу перемѣнъ въ ряду коэффиціентовъ функціи $f(-x)$, либо меньше его нечетнымъ числомъ.

10. Мы примѣнимъ правило Декарта къ изслѣдованію уравненій 4-ой степени. Пусть

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$$
$$f(-x) = x^4 + ax^2 - bx + c.$$

Коэффиціенты a, b и c мы считаемъ отличными отъ нуля. Въ такомъ случаѣ относительно знаковъ при коэффиціентахъ функцій $f(x)$ и $f(-x)$ возможны 8 различныхъ комбинацій:

	$f(x)$				w	$f(-x)$				w
1)	+	+	+	+	0	+	+	−	+	2
2)	+	+	−	+	2	+	+	+	+	0
3)	+	−	+	+	2	+	−	−	+	2
4)	+	−	−	+	2	+	−	+	+	2
5)	+	+	+	−	1	+	+	−	−	1
6)	+	+	−	−	1	+	+	+	−	1
7)	+	−	+	−	3	+		−		1
8)	+	−	−	−	1	+	−	+	−	3

Въ колоннахъ, помѣченныхъ буквою w, указано число перемѣнъ соотвѣтствующаго ряда.

Если мы присоединимъ къ этому результатъ, полученный въ § 88, что уравненіе при отрицательномъ дискриминантѣ имѣетъ два вещественныхъ и два мнимыхъ корня, а при положительномъ дискриминантѣ имѣетъ либо 4 вещественныхъ, либо 4 мнимыхъ корня, то правило Декарта приводитъ въ указанныхъ 8 случаяхъ къ слѣдующимъ выводамъ:

1) $D > 0$; 4 мнимыхъ корня.
   $D < 0$; 2 мнимыхъ и 2 вещественныхъ отрицательныхъ корня.

2) $D > 0$; 4 мнимыхъ корня.
   $D < 0$; 2 мнимыхъ и 2 вещественныхъ положительныхъ корня.

Въ случаяхъ 3) и 4) знаки дискриминанта и коэффиціентовъ еще не разрѣшаютъ вопроса; въ этомъ случаѣ какъ число положительныхъ, такъ и число отрицательныхъ корней можетъ быть равно либо 2, либо 0.

Въ случаяхъ 5) и 6) мы имѣемъ 1 положительный и 1 отрицательный корень; дискриминантъ необходимо долженъ имѣть въ этихъ случаяхъ отрицательное значеніе, какъ это, впрочемъ, вытекаетъ и непосредственно изъ выраженія, приведеннаго въ § 88,2.

Въ случаѣ 7) мы имѣемъ 1 отрицательный корень и либо 1, либо 3 положительныхъ, смотря по тому, имѣетъ ли дискриминантъ положительное или отрицательное значеніе. Наконецъ, въ случаѣ 8) мы имѣемъ 1 положительный корень и либо 1 либо 3 отрицательныхъ.

§ 92. Теорема Штурма.

1. Научнымъ основаніемъ всякаго метода приближеннаго рѣшенія алгебраическихъ уравненій служитъ теорема Штурма. Эта теорема даетъ возможность точно указать, сколько корней данной функціи $f(x)$ n-той степени заключается между двумя данными предѣлами. Эта теорема, основная мысль которой очень проста, вытекаетъ изъ непрерывности цѣлой функціи; такая функція при непрерывномъ измѣненіи перемѣннаго x не можетъ перейти отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, не проходя при этомъ черезъ нуль.

2. Если x_1 есть корень функціи $f(x)$, то $f(x)$ дѣлится на $x-x_1$. Если положимъ

$$f(x) = (x - x_1)\, F(x), \qquad (1)$$

а черезъ $f_1(x)$ обозначимъ производную функціи, $f(x)$, то по § 61, 4

$$F(x_1) = f_1(x_1).$$

Предположимъ, что $f(x)$ и $f_1(x)$ не имѣютъ общихъ корней или что функція $f(x)$ заранѣе освобождена отъ общихъ множителей съ функціей $f_1(x)$. Тогда $f_1(x_1)$, а слѣдовательно, и $F(x_1)$, отлично отъ нуля и можетъ имѣть либо положительное, либо отрицательное значеніе. Вмѣстѣ съ тѣмъ функція $F(x)$ не мѣняетъ знака, по крайней мѣрѣ пока x достаточно близко къ x_1.

Изъ равенства (1) слѣдуетъ:

Если $f_1(x_1)$ имѣетъ положительное значеніе и x проходитъ черезъ значеніе x_1, возрастая, то $f(x)$ проходитъ черезъ нуль, также возрастая, т. е. переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ.

Если $f_1(x_1)$ имѣетъ отрицательное значеніе, то $f(x)$ переходитъ отъ

положительныхъ значеній къ отрицательнымъ.

Тотъ и другой случай можно соединить въ одно предложеніе:

Если x, возрастая, переходитъ черезъ корень x_1 функціи $f(x)$, то функціи

$$f(x), \quad f_1(x)$$

переходятъ отъ различныхъ знаковъ къ одинаковымъ [2]).

3. Произведемъ теперь рядъ дѣленій, какъ это дѣлается при нахожденіи общаго наибольшаго дѣлителя двухъ функцій $f(x)$ и $f_1(x)$ (§ 62). Разница будетъ заключаться только въ обозначеніяхъ, а именно: каждый остатокъ будемъ соотвѣтственно обозначать черезъ $-f_2$, $-f_3$, ... [3]). Пусть Q, Q_1, Q_2, ..., будутъ частныя; тогда:

$$\begin{aligned} f &= Qf_1 - f_2, \\ f_1 &= Q_1 f_2 - f_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_{m-2} &= Q_{m-2} f_{m-1} - f_m. \end{aligned} \qquad (2)$$

Степени функцій f, f_1, f_2 ... постоянно понижаются. Мы продолжимъ нашъ алгориѳмъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ функцію f_m, уже не зависящую отъ x. Такъ какъ по предложенію f и f_1 не имѣютъ общихъ множителей, то f_m есть постоянная, отличная отъ нуля. Изъ этого предположенія вытекаетъ также, что въ ряду функцій Штурма

$$f, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m \qquad (3)$$

два рядомъ стоящихъ члена f_r, f_{r+1} ни при какомъ значеніи x одновременно не могутъ обратиться въ нуль. Дѣйствительно, для такого значенія x должны были бы обратиться въ нуль одновременно функціи f и f_1, что противно условію [4]).

4. Взявъ значенія членовъ ряда (3) для какого нибудь значенія пе-

---

[2]) Это значитъ: вблизи x_1 функціи $f(x)$ и $f_1(x)$ имѣютъ сначала различные знаки, а потомъ одинаковые. Или еще иначе: функція $f(x)$ имѣетъ вблизи корня x_1 до уничтоженія тотъ же знакъ, что и ея производная, а послѣ уничтоженія противоположный знакъ.

[3]) Иначе говоря, раздѣливъ $f(x)$ на $f_1(x)$, мы получимъ нѣкоторый остатокъ; при этомъ остаткѣ мы перемѣнимъ знакъ на обратный и функцію, полученную послѣ перемѣны знака, обозначимъ черезъ $f_2(x)$. Точно такъ же раздѣлимъ $f_1(x)$ на $f_2(x)$ и при остаткѣ перемѣнимъ знакъ: полученную такимъ образомъ функцію обозначимъ черезъ $f_3(x)$.

[4]) Если, напримѣръ, $f_4(x_1)$ и $f_3(x_1)$ равны нулю, то третье равенство въ ряду (2) обнаруживаетъ, что и $f_2(x_1) = 0$, а два предыдущихъ равенства обнаруживаютъ, что $f_1(x_1) = 0$ и $f(x_1) = 0$.

ремѣннаго x, мы получимъ рядъ чиселъ; въ этомъ ряду мы будемъ называть перемѣной знака, если два рядомъ стоящихъ члена f_ν и $f_{\nu+1}$ имѣютъ различные знаки, и постоянствомъ знаковъ, если два рядомъ стоящихъ члена имѣютъ одинаковые знаки.

Для каждаго такого значенія x, для котораго ни одна изъ функцій (3) не обращается въ нуль, мы получимъ опредѣленное число перемѣнъ. Сообразно этому теорема Штурма выражается такъ:

Если α и β суть два значенія x и $\alpha < \beta$, то число корней функціи $f(x)$, содержащихся между α и β, равно числу перемѣнъ въ ряду Штурма (3), которыя теряются при переходѣ отъ $x = \alpha$ къ $x = \beta$[5]).

5. Доказательство этой теоремы очень просто. Потеря перемѣнъ или появленіе новыхъ перемѣнъ въ ряду Штурма можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если одна изъ функцій проходитъ черезъ нуль. Но если $0 < \nu < m$, и $f_\nu(x_0) = 0$, то въ виду соотношеній (2) $f_{\nu-1}(x_0) = -f_{\nu+1}(x_0)$, т. е. $f_{\nu-1}$ и $f_{\nu+1}$ при $x = x_0$ и вблизи этого значенія имѣютъ противные знаки. Въ ряду трехъ послѣдовательныхъ функцій

$$f_{\nu-1}(x), \quad f_\nu(x), \quad f_{\nu+1}(x)$$

какъ до, такъ и послѣ перехода черезъ x_0 будетъ одна перемѣна и, слѣдовательно, при переходѣ черезъ нуль функціи $f_\nu(x)$ не произойдетъ ни потери перемѣнъ, ни появленія новыхъ перемѣнъ.

Такъ какъ f_m вообще не равно нулю, то измѣненіе въ числѣ перемѣнъ можетъ произойти только въ томъ случаѣ, если x проходитъ черезъ корень функціи $f(x)$. Въ п. 2 мы уже показали, что въ послѣднемъ случаѣ всякій разъ происходитъ потеря одной перемѣны. Теорема доказана.

6. Вычисленія, которыя необходимо сдѣлать, примѣняя теорему Штурма, часто можно упростить, руководствуясь слѣдующими замѣчаніями.

При составленіи послѣдовательныхъ функцій $f, f_1, f_2 \ldots$ можно отбрасывать положительныхъ численныхъ множителей, такъ какъ это не влія-

[5]) Выяснимъ нѣсколько подробнѣе содержаніе этой теоремы. Составимъ ряды

$$f(\alpha),\ f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ \ldots f_m(\alpha)$$
$$f(\beta),\ f_1(\beta),\ f_2(\beta),\ \ldots f_m(\beta).$$

Если $\alpha < \beta$, то число перемѣнъ въ первомъ ряду ни въ какомъ случаѣ не можетъ быть меньше, нежели во второмъ. Если въ обоихъ рядахъ одинаковое число перемѣнъ, то функція $f(x)$ не имѣетъ корней въ интервалѣ между α и β. Если же число перемѣнъ въ первомъ ряду превышаетъ число перемѣнъ во второмъ ряду, т. е. если при переходѣ отъ α къ β теряется нѣкоторое число перемѣнъ,

етъ на знаки, и всѣ наши разсужденія останутся въ силѣ.

Если при дѣленіи мы придемъ къ функціи f_m, относительно которой мы знаемъ, что она, не будучи постоянной, все таки не мѣняетъ знака при переходѣ x отъ α до β, то мы можемъ не продолжать вычисленій, такъ какъ мы опирались только на то свойство функціи f_m, что она не мѣняетъ знака въ изслѣдуемомъ интервалѣ.

7. Примѣръ I. Составимъ рядъ Штурма для функціи

$$f(x) = x^3 - 6x + 2.$$

Отбрасывая положительныхъ численныхъ множителей, мы получимъ:

$$f_1(x) = x^2 - 2,$$
$$f_2(x) = 2x - 1,$$
$$f_3(x) = -1;$$

знаки будутъ слѣдующіе:

	$x = -3,$	$-2,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$2,$	3
$x^3 - 6x + 2$:	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x^2 - 2$:	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x - 1$:	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$+1$:	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Для $x = -3$ имѣемъ три перемѣны, а для $x = +3$—ни одной; слѣдовательно, между этими предѣлами заключены всѣ три корня.

Одна перемѣна теряется между -3 и -2; слѣдовательно, одинъ изъ корней заключается между этими предѣлами.

Вторая перемѣна теряется между 0 и 1, а третья между 2 и 3; въ каждомъ изъ этихъ интерваловъ содержится по одному корню.

8. Примѣръ II.

$$f(x) = x^3 - \frac{15}{11}x^2 + \frac{5}{11}x - \frac{5}{231},$$

$$f_1(x) = x^2 - \frac{10}{11}x + \frac{5}{33},$$

$$f_2(x) = x - \frac{3}{7}$$

$$f_3(x) = 1.$$

Для $x = 0$ имѣемъ знаки:

$$- \quad + \quad - \quad +,$$

то число корней функціи $f(x)$, содержащихся между α и β, равно числу потерянныхъ перемѣнъ.

т. е. три перемѣны, а для $x=1$

$$+\quad+\quad+\quad+;$$

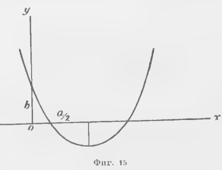
слѣдовательно, всѣ корни содержатся между 0 и 1.

12. Для практическихъ цѣлей можно не примѣнять теоремы Штурма, если можно убѣдиться другимъ путемъ въ томъ, что между двумя данными предѣлами заключается только одинъ корень. Такъ, напримѣръ, это имѣетъ мѣсто, если извѣстно число всѣхъ вещественныхъ корней и имѣется такое же число интерваловъ, въ каждомъ изъ которыхъ навѣрно содержится по крайней мѣрѣ одинъ корень.

§ 93. Regula Falsi.

1. Дадимъ функціи $f(x)$ геометрическое значеніе и сдѣлаемъ такимъ образомъ нагляднымъ расположеніе ея корней.

Для этого условимся изображать значенія x отрѣзками на прямой линіи, взявши произвольное начало и единицу длины; значенія $y=f(x)$ будемъ подобнымъ же образомъ откладывать на перпендикулярѣ, возставленномъ въ конечной точкѣ отрѣзка x. Единица длины въ которой выражается y, совершенно произвольна и, если угодно, можетъ быть отлична отъ единицы, взятой для x. Положительныя значенія y будемъ откладывать вверхъ, а отрицательныя внизъ. Значенія x будутъ служить абсциссами, а y—ординатами точекъ кривой, которую получимъ, соединяя конечныя точки ординатъ между собой. Корнями уравненія $f(x)=0$ будутъ абсциссы тѣхъ точекъ, въ которыхъ $y=0$, т. е. точекъ пересѣченія кривой съ осью абсциссъ.



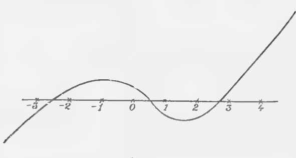
Фиг. 15

Пусть, напримѣръ, $f(x)=x^2+ax+b$; наша кривая будетъ параболой съ вершиной, обращенной внизъ (фиг. 15); $f(x)$ имѣетъ два вещественныхъ корня, если вершина лежитъ ниже линіи абциссъ, два мнимыхъ, если она расположена выше ея.

Разобранный выше примѣръ

$$y=x^3-6x+2$$

воспроизводитъ приблизительно фиг. 16.

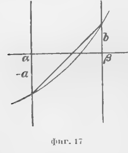


Фиг. 16.

2. Если между двумя числами α и β $(\alpha < \beta)$ содержится одинъ корень функціи $f(x)$, то $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ должны быть различны по знакамъ; пусть $f(\alpha) = -a$ имѣетъ отрицательное значеніе, а $f(\beta) = b$ положительное. Эти числа α и β можно считать первыми приближенными значеніями содержащагося между ними корня; каждому изъ этихъ значеній отвѣчаетъ опредѣленная погрѣшность.

Если, напримѣръ, α и β суть два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, а корень выражается десятичной дробью, то a есть число, стоящее передъ запятой.

Если ξ есть погрѣшность, соотвѣтствующая приближенному значенію α, то $\alpha + \xi = x$ есть искомый корень функціи; съ другой стороны $x = \beta - (\beta - \alpha - \xi) = \beta - \eta$, т. е. погрѣшность, соотвѣтствующая значенію β, равна $(\beta - \alpha - \xi)$; если при этомъ α меньше корня, то β больше его. Для дальнѣйшаго приближенія къ корню обыкновенно принимаютъ сначала, что погрѣшность значенія α больше погрѣшности β, если $f(\alpha)$ больше отличается отъ нуля, чѣмъ $f(\beta)$, и что приблизительно обѣ погрѣшности можно считать пропорціональными абсолютнымъ величинамъ $f(\alpha)$ и $f(\beta)$. Геометрически это соотвѣтствуетъ предположенію, что отрѣзокъ кривой, изображающей $f(x)$, между точками $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ есть прямолинейный отрѣзокъ (фиг. 17).



фиг. 17

Въ этомъ предположеніи:

$$\xi : \beta - \alpha - \xi = a : b,$$
$$b\xi = a(\beta - \alpha) - a\xi,$$
$$\xi = \frac{a(\beta - \alpha)}{a + b}. \qquad (1)$$

т. е.

$$x = \alpha + \xi = \frac{\alpha b + \beta a}{a + b}. \qquad (2)$$

Это равенство, конечно, неточно, но оно даетъ для x значенie болѣе близкое къ истинному, чѣмъ α и β.

Если $\beta - \alpha = 1$, то

$$\xi = \frac{a}{a + b}; \qquad (3)$$

это выраженie даетъ одинъ или, смотря по обстоятельствамъ, нѣсколько точныхъ десятичныхъ знаковъ послѣ запятой. Приближенное вычисленie, основанное на формулахъ (1) или (2), называется Regula falsi.

3. Если α есть приближенное значенie корня, вычисленное съ достаточной степенью точности, то его можно исправить далѣе еще другимъ способомъ. Положимъ, $x = a + \xi$ и, прилагая къ отдѣльнымъ степенямъ $a + \xi$ правило бинома, расположимъ $f(a + \xi)$ по степенямъ ξ:

$$f(\alpha + \xi) = m_0 + m_1\xi + m_2\xi^2 + m_3\xi^3 + \ldots \qquad (4)$$

Число ξ нужно опредѣлить такъ, чтобы это выраженie стало равнымъ 0. Сначала можетъ показаться, что это нисколько не упрощаетъ задачи, такъ какъ для ξ мы получаемъ уравненie той же степени, что и первоначальное. Но когда α уже близко къ дѣйствительному значенiю корня, то ξ есть малая дробь, и высшiя степени ея для слѣдующаго приближенiя можно отбросить, если коэффицiенты m_2, m_3, ... не очень велики. Для погрѣшности, соотвѣтствующей значенiю α, мы получаемъ:

$$\xi = -\frac{m_0}{m_1}. \qquad (5)$$

Иногда лучше принять въ соображенie и слѣдующiй членъ; ξ опредѣлится тогда изъ квадратнаго уравненiя:

$$m_0 + m_1\xi + m_2\xi^2 = 0,$$

откуда

$$\xi = \frac{-m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_0m_2}}{2m_2}. \qquad (6)$$

Имѣя въ виду, что ξ должно быть малой дробью, нужно взять корень съ тѣмъ знакомъ, какой имѣетъ m_1.

Этоть способъ данъ Ньютономъ и поэтому называется **Ньютоновымъ способомъ вычисленія корней.** Тоть же пріемъ иногда примѣняють также и въ томъ случаѣ, если нужно предъ тѣмъ, какъ приступить къ ближайшему вычисленію корней, приблизительно опредѣлить величину **большихъ корней**: для этого изъ всей функціи, расположенной по степенямъ x, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$, оставляютъ только два первыхъ высшихъ члена, такъ что, при грубомъ приближеніи, x полагаютъ равнымъ $-a_1/a_0$.

4. На практикѣ нельзя ограничиваться непремѣнно какимъ либо однимъ изъ этихъ способовъ; смотря по обстоятельствамъ, примѣняютъ то тотъ, то другой. Но рѣшеніе задачи всегда сводится къ тому, что должны быть найдены двѣ десятичныя дроби α, α' съ одинаковымъ числомъ знаковъ (ε), которыя отличаются только на одну единицу послѣдняго разряда и при которыхъ $f(\alpha)$ и $f(\alpha')$ имѣютъ различные знаки: тогда истинное значеніе корня лежитъ между α и α' и погрѣшность меньше, нежели $10^{-\varepsilon}$. Если желательно вычислить дальнѣйшіе знаки, то къ α съ правой стороны приписываютъ цифры отъ 0 до 10 и изъ полученныхъ такимъ образомъ чиселъ вновь выбираютъ два послѣдовательныхъ значенія α_1 и α_1', для которыхъ $f(\alpha_1)$ и $f(\alpha_1')$ имѣютъ разные знаки. Примѣняя цѣлесообразно изложенные способы, можно очень сократить число необходимыхъ для этого испытаній.

При вычисленіяхъ этого рода очень полезно пользоваться таблицами степеней или логариѳмическими таблицами, если это допускаетъ требуемая точность вычисленій.

§ 94. Примѣръ.

1. Для примѣра возьмемъ уравненіе 5-той степени

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

Въ данномъ случаѣ

$$f(-2) = -26,\ f(-1) = +1,\ f(0) = -2,\ f(1) = -5,\ f(2) = +22,$$

а слѣдовательно, корень x_1 находится между 1 и 2, корень x_2 — между 1 и 0, x_3 между -2 и -1, остальные два корня мнимые. Вычислимъ сначала x_1.

Regula falsi § 93,(1) даетъ для ξ значеніе 5/27, т. е. около 0,2; это значеніе мало, такъ какъ даже $f(1{,}5) = (\frac{3}{2})^5 - 8 = -13/32$ имѣетъ еще отрицательное значеніе: слѣдовательно, ξ больше 0,5.

Ньютоновъ способъ даетъ лучшій результатъ.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $x = 1 + \xi$; тогда:

$$x^5 = \xi^5 + 5\xi^4 + 10\xi^3 + 10\xi^2 + 5\xi + 1,$$
$$x^5 - 4x - 2 = \xi^5 + 5\xi^4 + 10\xi^3 + 10\xi^2 + \xi - 5.$$

Приближенное значеніе ξ мы будемъ находить не по двумъ, а по тремъ послѣднимъ членамъ [6]:

$$10\xi^2 + \xi - 5 = 0$$

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{201}}{20}, \text{ т. е. около } 0,6.$$

Дальнѣйшія вычисленія производятся, какъ показано въ слѣдующей таблицѣ, понятной безъ объясненій.

x	$\log x$	$5 \log x$	x^5	$4x + 2$	$f(x)$
1,5	0,1760913	0,8804565	7,593754	8	— 0,406246
1,6	0,2041200	1,0206000	10,485906	8,4	+ 2,085906
1,51	0,1789769	0,8868845	7,707015	8,04	— 0,232985
1,52	0,1818436	0,9092180	8,113682	8,08	+ 0,033682
1,518	0,1812718	0,9063590	8,060444	8,072	— 0,011546
1,519	0,1815578	0,9077890	8,087030	8,076	+ 0,011030
1,5185	0,1814148	0,9070740	8,073726	8,0740	— 0,000274
1,5186	0,1814434	0,9072170	8,076786	8,0744	+ 0,002386
1,51851	0,1814177	0,9070885	8,073996	8,074040	— 0,000034
1,51852	0,1814205	0,9071025	8,074256	8,074080	+ 0,000176
1,518511	0,1814180	0,9070900	8,074024	8,074044	— 0,000020
1,518512	0,1814183	0,9070915	8,074052	8,074048	+ 0,000004

Итакъ, значеніе

$$x_1 = 1,518512$$

очень близко къ истинному значенію корня.

Это значеніе превышаетъ нѣсколько истинное значеніе корня. Об-

[6] Если бы мы ограничились двумя членами, то получили бы никуда негодное значеніе $\xi = 5$.

ращаясь къ таблицѣ, мы видимъ по соотвѣтствующимъ значеніямъ $f(x)$, что корень лежитъ ближе къ верхнему предѣлу, чѣмъ къ нижнему.

2. Нужно замѣтить, что изъ каждой пары чиселъ два послѣднихъ десятичныхъ знака слѣдующей пары получаются, на основаніи Regula falsi, помощью очень простыхъ вычисленій. Кромѣ того нужно замѣтить, что въ нашемъ примѣрѣ Regula falsi даетъ всегда нижній предѣлъ, что явствуетъ изъ того, что между 1 и 2 кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью книзу.

Такъ, по значеніямъ 1,5 и 1,6 находимъ:

$$\xi = \frac{0,406246}{2,492152}\, 0,1 = 0.01.$$

Въ началѣ вычисленія достаточно принимать во вниманіе небольшое число десятичныхъ знаковъ. Мы вычислили корень съ тою точностью, какую позволяютъ семизначныя таблицы логариѳмовъ. Если желательна бóльшая точность, то либо пользуются логариѳмическими таблицами съ большимъ числомъ знаковъ, либо вычисляютъ безъ помощи логариѳмовъ, что также приводитъ къ требуемому результату, но сопряжено съ болѣе сложными вычисленіями. Въ послѣднемъ случаѣ можно пользоваться сокращеннымъ умноженіемъ.

3. Чтобы вычислить отрицательные корни, достаточно положить $x = -y$ и искать положительные корни уравненія

$$y^5 - 4y + 2 = 0.$$

Получимъ:

$$x_2 = -0,5084994$$
$$x_3 = 1,2435964.$$

4. Наше уравненіе имѣетъ еще пару сопряженныхъ мнимыхъ корней. Чтобы найти ихъ приближенныя значенія, положимъ:

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

По теоремѣ Муавра наше уравненіе представляется въ видѣ:

$$x^5 - 4x - 2 = r^5(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) - 4r(\cos\varphi + i\sin\varphi) - 2,$$

что даетъ два уравненія:

$$r^5\cos 5\varphi - 4r\cos\varphi - 2 = 0,$$
$$r^5\sin 5\varphi - 4r\sin\varphi = 0.$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ:

$$r^4 = \frac{4\sin\varphi}{\sin 5\varphi} \tag{1}$$

и тогда первое можетъ быть представлено въ видѣ:

$$2r(\sin\varphi\cos 5\varphi - \cos\varphi\sin 5\varphi) = \sin 5\varphi,$$

откуда

$$r = -\frac{\sin 5\varphi}{2\sin 4\varphi} \tag{2}$$

Обозначимъ уголь, дополнительный къ φ, черезъ ψ, иными словами, положимъ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$; тогда уравненія (1) и (2) могутъ быть представлены въ видѣ:

$$r^4 = \frac{4\cos\psi}{\cos 5\psi}, \quad r = \frac{\cos 5\psi}{2\sin 4\psi} \tag{3}$$

и

$$x = r\sin\psi + i\,r\cos\psi.$$

Возвысимъ въ 4-ую степень второе изъ равенствъ (3) и приравняемъ другъ другу оба выраженія, полученныя для r^4:

$$(\cos 5\psi)^5 - 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0.$$

Если положимъ $\psi = 0$, то лѣвая часть равна 1, т. е. имѣетъ положительное значеніе. Если же $\psi = 10^0$, то $\cos 5\psi = \sin 4\psi$, и лѣвая часть

$$(\sin 40^0)^4(\sin 40^0 - 64\cos 10^0), \tag{4}$$

очевидно, имѣетъ отрицательное значеніе. Слѣдовательно, корень уравненія (4) лежитъ между $\psi = 0$ и $\psi = 10^0$.

Вычисляя съ помощью пятизначныхъ логариѳмовъ выраженія

$$(\cos 5\psi)^5, \quad 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4$$

для послѣдовательно возрастающаго числа градусовъ между 0^0 и 10^0, найдемъ, что перемѣна знака происходитъ между $\psi = 4^0$ и $\psi = 5^0$. Примѣняя Regula falsi, находимъ, что ψ лежитъ около $4^0 40'$. Взявши $\psi = 4^0 30'$, $4^0 40'$, снова по Regula falsi находимъ значеніе, близкое къ $4^0 38'$.

Теперь обратимся къ вычисленію:

$$\psi = 4^0\,38' \qquad \log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}81745 - 1$$
$$\log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}81368 - 1\ ;$$
$$\psi = 4^0\,39' \qquad \log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}81610 - 1$$
$$\log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}81871 - 1$$

Разность въ первомъ случаѣ положительна, во второмъ случаѣ — отрицательна; слѣдовательно, ψ лежитъ между $4^0\,38'$ и $4^0\,39'$. Положимъ $\psi = 4^0\,38'\,30''$: тогда

$$\log(\cos 5\psi)^5 = 0{,}8167625 - 1$$
$$\log 64\cos\psi(\sin 4\psi)^4 = 0{,}8166885 - 1.$$

Разность равна 0,000074; слѣдовательно, значеніе $\psi = 4^0\,38'\,30''$ дастъ хорошее приближеніе (это значеніе меньше истиннаго).

Изъ уравненія (3) получимъ:

$$\log r = \log\cos 5\psi - \log\sin 4\psi - \log 2;$$

$$\begin{aligned}
\log\cos 5\psi &= 0{,}9633525 - 1\\
\log\sin 4\psi &= 0{,}5029838 - 1\\
\log 2 &= 0{,}3010300\\
\log r &= 0{,}1593387\\
\log\sin\psi &= 0{,}9080762 - 2\\
\log\cos\psi &= 0{.}9985733 - 1\\
\hline
\log(r\sin\psi) &= 0{,}0674149 - 1\\
\log(r\cos\psi) &= 0{,}1579120.
\end{aligned}$$

Слѣдовательно, мнимые корни приблизительно равны:

$$x = 0{,}11679 \pm i\,1{,}4385,$$

а ихъ модуль

$$r = 1{,}44424.$$

Для испытанія точности результатовъ можно воспользоваться тѣмъ обстоятельствомъ, что сумма всѣхъ корней нашего уравненія должна быть равна нулю. Найденныя же нами значенія корней даютъ:

$$x_1 + x_4 + x_5 = 1{,}75209$$
$$x_2 + x_3 = -1{,}7520958.$$

§ 95. Разложеніе вещественнаго корня въ непрерывную дробь.

1. Въ § 78 мы видѣли, что каждое ирраціональное число можетъ быть представлено въ видѣ непрерывной дроби и, въ частности, мы выполнили это для квадратнаго корня.

Обратно, имѣя достаточное число послѣдовательныхъ знаменателей, мы можемъ получить приближенное значеніе ирраціональнаго числа въ видѣ раціональной дроби. Это приближенное значеніе будетъ тѣмъ ближе къ истинной величинѣ ирраціональнаго числа, чѣмъ быстрѣе возрастаютъ знаменатели подходящихъ дробей $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$; поэтому выгодно, если между частными знаменателями непрерывной дроби $q, q_1, q_2, \ldots$ скоро появляются довольно большія числа.

2. Если ирраціональное число задано, какъ корень алгебраическаго уравненія n-той степени $f(x) = 0$, то его можно представить въ видѣ непрерывной дроби, исходя непосредственно изъ уравненія. Этимъ пріемомъ можно пользоваться, какъ новымъ способомъ приближеннаго вычисленія вещественныхъ корней уравненія.

Предположимъ, что найдено цѣлое положительное число q такого рода, что между q и $q+1$ лежитъ одинъ или нѣсколько корней функціи $f(x)$. Это можно выполнить хотя бы съ помощью теоремы Штурма. Положимъ тогда:

$$x = q + \frac{1}{x_1} = \frac{q x_1 + 1}{x_1};$$

для x_1 получимъ, въ свою очередь, уравненіе n-той степени:

$$x_1^n f\left(\frac{q x_1 + 1}{x_1}\right) = f_1(x_1) = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ столько же вещественныхъ корней, большихъ 1, сколько $f(x)$ имѣетъ корней между q и $q+1$.

Найдемъ число q_1 такого рода, что между q_1 и $q_1 + 1$ лежитъ по крайней мѣрѣ одинъ корень $f_1(x_1) = 0$, и положимъ

$$x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2} = \frac{q_1 x_2 + 1}{x_2}$$

Мы вновь получимъ уравненіе n-той степени для x_2:

$$x_2^n f_1\left(\frac{q_1 x_2 + 1}{x_2}\right) = f_2(x_2) = 0;$$

это уравненіе опять имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень, большій 1.

Этимъ путемъ можно идти дальше и дальше. Если между q и $q+1$ заключается нѣсколько корней $f(x)$, то, смотря по обстоятельствамъ, можетъ получиться и нѣсколько значеній для q_1. Можетъ случиться и такъ, что для q_2 получится нѣсколько значеній; однако, всегда настанетъ моментъ, когда всѣ корни между q и $q+1$ будутъ отдѣлены другъ отъ друга [7].

Значеніе x получается въ видѣ непрерывной дроби:

$$x = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}}$$

3. Достигнуть болѣе или менѣе значительнаго приближенія къ истинному значенію корня можно, большею частью, только вычисливши большое число послѣдовательныхъ знаменателей,—составленіе функцій f, f_1, f_2, ... очень утомительно; поэтому изложенный методъ имѣетъ больше теоретическій интересъ и мало пригоденъ для практическихъ вычисленій.

Только въ тѣхъ исключительныхъ случаяхъ, когда въ ряду q, q_1, q_2, .. скоро попадается довольно большое число, получаются лучшіе результаты.

Примѣромъ такого рода можетъ служить кубическое уравненіе

$$x^3 - 2x - 2 = 0.$$

Послѣдовательныя преобразованія здѣсь даютъ:

$$\begin{aligned}
x^3 - 2x - 2 &= 0, & q &= 1,\\
3x^3 - x^2 - 2x - 1 &= 0, & q_1 &= 1,\\
2x^3 - 4x^2 - 8x - 3 &= 0, & q_2 &= 3,\\
9x^3 - 22x^2 - 14x - 2 &= 0, & q_3 &= 2,\\
46x^3 - 6x^2 - 32x - 9 &= 0, & q_4 &= 1,\\
x^3 - 94x^2 - 132x - 46 &= 0, & q_5 &= 95,\\
3561x^3 - 9083x^2 - 191x - 1 &= 0. & q_6 &= 2.
\end{aligned}$$

[7]) Если бы функція $f_1(x)$ имѣла, скажемъ, три вещественныхъ корня, большихъ 1, x_1', x_1'', x_1''', то мы получили бы три корня функціи $f(x)$:

$$q + \frac{1}{x_1'}, \quad q + \frac{1}{x_1''}, \quad q + \frac{1}{x_1'''}.$$

Дальнѣйшее разложеніе нужно вести для каждаго изъ этихъ корней порознь. Если подстановка

$$x_1' = q_1' + \frac{1}{x_2}$$

Рядъ послѣдовательныхъ знаменателей

$$(1,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 95,\ 2,\ \ldots)$$

даетъ приближенныя значенія:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{7}{4},\ \frac{16}{9},\ \frac{23}{13},\ \frac{2201}{1244},\ \frac{4425}{2501}$$

Эти дроби попеременно то меньше, то больше x. Двѣ послѣднія обращаются въ слѣдующія десятичныя дроби:

$$1{,}76929260, \quad 1{,}76929228;$$

ошибка послѣдней, нѣсколько меньшей истиннаго значенія x, меньше

$$0{,}00000016.$$

приведетъ къ функціи $f(x_2)$, имѣющей два корня, большихъ 1, скажемъ x_2' и x_2'', то двумъ послѣдовательнымъ знаменателямъ (q_1, q_1') будутъ отвѣчать два корня

$$q+\frac{1}{q_1'+\frac{1}{q_2'}} \qquad q+\frac{1}{q_1'+\frac{1}{q_2''}}$$

Но такъ какъ общее число корней ограничено, то такое расчлененіе должно скоро прекратиться.

ГЛАВА XVIII.

Дѣленіе окружности на равныя части.

§ 96. Корни изъ единицы.

1. Всякое комплексное число, въ зависимости отъ модуля и аргумента, выражается въ видѣ

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Согласно § 47, 8,

$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta). \tag{1}$$

Эта формула даетъ возможность рѣшить слѣдующую задачу: опредѣлить всѣ числа, n-ая степень которыхъ равна данному числу c (вещественному или комплексному), т. е. найти корни уравненія:

$$z^n = c.$$

По основной теоремѣ алгебры это уравненіе должно имѣть n корней.

2. Пусть

$$c = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

гдѣ ρ есть положительное число, а φ содержится между 0 и 2π. Тогда

$$r^n\cos n\vartheta = \rho\cos\varphi, \quad r^n\sin n\vartheta = \rho\sin\varphi.$$

Возводя оба эти равенства въ квадратъ и складывая, получимъ, что $r^{2n} = \rho^2$. Такъ какъ и r должно быть положительнымъ числомъ, то

$$r = \sqrt[n]{\rho},$$

при чемъ подъ правой частію разумѣемъ единственное положительное значеніе корня n-той степени изъ ρ.

3. Опредѣливъ такимъ образомъ r, мы получимъ для ϑ:

$$\cos n\vartheta = \cos\varphi, \quad \sin n\vartheta = \sin\varphi.$$

Эти уравненія не опредѣляютъ φ однозначно. Въ самомъ дѣлѣ, согласно извѣстной теоремѣ тригонометріи, два угла, имѣющіе одинаковые косинусы и синусы, могутъ отличаться другъ отъ друга на 2π, повторенное цѣлое число разъ. Слѣдовательно,

$$n\vartheta = \varphi + 2\pi m, \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n},$$

гдѣ m есть нѣкоторое цѣлое (положительное или отрицательное) число. Съ другой стороны, два значенія ϑ, разность которыхъ есть число, кратное 2π, даютъ одно и то же значеніе для ζ. Если положимъ $m = qn + k$, гдѣ k есть остатокъ отъ дѣленія m на n, то

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi q.$$

Здѣсь всевозможныя значенія цѣлаго числа q даютъ одно и то же значеніе для ζ. Слѣдовательно, чтобы получить всѣ отличные другъ отъ друга корни n-той степени изъ c, достаточно въ формулѣ

$$\zeta = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

дать k послѣдовательныя значенія: $0, 1, 2, \ldots n-1$. Послѣднюю формулу, согласно § 47, 6, можно представить въ видѣ:

$$\zeta = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

или

$$\zeta = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k.$$

4. Положимъ для сокращенія:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

Тогда $\varepsilon^n = 1$, а слѣдовательно и $\varepsilon^{kn} = 1$. Произведеніе двухъ сопряженныхъ мнимыхъ чиселъ:

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

равно 1; слѣдовательно мы можемъ положить:

$$\varepsilon^{-k} = \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ $\varepsilon^{-k} = \varepsilon^{n-k}$. Величины

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^{n-1} \qquad (2)$$

непремѣнно всѣ различны между собой. Дѣйствительно, если бы въ этомъ ряду $\varepsilon^k = \varepsilon^g$, то, въ силу упомянутаго свойства тригонометрическихъ функцій, числа $2\pi k/n$ и $2\pi g/n$ должны были бы отличаться другъ отъ друга только на число, кратное 2π, а слѣдовательно разность $\frac{k}{n} - \frac{g}{n}$ дожна была бы быть цѣлымъ числомъ, что, очевидно, невозможно.

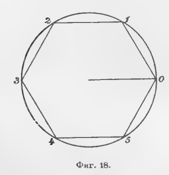
5. Величины (2) называются корнями n-той степени изъ 1. Ихъ имѣется n различныхъ между собой.

Они представляютъ собой корни функціи $x^n - 1$.

Всѣ корни n-той степени изъ даннаго числа c получаются, если одинъ изъ нихъ умножать послѣдовательно на n-тые корни изъ единицы [1]). За исключеніемъ случая $c = 0$, число различныхъ корней n-той степени изъ c равно n, т. е. числу различныхъ корней изъ 1.

6. На окружности, радіусъ которой мы примемъ равнымъ единицѣ длины, углы при центрѣ можно измѣрять соотвѣтствующими дугами. Четыремъ прямымъ угламъ соотвѣтствуетъ вся окружность, а число, ее измѣряющее, есть 2π. Если раздѣлить всю окружность на n равныхъ частей, то въ точкахъ дѣленія получимъ углы, соотвѣтствующіе правильному вписанному многоугольнику, а именно n-угольнику.

7. Расположимъ одну изъ точекъ дѣленія такъ, чтобы въ ней $x = 1$, $y = 0$. Тогда всѣ вершины нашего многоугольника будутъ геометрическими изображеніями n-тыхъ корней изъ единицы, т. е. комплексныхъ чиселъ (2). Условимся отсчитывать дуги и соотвѣтствующіе имъ углы отъ точки 0 (фиг. 18). Точку, соотвѣтствующую углу $2\pi k/n$, будемъ называть k-той вершиной многоугольника. Подобно этому, начальная точка можетъ быть названа нулевой или n-той вершиной.



Фиг. 18.

Обозначимъ сторону нашего правиль-

[1]) Это слѣдуетъ изъ послѣдней формулы пункта 3-го. Если мы положимъ

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

наго n-угольника черезъ S_n. Тогда

$$S_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

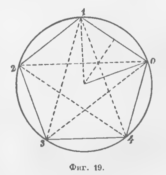
Величины S_n можно опредѣлить какъ геометрически, такъ и алгебраически. Аналитическая геометрія учитъ, что точки пересѣченія [2]) двухъ окружностей съ данными центрами и радіусами, а также и точки пересѣченія круга и прямой могутъ быть выражены алгебраически при помощи корней квадратныхъ уравненій. Обратно, квадратные корни изъ данныхъ чиселъ, если изобразить ихъ отрѣзками, можно построить циркулемъ и линейкой, а слѣдовательно привести задачу къ отысканію точекъ пересѣченія окружности или окружностей и прямыхъ линій.

Если S_n можно алгебраически опредѣлить при помощи ряда квадратныхъ корней, то геометрическое построеніе правильнаго n-угольника можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой. Обратно, если правильный n-угольникъ можно построить циркулемъ и линейкой, то алгебраическое опредѣленіе n-тыхъ корней изъ единицы приводится къ ряду квадратныхъ уравненій.

8. Положимъ

$$S_{n,k} = 2 \sin \frac{k\pi}{n};$$

$S_{n,k}$ есть хорда, которую получимъ, если начальную вершину многоугольника, обозначенную 0, соединимъ не съ смежной вершиной, а съ k-той. Тогда $S_{n,k} = S_{n,n-k}$. Если k больше 1 и меньше $n-1$, и не имѣетъ общихъ дѣлителей съ n, то $S_{n,k}$ есть сторона звѣзднаго многоугольника (см. фиг. 19 для пятиугольника); если k и n имѣютъ общаго множителя, то $S_{n,k}$ есть сторона многоугольника съ меньшимъ числомъ сторонъ [3]).



Фиг. 19.

9. Если S_n извѣстно, то S_{2n} найдемъ съ помощью извлеченія квадратнаго корня, т. е. съ помощью геометрическаго построенія (дѣленія угла пополамъ).

то корнями n-ой степени изъ числа c, какъ показываетъ упомянутая формула, служатъ

$$z_1,\ z_1\varepsilon,\ z_1\varepsilon^2,\ z_1\varepsilon^3\ \ldots\ z_1\varepsilon^{n-1}.$$

[2]) Т. е., конечно, координаты точекъ пересѣченія.

[3]) Чтобы опредѣлить, сколько сторонъ будетъ имѣть звѣздный (или иногда

Наиболѣе простое рѣшеніе этой задачи получается изъ тригонометрическихъ формулъ:

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{1}{2}a,$$

$$1 - \cos a = 2\sin^2\frac{1}{2}a;$$

изъ второй при $\alpha = \frac{\pi}{n}$ слѣдуетъ:

$$2 - \sqrt{4 - S_n^2} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2 = S_{2n}^2,$$

а изъ первой:

$$2 + \sqrt{4 - S_n^2} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2 - 4\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)\right)^2.$$

Слѣдовательно, мѣняя знакъ при квадратномъ корнѣ, мы получаемъ формулу, соотвѣтствующую дѣленію пополамъ угла, смежнаго съ $\frac{\pi}{n}$.

Итакъ, съ помощью геометрическаго построенія мы всегда можемъ получить изъ n-угольника $2n$-угольникъ, а изъ $2n$-угольника — $4n$-угольникъ, и т. д.; поэтому мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что n есть число нечетное.

10. Обратно, изъ $2n$-угольника мы получимъ n-угольникъ, соединяя вершины перваго черезъ одну; такъ, напримѣръ, треугольникъ получается изъ шестиугольника, пятиугольникъ изъ десятиугольника и т. д.

Сторона же S_{2n} при нечетномъ n можетъ быть непосредственно выражена черезъ n-тые корни единицы (ε). Дѣйствительно:

$$S_{2n} = 2\sin\frac{\pi}{2n} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) = 2\cos\frac{n-1}{4}\frac{2\pi}{n} =$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) = -2\cos\frac{n+1}{4}\frac{2\pi}{n}.$$

обыкновенный) многоугольникъ, который мы получимъ, послѣдовательно соединяя вершины n-угольника черезъ k вершинъ, нужно опредѣлить, сколько понадобится провести такихъ діагоналей, чтобы возвратиться къ начальной вершинѣ. Если это число діагоналей есть x, то мы обойдемъ, такимъ образомъ, kx вершинъ. Мы возвратимся въ точку исхода, если kx кратно n. Если k и n суть числа первыя между собой, то наименьшее значеніе x, при которомъ kx дѣлится на n, есть n. Если k и n имѣютъ общаго дѣлителя d, то наименьшее значеніе x есть $\frac{n}{d}$.

Съ другой стороны, согласно п. 4:

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = 2\cos\frac{2\pi k}{n};$$

смотря по тому, какое изъ двухъ чиселъ $n-1$ или $n+1$ дѣлится на 4, n имѣетъ видъ $4m+1$ или $4m-1$, слѣдовательно:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \varepsilon^{\frac{n-1}{4}} + \varepsilon^{-\frac{n-1}{4}}, \quad n = 4m+1. \\ S_{2n} &= -\varepsilon^{\frac{n+1}{4}} - \varepsilon^{-\frac{n+1}{4}}, \quad n = 4m-1. \end{aligned} \qquad (3)$$

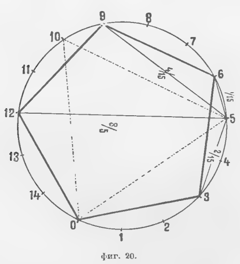
11. Если a и b суть натуральныя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей, то по § 70 можно опредѣлить два такихъ цѣлыхъ и положительныхъ числа x и y, что

$$bx - ay = 1.$$

Если $ab = n$, то можно удовлетворить равенству:

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi x}{a} - \frac{2\pi y}{b}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что сторона n-угольника получится, если точку $\frac{2\pi x}{a}$ соединить съ точкой $\frac{2\pi y}{b}$. Такъ, напримѣръ, сторона 15-ти-угольника получается, если соединить вторую вершину 5-угольника съ первой вершиной треугольника [4]).



фиг. 20.

Всего имѣется четыре различныхъ 15-ти-угольника, первыя вершины которыхъ лежатъ при: $\frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}, \frac{14\pi}{15}$. Мы найдемъ ихъ, если одну изъ вершинъ треугольника соединимъ съ четырьмя вершинами пятиугольн. (фиг. 20) [5]).

---

[4]) Въ данномъ случаѣ $a = 3$, $b = 2$, $x = 1$, $y = 2$.

[5]) Мы видѣли выше, что мы получимъ звѣздный многоугольникъ, содержа-

Благодаря вышеизложенному, мы можемъ въ дальнѣйшемъ ограничиться только тѣми многоугольниками, въ которыхъ число сторонъ есть нечетное простое число или степень нечетнаго простого числа [6]).

§ 97. Алгебраическое опредѣленіе корней изъ единицы.

1. Имѣя въ виду формулу суммы геометрической прогрессіи (§ 58) или частное отъ дѣленія $x^n - 1$ на $x - 1$ по § 61, мы можемъ написать:

$$(x - 1)\ (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1) = x^n - 1.$$

Подставимъ вмѣсто x какой нибудь изъ корней n-той степени изъ единицы; правая часть будетъ ровна 0, а слѣдовательно должна обратиться въ нуль и лѣвая часть. При $x = 1$ первый множитель лѣвой части, $x - 1$, исчезаетъ, а второй получаетъ значеніе n. Если вмѣсто x подставимъ какой-нибудь корень, отличный отъ 1, т. е. одно изъ чиселъ (§ 96, (2)):

$$\varepsilon.\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3 \ldots \varepsilon^{n-1},$$

то долженъ обратиться въ нуль другой множитель. Итакъ, степени числа ε суть корни уравненія $(n-1)$-ой степени

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0; \qquad (1)$$

другихъ же корней это уравненіе не имѣетъ. Дѣйствительно, если выполняется уравненіе (1), то и $x^n - 1 = 0$, т. е. x есть одинъ изъ n-тыхъ корней изъ единицы. Значеніе же $x = 1$ не удовлетворяетъ уравненію (1) [7]).

щій 15 сторонъ, если будемъ соединять вершины обыкновеннаго пятиугольника черезъ k, гдѣ k есть число простое относительно 15: такимъ образомъ, k можетъ имѣть значенія 1, 2. 4. 7, 8, 11, 13, 14. Если $k = 1$, то мы получаемъ обыкновенный правильный 15-ти угольникъ. При $k = 14$ мы получаемъ многоугольникъ въ обратномъ порядкѣ. Точно такъ же при $k = 13$, 11, 8 мы получаемъ тѣ же многоугольники, что при $k = 2$, 4, 7. Такимъ образомъ получаемъ 4 15-угольника, соотвѣтствующіе $k = 1$, 2, 4, 7.

На фиг. 19 изображенъ правильный пятиугольникъ (0, 3. 6, 9, 12). Далѣе 0 5 есть сторона правильнаго треугольника. Соединяя его вершину 5 съ остальными вершинами пятиугольника, получимъ стороны всѣхъ четырехъ 15-угольниковъ.

Авторъ беретъ $k = 2$, 4, 8, 14, что, какъ мы видѣли, сводится къ тому же.

[6]) Какъ показано выше, если $n = ab$. гдѣ a и b числа первыя между собой, то мы умѣемъ построить сторону правильнаго n-угольника, если умѣемъ построить сторону a-угольника и сторону b-угольника.

[7]) Это значитъ, корнями уравненія (1) служатъ $(n-1)$ чиселъ:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3 \ldots \varepsilon^{n-1}.$$

Положимъ $x = \varepsilon$; тогда изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = -1. \qquad (2)$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, теорему: сумма $n-1$ корней n-той степени изъ единицы, отличныхъ отъ 1, равна -1.

2. Уравненіе (1), по своимъ характернымъ особенностямъ, часто можетъ быть разрѣшено до конца. Мы покажемъ это на нѣкоторыхъ примѣрахъ.

Для $n = 3$ равенство (2) даетъ:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

или

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = -1.$$

Въ виду соотношенія (3) § 96-го это равенство выражаетъ, что сторона правильнаго шестиугольника равна 1, т. е. радіусу фиг. 21.

Такимъ образомъ

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

и слѣдовательно:

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^{-1} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

3. При $n = 5$, согласно § 96 (3),

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$$

Фиг. 21.

есть сторона десятиугольника.

Изъ соотношенія же (2) для этого случая получимъ:

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

а такъ какъ $\varepsilon^4 = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^3 = \varepsilon^{-2}$, то

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = -1.$$

Но $\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = (\varepsilon + \varepsilon^{-1})^2 - 2 = y^2 - 2$; поэтому для опредѣленія стороны десятиугольника мы получаемъ уравненіе:

$$y^2 = 1 - y, \quad y : 1 = (1 - y) : y. \qquad (3)$$

Это уравненіе во второй своей формѣ показываетъ, что сторона десятиугольника равна большей части радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи (§ 31, 6). Алгебраическое рѣшеніе уравненія (3)

даетъ:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}. \qquad (4)$$

Второй корень есть:

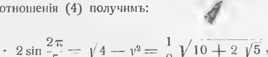
$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

Что здѣсь подъ $\sqrt{5}$ нужно разумѣть положительное его значеніе, слѣдуетъ изъ того, что уголъ $\frac{2\pi}{5}$ лежитъ въ первой четверти и поэтому имѣетъ положительный косинусъ. Чтобы выяснить значеніе второго корня, обратимъ вниманіе на то, что

$$2\cos\frac{4\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{5}\right) = -2\sin\frac{3\pi}{10}.$$

Слѣдовательно $-y_1$ есть сторона звѣзднаго десятиугольника, который получится, если, раздѣливши окружность на 10 равныхъ частей, соединять точки дѣленія черезъ двѣ. Если вершины этого звѣзднаго десятиугольника соединить черезъ одну, получимъ звѣздный пятиугольникъ.

Изъ соотношенія (4) получимъ:



$$2\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{4 - y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

а слѣдовательно:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right).$$

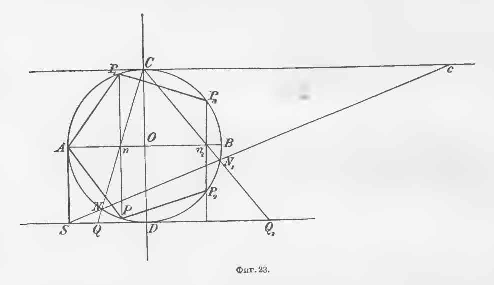
4. Чтобы построить величины y и $-y_1$, обратимъ вниманіе на то, что $5 = 1^2 + 2^2$. Слѣдовательно, если въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC одинъ катетъ $= \frac{1}{2}$, а другой $= 1$, то гипотенуза равна $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Если отъ гипотенузы отнять $\frac{1}{2}$, то получимъ y, а если прибавить $\frac{1}{2}$, получимъ $-y_1$. На чертежѣ (фиг. 22) отрѣзокъ $AM = y$, $AN = -y_1$.

Фиг. 22.

5. Штаудтъ (v. Staudt) далъ очень изящное построеніе правильнаго пятиугольника. Это построеніе даетъ сразу всѣ пять вершинъ. Оно изображено на фиг. 23.

Проведемъ въ кругѣ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра AB и CD и въ точкахъ A, C, D проведемъ касательныя къ кругу, т. е. перпендикуляры къ діаметрамъ.

Отложимъ отрѣзокъ Cc, равный двойному діаметру, т. е., если радіусъ $= 1$, то $Cc = 4$; затѣмъ проведемъ прямую cS. Она пересѣчетъ окружность въ двухъ точкахъ N и N_1. Соединимъ прямыми точки C и N, C и N_1; эти прямыя пересѣкутъ діаметръ AB въ точкахъ n и n_1. Если



Фиг. 23.

въ этихъ точкахъ возставимъ къ AB перпендикуляры, то пересѣчемъ окружность въ четырехъ точкахъ P, P_1, P_2 и P_3, которыя вмѣстѣ съ A будутъ вершинами правильнаго пятиугольника.

Доказательство:

Треугольникъ SNQ подобенъ треугольнику cNC (равны соотвѣтствующіе углы). Слѣдовательно,

$$SQ : Cc = NQ : NC;$$

по теоремѣ относительно касательной и сѣкущей

$$QD^2 = NQ \cdot QC,$$

откуда

$$SQ : Cc = QD^2 : NC \cdot QC.$$

или

$$SQ : QD = Cc \,.\, QD : NC \,.\, QC.$$

Хорда DN (не обозначенная на чертежѣ) перпендикулярна къ QC, а потому изъ прямоугольнаго треугольника QDC получимъ:

$$DC^2 = NC \,.\, QC.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ:

$$SQ : QD = Cc \,.\, QD : DC^2.$$

Съ другой стороны, по построенію, $Cc = 2DC = 4SD$; поэтому

$$DC : Cc = SD : DC, \quad DC^2 = Cc \,.\, SD;$$

слѣдовательно:

$$SQ : QD = QD : SD,$$

т. е. отрѣзокъ SD дѣлится въ точкѣ Q въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Если $SD = 1$, то

$$QD = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Такъ какъ $QD = 2On$ (изъ подобія треугольниковъ CQD и CnO), то

$$On = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{2\pi}{5}.$$

Такимъ образомъ уголъ AOP_1 равенъ $\frac{2\pi}{5}$, а AP_1 есть сторона правильнаго пятиугольника. Точно такимъ же образомъ выводимъ, исходя изъ подобія треугольниковъ SQ_1N_1 и cCN_1, что

$$On_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \cos\frac{\pi}{5},$$

а слѣдовательно уголъ $P_3OB = \frac{\pi}{5}$.

6. Для дѣленія окружности на 7 частей имѣемъ прежде всего уравненіе:

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = -1,$$

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y_1, \quad \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y_2.$$

Въ виду соотношеній (3) на § 96-го — y_1 есть сторона правильнаго 14-тиугольника. Далѣе,

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2,$$
$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y;$$

слѣдовательно, для y получаемъ уравненіе 3-ей степени:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0,$$

корни котораго суть:

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{7},$$

$$y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{7} = -2\cos\frac{3\pi}{7},$$

$$y_2 = 2\cos\frac{6\pi}{7} = -2\cos\frac{\pi}{7}.$$

Это уравненіе имѣетъ, такимъ образомъ, три вещественныхъ корня. Корни наибольшій и наименьшій по абсолютной величинѣ имѣютъ отрицательныя значенія, а средній—положительное. Семиугольника нельзя построить циркулемъ и линейкой, такъ какъ рѣшеніе задачи приводится къ уравненію третьей степени [8]).

7. Въ случаѣ девятиугольника дѣло обстоитъ нѣсколько иначе. Девять—число не простое и при томъ каждый корень третьей степени изъ единицы есть въ то же время корень девятой степени изъ единицы.

Если ε есть корень девятой степени изъ единицы, то ε^3 есть ко-

---

[8]) Если конструктивная задача аналитически приводится къ уравненію 3-ей степени, то отсюда безъ дальнѣйшихъ оговорокъ еще нельзя заключить, что построеніе не можетъ быть выполнено циркулемъ и линейкой. Это видно уже изъ того, что уравненіе 3-ей степени можетъ имѣть и раціональный корень. Чтобы утверждать, что задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкой, требуется болѣе глубокій анализъ соотвѣтствующаго уравненія. Объ этомъ подробнѣе въ слѣдующей главѣ.

рень третьей степени изъ единицы. Ясно, что если этотъ корень третьей степени не сводится къ 1, то само ε не представляетъ собой корня третьей степени изъ единицы. Поэтому (п. 2)

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = 0.$$

Это равенство остается въ силѣ, если ε замѣнимъ черезъ ε^2, ε^4, ε^5, ε^7, ε^8. Мы получили уравненіе 6-ой степени съ 6-ью корнями. Но $\varepsilon^6 + \varepsilon^3 + 1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 1$. Если положимъ

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1},$$

$$y^3 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} + 3y.$$

то для y получимъ уравненіе третьей степени:

$$y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Корни этого уравненія суть:

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \quad y_1 = 2\cos\frac{4\pi}{9},$$

$$y_2 = 2\cos\frac{8\pi}{9} = -2\cos\frac{\pi}{9};$$

два изъ нихъ имѣютъ положительныя значенія, одинъ—отрицательное: согласно § 96 (3), y_1 есть сторона правильнаго 18-тиугольника. Понятно, что и девятиугольника нельзя построить циркулемъ и линейкой. Еще хуже обстоитъ дѣло съ 11-тиугольникомъ: при $y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ приходимъ къ уравненію 5-ой степени:

$$y^5 + y^4 - 4y^3 - 3y^2 + 3y + 1 = 0.$$

8. Дѣленіе окружности на 13 частей приводится къ одному квадратному уравненію и одному кубичному. Къ этому результату приводитъ слѣдующій принципъ, примѣнимый и къ болѣе сложнымъ случаямъ. Корни 13-ой степени изъ единицы:

$$\varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \varepsilon^3, \quad \varepsilon^4, \quad \varepsilon^5, \quad \varepsilon^6,$$

$$\varepsilon^{-1}, \ \varepsilon^{-2}, \ \varepsilon^{-3}, \ \varepsilon^{-4}, \ \varepsilon^{-5}, \ \varepsilon^{-6}$$

могутъ быть расположены въ видѣ цикла такъ, что каждый изъ нихъ будетъ

получаться изъ предыдущаго однимъ и тѣмъ же способомъ, именно **возвышеніемъ въ квадратъ**:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^{-5},\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^6,\ \varepsilon^{-1},\ \varepsilon^{-2},\ \varepsilon^{-4},\ \varepsilon^5,\ \varepsilon^{-3},\ \varepsilon^{-6};$$

послѣдній по возвышеніи въ квадратъ даетъ опять первый: $\varepsilon^{-12} = \varepsilon$ [9]). Если брать члены этого ряда черезъ одинъ, то получимъ два ряда, въ каждомъ изъ которыхъ послѣдующій членъ равенъ предыдущему въ 4-ой степени. Составимъ суммы этихъ членовъ

$$\varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-3} = \eta_{I},$$
$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-6} = \eta_{II},$$

и обозначимъ ихъ сокращенно

$$\eta_{I} = \Sigma\varepsilon^{\alpha}, \quad \eta_{II} = \Sigma\varepsilon^{\beta},$$

$$\alpha \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 4, \quad \beta \equiv \pm 2, \pm 5, \pm 6.$$

Обратимъ теперь вниманіе на слѣдующее важное обстоятельство: если a есть одно изъ чиселъ α, то числа $a\alpha$ и $a\beta$, по модулю 13, соотвѣтственно сравнимы съ числами α и β; точно также, если b есть одно изъ чиселъ β, то, наоборотъ, числа $b\alpha$ сравнимы съ числами β, а числа $b\beta$ съ числами α [10]).

Эта теорема есть слѣдствіе болѣе общихъ принциповъ. Въ данномъ случаѣ легко убѣдиться въ ея справедливости съ помощью испытанія чиселъ α и β.

Назовемъ суммы η_{I}, η_{II} **первыми періодами**. Обѣ эти суммы могутъ быть выражены въ квадратныхъ корняхъ, если будетъ извѣстна ихъ

---

[9]) Возвышая, напримѣръ, ε^4 въ квадратъ, мы получимъ ε^8; но такъ какъ $\varepsilon^{13} = 1$, то $\varepsilon^8 = \varepsilon^8 : \varepsilon^{13} = \varepsilon^{-5}$. Точно такъ же

$$(\varepsilon^{-6})^2 = \varepsilon^{-12} = \varepsilon^{-12}.\ \varepsilon^{13} = \varepsilon.$$

[10]) Въ этомъ приходится убѣдиться непосредственно. Если, напримѣръ, $a = +3$, то числа $a\alpha$ и $a\beta$ будутъ:

$$\pm 3,\ \pm 9,\ \pm 12;\ \pm 6,\ \pm 15,\ \pm 18.$$

Такъ какъ

$$\pm 9 \equiv \mp 4,\ \pm 12 \equiv \mp 1,\ \pm 15 \equiv \pm 2,\ \pm 18 \equiv \pm 5 \pmod{13},$$

то числа $a\alpha$ сравнимы съ числами α, а числа $a\beta$ съ числами β. Если же возьмемъ b равнымъ, скажемъ—5, то получимъ:

$$\mp 5,\ \mp 15,\ \mp 20;\ \mp 10,\ \mp 25,\ \mp 30.$$

Такъ какъ

$$\mp 15 \equiv \mp 2,\ \mp 20 \equiv \pm 6,\ \mp 10 \equiv \pm 3,\ \mp 25 \equiv \pm 1,\ \mp 30 \equiv \mp 4 \pmod{13},$$

то числа $b\alpha$ сравнимы съ числами β, а числа $b\beta$ съ числами α.

сумма $\eta_1 + \eta_{11}$ и произведеніе $\eta_1\eta_{11}$. Но $\eta_1 + \eta_{11}$ есть сумма всѣхъ ε^k, т. е. равняется -1. Произведеніе $\eta_1\eta_{11}$ можно представить въ видѣ:

$$\eta_1\eta_{11} = \Sigma\, \varepsilon^{\alpha+\beta}.$$

Показатель $\alpha + \beta$, какъ легко убѣдиться непосредственно, никогда не равенъ нулю и никогда не дѣлится на 13. Слѣдовательно, въ число 36 слагаемыхъ суммы $\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}$ не входитъ 1.

Въ суммѣ $\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}$ различныхъ слагаемыхъ имѣется только 12; каждое изъ нихъ повторяется три раза. Въ этомъ можно убѣдиться либо вычисляя всѣхъ показателей $\alpha + \beta$ непосредственно, либо съ помощью слѣдующаго простого разсужденія. Одного взгляда на значенія α и β достаточно, чтобы убѣдиться въ существованіи трехъ такихъ суммъ $\alpha + \beta$, $\alpha' + \beta'$, $\alpha'' + \beta''$, что

$$\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \equiv \alpha'' + \beta'' \equiv k. \text{ [11]} \qquad (\text{mod. } 13)$$

Но тогда для любого числа n, не дѣлящагося на 13,

$$n\alpha + n\beta \equiv n\alpha' + n\beta' \equiv n\alpha'' + n\beta'';$$

всѣ эти три суммы заключаются между числами $\alpha + \beta$. Дѣйствительно, $n\alpha$ и $n\beta$ не могутъ находиться оба ни среди чиселъ α, ни среди чиселъ β; слѣдовательно, одно изъ нихъ фигурируетъ среди чиселъ α, а другое среди чиселъ β. И такъ, если положимъ $\alpha + \beta = k$, то каждый показатель nk долженъ повториться, по меньшей мѣрѣ, три раза; но всѣхъ членовъ суммы $\Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta}$ имѣется 36; слѣдовательно, каждый членъ повторяется три раза. Въ результатѣ $\eta_1\eta_{11} = 3\,\Sigma\varepsilon^k = -3$. Числа η_1 и η_{11} опредѣляются изъ уравненій:

$$\eta_1 + \eta_{11} = -1,$$
$$\eta_1\eta_{11} = -3.$$

Если первое изъ этихъ равенствъ возведемъ въ квадратъ и вычтемъ учетверенное второе, то получимъ:

$$(\eta_1 + \eta_{11})^2 - 4\eta_1\eta_{11} = (\eta_1 - \eta_{11})^2 = 13,$$

откуда

$$\eta_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \quad \eta_{11} = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

Изъ слѣдующихъ равенствъ легко видѣть, что мы правильно рас-

---

[11]) Напримѣръ,

$$-1 + 2,\ +3 - 2,\ -4 + 5,$$

Такимъ образомъ въ этомъ разсужденіи можно принять $k = 1$.

предѣлили знаки при $\sqrt{13}$:

$$\eta = 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} + 2\cos\frac{8\pi}{13} =$$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13} - 2\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$\eta_1 = 2\cos\frac{4\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ первой четверти косинусъ имѣетъ положительное значенiе и большему углу соотвѣтствуетъ меньшiй косинусъ; слѣдовательно, η_1 имѣетъ отрицательное значенiе, а $\eta = -\frac{3}{\eta_1}$ положительное.

9. Когда η и η_1 найдены, y опредѣляется изъ кубическаго уравненiя. Дѣйствительно, пусть

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4}, \quad y_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3},$$

что даетъ:

$$y + y_1 + y_2 = \eta,$$

$$yy_1 + yy_2 + y_1y_2 = \Sigma\varepsilon^k = -1,$$

$$yy_1y_2 = 2 + \eta_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Слѣдовательно, y, y_1 и y_2 суть корни кубическаго уравненiя

$$y^3 - \eta y^2 - y + \frac{\sqrt{13} - 3}{2} = 0.$$

Это уравненiе имѣетъ два положительныхъ корня и одинъ отрицательный, а именно:

$$2\cos\frac{2\pi}{13}, \ -2\cos\frac{5\pi}{13}, \quad 2\cos\frac{6\pi}{13};$$

наименьшiй положительный корень $2\cos\frac{6\pi}{13}$ даетъ сторону 26-тиугольника.

10. Можно также сначала составить рацiональное уравненiе третьей степени. Пусть

$$\zeta = \varepsilon + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{2\pi}{13} - 2\cos\frac{3\pi}{13},$$

$$\zeta_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-3} = 2\cos\frac{4\pi}{13} + 2\cos\frac{6\pi}{13}$$

$$\zeta_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-6} = -2\cos\frac{5\pi}{13} - 2\cos\frac{\pi}{13}.$$

Непосредственное вычисленіе даетъ:

$$\zeta\zeta_1 = -1 + \zeta_1, \quad \zeta_1\zeta_2 = -1 + \zeta_2, \quad \zeta\zeta_2 = -1 + \zeta,$$
$$\zeta + \zeta_1 + \zeta_2 = -1,$$
$$\zeta\zeta_1 + \zeta\zeta_2 + \zeta_1\zeta_2 = -4,$$
$$\zeta\zeta_1\zeta_2 = -\zeta_2 + \zeta_1\zeta_2 = -1,$$

т. е. ζ, ζ_1 и ζ_2 суть корни уравненія:

$$\zeta^3 - \zeta^2 - 4\zeta + 1 = 0.$$

Если извѣстны корни ζ, ζ_1 и ζ_2 этого уравненія, то

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \quad y' = \varepsilon^5 + \varepsilon^{-5}$$

опредѣляются, какъ корни квадратнаго уравненія

$$y^2 - \zeta y + \zeta_2 = 0.$$

§ 98. Правильный семнадцатиугольникъ.

1. Доказавъ, что правильный семнадцатиугольникъ можно построить циркулемъ и линейкой, Гауссъ обогатилъ элементарную геометрію очень интереснымъ открытіемъ *).

Если мы захотимъ расположить корни 17-ой степени изъ единицы въ такомъ порядкѣ, чтобы каждый послѣдующій былъ равенъ квадрату предыдущаго, то найдемъ, что такимъ образомъ можно получить только восемь корней:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^8,\ \varepsilon^{-1}\ \varepsilon^{-2}\ \varepsilon^{-4}\ \varepsilon^{-8}.$$

ибо ε^{-16} опять равно ε.

Чтобы получить всѣ ε^k, составимъ подобный же рядъ, начинающійся съ ε^3. Положимъ

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8} = \eta,$$
$$\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} = \eta_1.$$

*) Disq. arithmeticae, sectio septima. Разсказываютъ, что Архимедъ завѣщалъ построить надъ своей могилой памятникъ въ видѣ шара и цилиндра. Подобно Архимеду, Гауссъ выразилъ желаніе, чтобы на его памятникѣ была увѣковѣчена фигура семнадцатиугольника. Этотъ маленькій разсказъ показываетъ, какое значеніе самъ Гауссъ приписывалъ своему открытію. Это желаніе Гаусса не было, однако. достойнымъ образомъ выполнено. На его могильномъ камнѣ этого рисунка нѣтъ но на памятникѣ, воздвигнутомъ Гауссу въ Брауншвейгѣ, статуя стоитъ на семнадцатиугольникѣ, правда. едва замѣтномъ для зрителя.

Тогда $\eta + \eta_1 = -1$; для произведенія получимъ формулу

$$\eta\eta_1 = \Sigma\varepsilon^{\alpha+\beta};$$

α принимаетъ значенія показателей перваго ряда, β — второго. Σ содержитъ 64 члена. Совершенно тѣмъ же путемъ, какъ въ случаѣ 13-тиугольника, мы заключаемъ, что въ Σ каждый членъ ε^k повторяется четыре раза. Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\eta\eta_1 = -4, \quad \eta + \eta_1 = -1,$$

откуда $\eta - \eta_1 = \sqrt{17}$, а слѣдовательно,

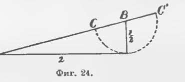
$$\eta = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \quad \eta_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

Представляя η_1 въ видѣ

$$\eta_1 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17},$$

убѣждаемся, что η_1 имѣетъ отрицательное, а η положительное значеніе. Слѣдовательно, знаки при $\sqrt{17}$ нами взяты правильно.

2. Чтобы построить η и η_1, пользуемся тѣмъ, что 17 есть сумма квадратовъ $4^2 + 1^2$. Построимъ прямоугольный треугольникъ съ катетами 2 и $\frac{1}{2}$. Его гипотенуза будетъ $\frac{1}{2}\sqrt{17}$. Прибавляя и отнимая отъ гипотенузы отрѣзокъ $\frac{1}{2}$, получимъ η и $-\eta_1$ ($AC = \eta$, $AC' = -\eta_1$). Суммы η, η_1 называются **первыми періодами**. При помощи ихъ можно составить четыре **вторыхъ періода**, суммируя члены чрезъ одинъ:



Фиг. 24.

$$\zeta = \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

$$\zeta_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = 2\cos\frac{4\pi}{17} - 2\cos\frac{\pi}{17},$$

$$\zeta_2 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = 2\cos\frac{6\pi}{17} - 2\cos\frac{7\pi}{17},$$

$$\zeta_3 = \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = -2\cos\frac{5\pi}{17} - 2\cos\frac{3\pi}{17}.$$

Складывая и умножая, получимъ:

$$\zeta + \zeta_1 = \eta, \quad \zeta\zeta_1 = -1,$$
$$\zeta_2 + \zeta_3 = \eta_1, \quad \zeta_2\zeta_3 = -1.$$

Отсюда

$$\zeta = \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + 4}}{2}, \quad \zeta_1 = \frac{\eta - \sqrt{\eta^2 + 4}}{2},$$
$$\zeta_2 = \frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}, \quad \zeta_3 = \frac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}.$$

Имѣя въ виду формулы для ζ въ зависимости отъ косинусовъ, убѣждаемся, что знаки при радикалахъ поставлены правильно. Числа ζ_1 и ζ_3 имѣютъ отрицательныя значенія, ζ и ζ_2—положительныя.

Чтобы построить ζ и ζ_1, возьмемъ прямоугольный треугольникъ съ катетами 1 и $\frac{1}{2}\eta$; его гипотенуза будетъ $\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2+4}$; если прибавимъ къ гипотенузѣ $\frac{1}{2}\eta$ и отнимемъ $\frac{1}{2}\eta$, то соотвѣтственно получимъ ζ и $-\zeta_1$. Подобнымъ же образомъ можно построить ζ_2 и ζ_3 по η_1.

Наконецъ, пусть

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17},$$
$$y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{8\pi}{17};$$

тогда

$$y + y_1 = \zeta, \quad yy_1 = \zeta_2,$$

откуда

$$y = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\zeta_2}}{2}, \quad y_1 = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4\zeta_2}}{2};$$

обѣ эти формулы легко построить. Сторона правильнаго 34-угольника есть y_1.

Штаудтъ (v. Staudt) далъ очень изящное построеніе семнадцатиугольника, аналогичное тому, которое онъ предложилъ для построенія правильнаго пятиугольника (Crelle's Journal, томъ 24).

ГЛАВА XX.

Доказательства невозможности.

§ 99. Построеніе съ помощью циркуля и линейки.

1. Существуетъ цѣлый рядъ изстари знаменитыхъ геометрическихъ задачъ, относительно которыхъ было извѣстно или предполагалось, что онѣ не могутъ быть разрѣшены съ помощью циркуля и линейки. Къ числу этихъ задачъ принадлежатъ прежде всего трисекція угла, затѣмъ удвоеніе куба, построеніе правильнаго 7-угольника, квадратура круга.

Возможность геометрическаго построенія съ помощью циркуля и линейки, какъ мы знаемъ (§ 96, 7), алгебраически сводится къ тому, чтобы искомая величина выражалась черезъ данныя рядомъ квадратныхъ корней.

Этому условію можно придать болѣе простую форму, опираясь на введенное нами въ § 63, 7 понятіе объ области раціональности и объ расширеніи этой области путемъ пріобщенія ирраціональности. Подъ областью раціональности мы разумѣемъ числовую область, въ предѣлахъ которой всѣ раціональныя операціи: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе (за исключеніемъ дѣленія на нуль) въ результатахъ своихъ даютъ числа, принадлежащія той же области. Подъ пріобщеніемъ ирраціональности мы разумѣемъ присоединеніе къ данной области новаго числа, не содержащагося въ ней [1]). Такимъ путемъ получается расширенная область, въ которой предыдущая содержится, какъ ея часть. Такъ, съ присоединеніемъ $i = \sqrt{-1}$ къ области раціональныхъ чиселъ получается область комплексныхъ чиселъ $x + yi$, гдѣ x и y суть раціональныя числа.

Послѣ этихъ замѣчаній свойство, характеризующее величины, построеніе которыхъ возможно съ помощью циркуля и линейки, можно выразить такъ:

Каждая величина, которая можетъ быть построена при по-

[1]) См. примѣчаніе 3) на стр. 234 и 235.

мощи циркуля и линейки, должна содержаться въ области раціональности, которая получится, если къ области данныхъ величинъ пріобщить рядъ квадратныхъ корней.

Порядокъ, въ которомъ пріобщаются эти квадратные корни, иногда не имѣетъ значенія. Такъ, напримѣръ, если дѣло идетъ о суммѣ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, то совершенно безразлично, какой изъ этихъ корней мы извлечемъ раньше; напротивъ, въ выраженіи $\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{\gamma}}$ непремѣнно нужно сначала найти $\sqrt{\gamma}$ и тогда только можно найти $\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{\gamma}}$.

Положимъ, что порядокъ пріобщенія установленъ. Назовемъ $\sqrt{\theta}$ тотъ корень, который пріобщается послѣднимъ. Область раціональности, въ которой еще не содержится $\sqrt{\theta}$, назовемъ предпослѣдней областью раціональности.

Такимъ образомъ $\sqrt{\theta}$ въ предпослѣдней области раціональности не содержится, но всѣ четныя степени $\sqrt{\theta}$ содержатся въ ней; слѣдовательно, каждая построяемая циркулемъ и линейкой величина x можетъ быть представлена въ видѣ:

$$x=\frac{a+b\sqrt{\theta}}{c+d\sqrt{\theta}},$$

гдѣ a, b, c и d суть величины предпослѣдней области раціональности. Помножая числителя и знаменателя этой дроби на $c-d\sqrt{\theta}$, получимъ:

$$x=\frac{(a+b\sqrt{\theta})(c-d\sqrt{\theta})}{c^2-d^2\theta}.$$

Если положимъ:

$$y=\frac{ac-bd\theta}{c^2-d^2\theta}, \quad z=\frac{bc-ad}{c^2-d^2\theta},$$

то

$$x=y+z\sqrt{\theta},$$

гдѣ y и z величины предпослѣдней области раціональности[2]). Знаменатель $c^2-d^2\theta$ не можетъ сводиться къ нулю, такъ какъ θ не можетъ быть квадратомъ величины, принадлежащей предпослѣдней области раціональности.

2. Изъ полученнаго для x выраженія слѣдуетъ, что x есть корень квадратнаго уравненія

$$x^2-2yx+(y^2-\theta z^2)=0,$$

[2]) Въ примѣчаніи на стр. 234 это выяснено по отношенію къ радикалу $\sqrt{2}$.

которое мы обозначимъ черезъ

$$f(x) = 0.$$

Коэффиціенты этого уравненія содержатся въ предпослѣдней области раціональности. Если $\sqrt{\theta_1}$ есть предпослѣдній изъ присоединяемыхъ корней, то уравненіе $f(x) = 0$ можно представить еще такъ:

$$f(x) = \varphi(x) + \sqrt{\theta_1}\,\psi(x) = 0.$$

Помноживъ это уравненіе на $\varphi - \sqrt{\theta_1}\,\psi$, получимъ уравненіе четвертой степени

$$f_1(x) = \varphi(x)^2 - \theta_1 \psi(x)^2 = 0,$$

въ которое не входитъ и предпослѣдній радикалъ $\sqrt{\theta_1}$. Послѣднее уравненіе, въ свою очередь, можетъ быть представлено въ видѣ:

$$f_1(x) = \varphi_1(x) + \sqrt{\theta_2}\,\psi_1(x) = 0,$$

гдѣ $\sqrt{\theta_2}$ есть предыдущій (предпредпослѣдній) квадратный корень. Подобно прежнему мы можемъ составить новое уравненіе 8-ой степени

$$f_2(x) = \varphi_1(x)^2 - \theta_2 \psi_1(x)^2 = 0.$$

Очевидно, мы можемъ такъ продолжать, пока не исключимъ всѣхъ пріобщенныхъ квадратныхъ корней. Мы пришли къ теоремѣ:

Каждая величина, построяемая циркулемъ и линейкой, представляетъ собой корень нѣкотораго алгебраическаго уравненія, коэффиціенты котораго раціональны по отношенію къ даннымъ величинамъ.

Теорема эта, конечно, не обратима: въ самомъ дѣлѣ, не каждое алгебраическое уравненіе рѣшается съ помощью ряда квадратныхъ корней.

§ 100. Кубическое уравненіе не разрѣшается съ помощью квадратныхъ корней.

1. Какъ было показано раньше (§ 82, 3), кубическое уравненіе можно представить въ упрощенномъ видѣ:

$$x^3 + ax = b, \tag{1}$$

не прибѣгая къ извлеченію корня. Пусть a и b данныя раціональныя числа. Обозначимъ корни уравненія (1) черезъ x_1, x_2, x_3; тогда, согласно § 64, 1,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{2}$$

Предположимъ, что одинъ изъ этихъ корней, скажемъ x_1, выражается рядомъ квадратныхъ корней. Пусть $\sqrt{\theta}$ будетъ послѣднимъ корнемъ. По предыдущему параграфу

$$x_1 = y + z\sqrt{\theta}, \qquad (3)$$

гдѣ y, z, θ принадлежатъ предпослѣдней области раціональности. Напротивъ того, относительно радикала $\sqrt{\theta}$ мы можемъ предположить, что онъ не принадлежитъ этой области и что z отлично отъ нуля.

Подставимъ выраженіе (3) въ уравненіе (1); мы получимъ равенство вида:

$$A + B\sqrt{\theta} = 0,$$

гдѣ

$$A = y^3 + 3yz^2\theta + ay - b,$$
$$B = 3y^2z + z^3\theta + az,$$

такъ что количества A и B выражаются раціонально черезъ предшествующіе квадратные корни. Но такъ какъ $\sqrt{\theta}$ не долженъ выражаться раціонально въ предыдущихъ радикалахъ, то $A = 0$ и $B = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (1) имѣетъ также корень

$$x_2 = y - z\sqrt{\theta}\ ^{3)}.$$

Такъ какъ z отлично отъ 0, то этотъ корень не равенъ x_1. Изъ соотношенія (2) получаемъ:

$$x_3 = -(x_1 + x_2) = -2y.$$

Это значитъ, что третій корень x_3 зависитъ только отъ предшествующихъ радикаловъ.

Если x_3 не представляетъ собой раціональнаго числа, то долженъ существовать $\sqrt{\theta_1}$, предшествующій радикалу $\sqrt{\theta}$; вмѣстѣ съ тѣмъ

$$x_3 = y_1 + z_1\sqrt{\theta_1}.$$

Совершенно точно такъ же, какъ это было сдѣлано выше, мы можемъ теперь обнаружить, что одинъ изъ двухъ другихъ корней, скажемъ x_1, равняется $-2y_1$ т. е. не зависитъ ни отъ $\sqrt{\theta}$, ни отъ $\sqrt{\theta_1}$; въ виду соотношенія (3), это противорѣчитъ нашему предположенію, что $\sqrt{\theta}$ не выражается раціонально черезъ предыдущіе радикалы. Наше разсужденіе привело къ слѣдующей теоремѣ:

[3]) Если бы мы подставили x_2 въ лѣвую часть уравненія (1), то мы получили бы $A - B\sqrt{\theta}$, а такъ какъ $A = B = 0$, то x_2 есть корень уравненія (1).

Кубическое уравненіе съ раціональными коэффиціентами, не имѣющее раціональныхъ корней, не можетъ быть рѣшено съ помощью извлеченія квадратныхъ корней [4]).

2. Эта теорема непосредственно прилагается къ задачѣ объ удвоеніи куба, которая приводится къ уравненію $x^3 = 2$, а также къ задачамъ о построеніи семиугольника и девятиугольника. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія, къ которымъ приводятся эти задачи, суть (§ 97,6,7):

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0, \quad y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Согласно теоремѣ § 63,1, раціональными корнями этихъ уравненій могли бы служить только числа $+1$ или -1, которыя имъ, однако, не удовлетворяютъ.

3. Трисекція угла приводится къ уравненію (§ 82,1)

$$x^3 - 3x = 2\cos\vartheta. \tag{4}$$

Если $\cos\vartheta$ дано, то можно построить уголь ϑ.

Пусть $2\cos\vartheta = a$, тогда уравненіе (4) приметъ видъ:

$$x^3 - 3x = a; \tag{5}$$

задачу можно понимать такъ: по двумъ произвольно заданнымъ отрѣзкамъ, изъ которыхъ одинъ есть единица длины, а другой равенъ a, построить отрѣзокъ x. Имѣется безконечное множество частныхъ значеній a, при которыхъ задача разрѣшима; напр. для $a = 0$ (трисекція прямого угла), для $a = \sqrt{2}$ (трисекція угла въ 45^0) или $a = 2\cos\frac{3\pi}{17}$; чтобы найти другіе случаи, при которыхъ можно построить x, нужно взять какой нибудь отрѣзокъ α, построенный изъ нашей единицы длины, и взять a равнымъ $\alpha^3 - 3\alpha$. Тогда $x = \alpha$ будетъ корнемъ нашего уравненія.

Положимъ теперь, что a остается неопредѣленнымъ. Тогда уравненіе (5), какъ выше было доказано, разрѣшается посредствомъ извлеченія квадратнаго корня только въ томъ случаѣ, если оно имѣетъ одинъ корень, выражающійся раціонально черезъ a.

---

[4]) Укажемъ еще разъ для большей ясности основные моменты доказательства. Допуская, что уравненіе (1) имѣетъ корень вида (3), авторъ обнаруживаетъ, что оно необходимо имѣетъ корень $x_3 = -2y$, который отъ радикала $\sqrt{\theta}$ не зависитъ. Если бы уравненіе (1) разрѣшалось при помощи квадратныхъ корней, то x_3 либо было бы раціональнымъ числомъ, либо зависѣло бы отъ предыдущаго радикала $\sqrt{\theta_1}$. Но въ такомъ случаѣ одинъ изъ корней x_1 и x_2 не зависѣлъ бы ни отъ $\sqrt{\theta_1}$, ни отъ $\sqrt{\theta}$; это же противорѣчитъ условію, такъ какъ

$$x_1 = y + z\sqrt{\theta}, \quad x_2 = y - z\sqrt{\theta},$$

гдѣ z отлично отъ нуля.

Что это обстоятельство въ общемъ случаѣ не имѣетъ мѣста, видно изъ того, что можно придумать безконечное множество раціональныхъ значеній a, при которыхъ это уравненіе не имѣетъ раціональныхъ корней. Таково, напримѣръ, значеніе $a = -1$, для котораго $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, а $x = 2\cos\frac{\pi}{9}$. Этотъ частный случай приводитъ насъ къ построенію правильнаго девятиугольника, что, какъ мы видѣли, невозможно.

Чтобы найти другіе случаи этого рода, положимъ

$$\cos\vartheta = m/n, \ nx = y,$$

гдѣ m и n цѣлыя числа, не имѣющія общихъ дѣлителей. Тогда уравненіе (4) можно представить въ видѣ:

$$y^3 - 3n^2y = 2mn^2. \qquad (6)$$

Если уравненіе (4) имѣетъ раціональный корень, то уравненіе (6) должно имѣть цѣлый корень. Это невозможно, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если n дѣлится на нечетное простое число p, но не дѣлится на его квадратъ. Дѣйствительно, тогда y, а слѣдовательно, и вся лѣвая часть уравненія (6) раздѣлится на p^3, а правая раздѣлится только на p^2.

§ 101. Разложеніе функціи съ помощью пріобщенія радикала.

1. Чтобы развить дальнѣйшія примѣненія этой теоріи къ алгебрѣ, докажемъ сначала слѣдующую теорему:

Если n есть простое число, а число a принадлежитъ области раціональности, въ которой мы оперируемъ, но не представляетъ собой n-ой степени другого числа, принадлежащаго этой области, то функція

$$\varphi(x) = x^n - a$$

неприводима въ этой области [5]).

Для $n = 2$ теорема эта очевидна; дѣйствительно, для $n = 2$

$$\varphi(x) = (x - \sqrt{a})\ (x + \sqrt{a}).$$

Оба множителя раціональны только въ томъ случаѣ, если $\sqrt{a}$ есть число раціональное [6]).

Условимся при нечетномъ n подъ символомъ $\sqrt[n]{a} = r$ понимать какое либо одно опредѣленное значеніе изъ n различныхъ значеній корня; напримѣръ, если a есть вещественное число, то вещественное значеніе

---

[5]) См. примѣчаніе на стр. 234 и 235.

[6]) Вѣрнѣе, если $\sqrt{a}$ принадлежитъ нашей области раціональности.

корня Подъ ε будемъ разумѣть корень n-ой степени изъ единицы:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Въ такомъ случаѣ всѣ корни n-ой степени изъ a выразятся такимъ образомъ:

$$r,\ \varepsilon r,\ \varepsilon^2 r,\ \ldots\ \varepsilon^{n-1} r. \qquad (1)$$

Если $\varphi(x)$ разлагается на два множителя, именно, если $\varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)$, при чемъ степень $\varphi_1(x) = x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \ldots + b_\mu$ ниже степени $\varphi(x)$, то корни функціи $\varphi_1(x)$ содержатся между корнями (1) функціи $\varphi(x)$. Такъ какъ $b = (-1)^\mu b_\mu$ равно произведенію корней функціи $\varphi_1(x)$ (§ 64), то

$$b = \varepsilon^k r^\mu, \quad a = r^n,$$

гдѣ k есть цѣлое число, а b принадлежитъ нашей области раціональности. Возвысимъ въ n-ую степень первое изъ этихъ равенствъ. Принимая во вниманіе второе, получимъ:

$$b^n = a^\mu. \qquad (2)$$

Такъ какъ μ меньше простого числа n, то оно представляетъ собой число простое относительно n. Можно поэтому опредѣлить два такихъ цѣлыхъ числа p и q, что $pn + q\mu = 1$ (§ 70, 5). Сообразно этому, равенство (2) даетъ:

$$a = a^{pn} a^{q\mu} = (a^p b^q)^n,$$

т. е. a есть n-ая степень числа, принадлежащаго нашей области раціональности. Это и нужно было доказать.

2. Если $\chi(x)$ и $\psi(x)$ обозначаютъ цѣлыя функціи отъ x съ коэффиціентами, принадлежащими нашей области раціональности, а $r = \sqrt[n]{a}$, то $\chi(r)$ только въ томъ случаѣ равно нулю, если $\chi(x)$ дѣлится на $\varphi(x) = x^n - a$. Если $\chi(x)$ и $\varphi(x)$ суть функціи, первыя между собой, то по § 62, 3 можно опредѣлить двѣ такія функціи $F(x)$ и $F_1(x)$, что

$$F(x)\chi(x) + F_1(x)\varphi(x) = \psi(x); \qquad (3)$$

слѣдовательно, если положимъ $x = r$, т. е. $\varphi(r) = 0$, а $\chi(x)$ будемъ считать отличнымъ отъ нуля, то

$$\frac{\psi(r)}{\chi(r)} = F(r). \qquad (4)$$

Такимъ образомъ, $F(r)$ есть общій видъ чиселъ, получающихся изъ r и чиселъ нашей области раціональности съ помощью первыхъ четырехъ дѣйствій. Кромѣ того, степени числа r, показатели которыхъ превышаютъ $n-1$, могутъ быть выражены черезъ низшія степени съ помощью равенства $r^n = a$; слѣдовательно, каждое число ω, принадлежащее области

раціональности, полученной изъ первоначальной пріобщеніемъ числа r, можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\omega = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots + \alpha_{n-1} r^{n-1}, \qquad (5)$$

гдѣ $\alpha_0, \ldots \alpha_{n-1}$ суть числа, принадлежащія первоначальной области раціональности [7]).

3. Обозначимъ корни функціи $\varphi(x)$, т. е. величины (1), черезъ

$$r, \ r_1, \ r_2, \ \ldots \ r_{n-1}.$$

Припомнимъ теперь Ньютоновы формулы, выражающія суммы одинаковыхъ степеней корней функціи (§ 65, (6)). Такъ какъ въ этомъ случаѣ коэффиціенты

$$a_1, \ a_2, \ \ldots \ a_{n-1}$$

[7]) Чтобы уяснить сущность и доказательство этого вывода, мы проведемъ разсужденіе въ нѣсколько иномъ порядкѣ.

Обозначимъ черезъ P нашу область раціональности, которой, по условію, принадлежитъ число a, но не принадлежитъ число $r = \sqrt[n]{a}$. Расширимъ теперь нашу область путемъ пріобщенія къ ней числа r. Какъ было выяснено въ примѣчаніи на стр. 235, это значитъ, что мы присоединимъ къ области P всѣ числа, которыя мы можемъ получить путемъ производства раціональныхъ дѣйствій надъ числомъ r и числами области P. Согласно этому опредѣленію, каждое число, принадлежащее расширенной области P (r), имѣетъ видъ:

$$\frac{a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \ldots + a_p r^p}{b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \ldots + b_q r^q},$$

гдѣ $a_0, a_1, \ldots a_p$ и $b_0, b_1, \ldots b_q$ суть числа, принадлежащія области P. Теперь положимъ

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_p x^p = \psi(x)$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_q x^q = \chi(x);$$

тогда наше число можетъ быть выражено дробью

$$\frac{\psi(r)}{\chi(r)}. \qquad (!)$$

Замѣтимъ, что ни одна изъ функцій $\psi(x)$ и $\chi(x)$ не дѣлится нацѣло на $\varphi(x) = x^n - a$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы функція $\psi(x)$ дѣлилась на $\varphi(x)$, то $\psi(r) = 0$, и вмѣстѣ съ тѣмъ и дробь (!) обращалась бы въ нуль; если бы на $\varphi(x)$ дѣлилась функція $\chi(x)$, то $\chi(r) = 0$, и дробь (!) не имѣла бы смысла. Но если функціи $\psi(x)$ и $\chi(x)$ не дѣлятся на $\varphi(x)$, то онѣ и не имѣютъ съ послѣдней никакихъ общихъ множителей, такъ какъ функція $\varphi(x)$ неприводима въ области P. Поэтому можно удовлетворить уравненію (3), что ведетъ къ соотношенію (4). Итакъ, дробь (!) можетъ быть представлена въ видѣ

$$F(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \ldots + \alpha_{n-1} r^{n-1},$$

гдѣ числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ принадлежатъ области P. Но такъ какъ $r^n = a$, то выраженіе это можетъ быть приведено къ виду (5). Итакъ, всякое число, принадлежащее области P (r), можетъ быть представлено въ формѣ (5), гдѣ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ суть числа области P.

равны нулю, то формулы эти дадутъ:

$$r^\nu + r_1^\nu + r_2^\nu + \ldots + r_{n-1}^\nu = 0, \ (\nu = 1, 2, \ldots n-1). \quad (6)$$

Замѣнимъ въ выраженіи (5) r послѣдовательно черезъ

$$r, \ r_1, \ r_2, \ \ldots \ r_{n-1}.$$

Получимъ n чиселъ

$$\omega, \ \omega_1, \ \omega_2, \ \ldots \ \omega_{n-1}, \quad (7)$$

которыя назовемъ **сопряженными** относительно функціи $\varphi(x) = x^n - a$. Въ виду соотношеній (6) сумма

$$S(\omega) = \omega + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1} = n\alpha_0$$

есть величина раціональная.

Эта сумма называется **слѣдомъ** числа ω. Съ другой стороны, такъ какъ ω^ν при цѣломъ показателѣ ν представляетъ собой число того-же вида (5), что и ω, то и

$$S(\omega^\nu) = \omega^\nu + \omega_1{}^\nu + \omega_2{}^\nu + \ldots + \omega^\nu{}_{n-1}$$

представляетъ собой раціональную величину.

Отсюда мы заключаемъ далѣе, что всѣ коэффиціенты A_i произведенія

$$F(x) = (x - \omega)\ (x - \omega_1)\ \ldots\ (x - \omega_{n-1}) =$$
$$= x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

выражающіеся съ помощью формулъ Ньютона раціонально черезъ суммы $S(\omega^\nu)$, принадлежатъ нашей области раціональности. Въ частности, произведеніе

$$N(\omega) = \omega\omega_1\,\omega_2\ \ldots\ \omega_{n-1},$$

называемое **нормомъ** числа ω, содержится въ области раціональности.

4. Въ частномъ случаѣ, когда

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{n-1},$$

$S(\omega) = n\omega = n\alpha_0$, ω тоже содержится въ области раціональности; и наоборотъ, если ω содержится въ той же области раціональности, то $\omega = \alpha_0$, а потому всѣ сопряженныя значенія (7) равны между собой [8]).

[8]) Если ω принадлежитъ той же области раціональности, то въ равенствѣ (5) правая часть приводится къ α_0, коэффиціенты же $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ всѣ равны нулю. Дѣйствительно, еслибы эти коэффиціенты не обращались всѣ въ нуль, то число r было бы корнемъ уравненія

$$\alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_1 x + (\alpha_0 - \omega) = 0,$$

всѣ коэффиціенты котораго принадлежатъ той же области раціональности, а степень котораго ниже n. Но это невозможно, такъ какъ r есть корень уравненія n-ой степени $\varphi(x) = 0$, неприводимаго въ нашей области. Если же

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0,$$

то всѣ сопряженныя значенія (7) равны между собой.

Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ того, чтобы самое число ω содержалось въ области раціональности, является равенство всѣхъ сопряженныхъ значеній ω.

Замѣтимъ, что эта теорема представляетъ собой частный случай общей теоремы о симметрическихъ функціяхъ.

5. Напомнимъ, наконецъ, еще одну теорему, которая, въ силу § 63, 7, вытекаетъ изъ допущенія, что $\varphi(x) = x^n - a$ есть неприводимая функція. Эта теорема заключается въ слѣдующемъ: если имѣетъ мѣсто какое нибудь равенство $F(r) = 0$ съ коэффиціентами, содержащимися въ области раціональности, то должны быть также справедливы равенства:

$$F(r_1) = 0,\ F(r_2) = 0,\ .\ \ F(r_{n-1}) = 0 \text{ [9]}.$$

6. Предположимъ, что нѣкоторая цѣлая функція $f(x)$ неприводима въ области раціональности, но становится приводимой, если къ этой области пріобщимъ одинъ изъ корней (r) функціи $\varphi(x)$. Мы предположимъ также, что степени функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражаются простыми числами m и n. Коэффиціентъ при высшей степени x въ функціи $f(x)$ положимъ равнымъ 1.

Разложеніе функціи $f(x)$ на двухъ множителей въ расширенной области раціональности представимъ въ такомъ видѣ:

$$f(x) = f_1(x, r) f_2(x, r);$$

здѣсь $f_1(x, r)$ и $f_2(x, r)$ суть цѣлыя функціи степеней m_1 и m_2; ихъ коэффиціенты выражаются раціонально черезъ r, слѣдовательно, суть числа вида ω [10]. Пусть и въ функціяхъ f_1 и f_2 коэффиціенты при высшихъ степеняхъ x также равны 1.

По теоремѣ п. 5-го должны также имѣть мѣсто тождества:

$$f(x) = f_1(x, r_1) f_2(x, r_1)$$
$$f(x) = f_1(x, r_2) f_2(x, r_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x) = f_1(x, r_{n-1}) f_2(x, r_{n-1}).$$

---

[9]) Если $F(r) = 0$, то функціи $F(x)$ и $\varphi(x)$ имѣютъ общій корень. Но въ такомъ случаѣ $F(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$ (§ 63, 7).

[10]) Если мы расширимъ нашу область раціональности P пріобщеніемъ корня r, то въ области $P(r)$ функція $\varphi(x)$ разлагается на множителей f_1 и f_2. Коэффиціентами этихъ функцій служатъ числа области $P(r)$, которыя, какъ было сказано выше, приводятъ къ виду (5). Вотъ почему эти функціи и могутъ быть обозначены символами $f_1(x, r)$ и $f_2(x, r)$.

Перемножимъ всѣ эти равенства и положимъ

$$F_1(x) = f_1(x, r) f_1(x, r_1) \dots f_1(x, r_{n-1})$$
$$F_2(x) = f_2(x, r) f_2(x, r_1) \dots f_2(x, r_{n-1}).$$

Въ результатѣ получимъ:

$$f(x)^n = F_1(x) F_2(x); \qquad (8)$$

здѣсь $F_1(x)$ и $F_2(x)$ суть цѣлыя функціи степеней nm_1, nm_2; ихъ коэффиціенты, какъ симметрическія функціи корней уравненія $\varphi(x) = 0$, содержатся въ нашей области раціональности.

Мы предположили, что функція $f(x)$ неприводима; слѣдовательно, въ виду соотношенія (8), $F_1(x)$ и $F_2(x)$ также должны быть степенями функціи $f(x)$. Пусть

$$F_1(x) = f(x)^{p_1}, \quad F_2(x) = f(x)^{p_2}.$$

Приравнивая показателей, получимъ

$$mp_1 = nm_1, \quad mp_2 = nm_2, \quad m_1 + m_2 = m.$$

Такъ какъ числа m_1 и m_2 меньше m и, слѣдовательно, не дѣлятся на m, то n должно дѣлиться на m; а такъ какъ m и n суть простыя числа, то $m = n$. Мы доказали такимъ образомъ слѣдующую теорему:

Неприводимая функція $f(x)$, степень которой m есть простое число, можетъ стать приводимой, благодаря пріобщенію радикала, показатель котораго n также представляетъ собой простое число, только въ томъ случаѣ, если $m = n$.

§ 102. Неприводимый случай при рѣшеніи кубическаго уравненія.

1. Если кубическое уравненіе имѣетъ три вещественныхъ корня, то послѣдніе, по формулѣ Кардана, выражаются въ видѣ суммы двухъ мнимыхъ радикаловъ. Это было замѣчено уже очень давно и потому этотъ случай кубическаго уравненія названъ неприводимымъ (casus irreducibilis); терминъ этотъ здѣсь нужно, конечно, понимать не въ томъ смыслѣ, въ какомъ его понимаютъ теперь.

Опираясь на предложенія предыдущаго параграфа не трудно доказать слѣдующую теорему:

Неприводимое кубическое уравненіе съ тремя вещественными корнями и раціональными коэффиціентами не можетъ быть разрѣшено съ помощью вещественныхъ радикаловъ.

Если неприводимое уравненіе, коэффиціенты котораго мы считаемъ раціональными, имѣетъ корень, выражающійся съ помощью ряда радикаловъ, то послѣдовательныхъ показателей этихъ корней мы можемъ считать

простыми числами. Дѣйствительно, корень съ составнымъ показателемъ $r = \sqrt[m]{\theta}$, гдѣ $m = pq$, можно замѣнить черезъ $r = \sqrt[p]{\sqrt[q]{\theta}}$, т. е. мы можемъ его замѣнить нѣсколькими послѣдовательными радикалами съ простыми показателями. Будемъ пріобщать къ области раціональности по порядку всѣ эти радикалы до предпослѣдняго; при этомъ уравненіе не разложится. Присоединивъ же послѣдній радикалъ, мы получимъ разложеніе нашего уравненія. По п. 6 предыдущаго параграфа въ нашемъ случаѣ это должно наступить при пріобщеніи радикала третьей степени. Сообразно этому одинъ изъ корней нашего уравненія выразится такъ:

$$x_1 = a + br + cr^2,$$

гдѣ a, b и c выражаются раціонально черезъ радикалы, введенные раньше, между тѣмъ какъ $r = \sqrt[3]{\theta}$ такимъ образомъ не выражается; слѣдовательно, θ не можетъ быть кубомъ нѣкотораго количества α, содержащагося въ области раціональности; дѣйствительно, изъ трехъ значеній α, $\varepsilon\alpha$ и $\varepsilon^2\alpha$, которыя въ этомъ случаѣ могъ бы имѣть корень r, вещественнымъ будетъ только α: и тогда вещественное число r должно было бы равняться α, а это противорѣчитъ предположенію. Изъ этого слѣдуетъ, что числа

$$x_2 = a + \varepsilon rb + \varepsilon^2 r^2 c,$$
$$x_3 = a + \varepsilon^2 rb + \varepsilon r^2 c$$

также будутъ корнями нашего кубическаго уравненія; дѣйствительно, изъ теоремы п. 5-го предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что вмѣстѣ съ $f(x_1)$ должны обращаться въ нуль также $f(x_2)$ и $f(x_3)$. Далѣе

$$\varepsilon = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};$$

а такъ какъ a, b и c суть вещественныя числа, то x_2 и x_3 могутъ быть вещественными только въ томъ случаѣ, если

$$rb = r^2 c.$$

Числа b и c не могутъ быть нулями, ибо тогда $x_1 = a$, т. е. функція $f(x)$ дѣлилась бы на на $x - a$, иначе говоря, была бы приводимой еще до пріобщенія радикала r. Но въ такомъ случаѣ $r = b/c$, т. е. r выражалось бы раціонально черезъ прежніе радикалы, что противорѣчитъ предположенію [11]).

[11]) Выяснимъ подробнѣе это доказательство.

Положимъ, что коэффиціенты уравненія третьей степени $f(x) = 0$, имѣющаго три вещественныхъ корня, принадлежатъ нѣкоторой области раціональности P, содержащей исключительно вещественныя числа. Мы предполагаемъ уравненіе неприводимымъ и допускаемъ, что оно имѣетъ корень, который выражается при

§ 103. Выраженіе корней изъ единицы при помощи радикаловъ [12]).

1. Въ § 101, 1 было показано, что функція $\varphi(x) = x^n - a$ неприводима въ той области, которой принадлежитъ число a, если послѣднее не представляетъ собой n-ой степени числа, принадлежащаго той же области. При этихъ условіяхъ уравненіе вида $x^n - a = 0$ называется **двучленнымъ уравненіемъ** [13]), его корень $\sqrt[n]{a}$ называется **радикаломъ** n-**ой степени этой области.**

помощи ряда вещественныхъ радикаловъ. Это значить, если пріобщимъ къ области P послѣдовательно нѣкоторый рядъ радикаловъ съ простыми показателями

$$\sqrt[m_1]{\theta_1},\ \sqrt[m_2]{\theta_2},\ \sqrt[m_3]{\theta_3}\ \ldots\ \sqrt[m_{n-1}]{\theta_{n-1}},\ \sqrt[m_n]{\theta_n},$$

имѣющихъ вещественныя значенія, то мы получимъ области $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{n-1}, P_n$; въ послѣдней изъ нихъ содержится корень нашего уравненія. Каждое количество θ_k есть число, принадлежащее области P_{k-1}, но $\sqrt[m_k]{\theta_k}$ этой области не принадлежитъ. Въ области P_n функція $f(x)$ разлагается на множителей, но въ области P_{n-1} она еще неприводима, иначе пріобщеніе корня $\sqrt[m_n]{\theta_n}$ было бы излишнимъ: уравненіе имѣло бы корень, который выражался бы при помощи предыдущихъ радикаловъ. Отсюда мы заключаемъ (§ 101, 6), что $m_n = 3$; вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ было показано въ пунктѣ 2 предыдущаго параграфа, корень нашего уравненія, принадлежащій области P_n, выражается формулой

$$x_1 = a + br + cr^2,$$

гдѣ a, b и c суть числа области P_{n-1}, а $r = \sqrt[3]{\theta_n}$ есть послѣдній пріобщаемый радикалъ. Два другія значенія того-же радикала r_1 и r_2, какъ выяснено въ текстѣ, суть числа мнимыя, а вмѣстѣ съ тѣмъ и другіе два корня нашего уравненія

$$x_2 = a + br_1 + cr_1^2$$
$$x_3 = a + br_2 + cr_2^2$$

должны быть мнимыми числами, коль скоро r не принадлежитъ области P_{n-1}. Это противорѣчитъ условію, что наше уравненіе имѣетъ исключительно вещественные корни.

[12]) Для пониманія этого параграфа необходимо предварительно прочесть приложеніе IX въ концѣ книги, вставленное авторомъ, какъ и этотъ параграфъ, во второмъ изданіи.

[13]) Авторъ употребляетъ терминъ „die reine Gleichung“, принадлежащій Кронекеру и получившій въ послѣднее время распространеніе въ нѣмецкой литературѣ. Такъ какъ самъ Кронекеръ говоритъ „die reine oder binomische Gleichung“ (Berichte der Berl. Acad. 1878, p. 151, 152), то мы предпочли терминъ „двучленное уравненіе“.

Говорятъ, что число можетъ быть выражено при помощи радикаловъ, если оно принадлежитъ области раціональности, которая получается путемъ послѣдовательнаго пріобщенія къ совокупности всѣхъ раціональныхъ чиселъ радикаловъ въ каждомъ случаѣ соотвѣтственно предшествующей области.

Число, которое выражается въ радикалахъ, называется метациклическимъ числомъ; точно также уравненіе, которое разрѣшается въ радикалахъ, называется метациклическимъ уравненіемъ.

2. Къ метациклическимъ числамъ принадлежатъ корни изъ единицы. Именно, мы докажемъ слѣдующую теорему.

Независимо отъ того, представляетъ ли собою m число простое или составное, корни m-ой степени изъ единицы выражаются въ радикалахъ, показатели которыхъ ниже m.

3 Корни m-ой степени изъ 1 суть корни уравненія m-ой степени

$$x^m - 1 = 0.$$

Какъ мы видѣли въ § 96, всѣ они содержатся въ формулѣ:

$$r^k = \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m},$$

гдѣ

$$r = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m},$$

а k принимаетъ значенія 0, 1, 2, ... $m-1$.

Если числа k и m имѣютъ общаго наибольшаго дѣлителя d, который больше 1, при чемъ $k = dk'$, $m = dm'$, то

$$r^k = \cos\frac{2\pi k'}{m'} + i\sin\frac{2\pi k'}{m'}.$$

Въ этомъ случаѣ r^k представляетъ собой также корень изъ 1 степени m'.

Если же k есть число простое относительно m, то

$$r^{kh} = \cos\frac{2\pi kh}{m} + i\sin\frac{2\pi kh}{m}$$

можетъ только въ томъ случаѣ равняться 1, если h равняется m или кратно числа m. Въ этомъ случаѣ r^k не является корнемъ изъ 1 болѣе низкой степени.

Сообразно этому различаютъ первообразные и непервообразные корни m-ой степени изъ 1. Подъ первообразными разумѣютъ тѣ корни m-ой степени изъ 1, которые не служатъ въ то же время корнями изъ 1 болѣе низкой степени. Чтобы ихъ получить, мы должны въ выра-

женіи r^k дать числу k всѣ значеніи, простыя относительно m; ихъ имѣется такимъ образомъ $\varphi(m)$ (§ 67, 7).

4. Мы легко убѣждаемся въ справедливости предложенія пункта 2 въ простѣйшихъ случаяхъ: при $m=1$ и $m=2$ мы имѣемъ исключительно раціональныя значенія корней $+1$ и -1; при $m=3$ мы имѣемъ корни

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

которые получаются при помощи двучленнаго уравненія $x^2+3=0$ [14]). Корни четвертой степени изъ 1, именно i и $-i$, получаются изъ двучленнаго уравненія $x^2+1=0$.

Мы можемъ поэтому воспользоваться совершенной индукціей, а *именно допустить, что предложеніе доказано для всѣхъ показателей* m_1, меньшихъ m. Если намъ удастся доказать нашу теорему въ этомъ предположеніи, то она будетъ доказана вполнѣ. Здѣсь нужно, однако, различать два случая.

5. Допустимъ сначала, что m есть число составное и $m=pm_1$, *гдѣ* p *простое число,* $m_1>1$, *такъ что* $m_1<m$ *и* $p<m$.

Если r есть корень m-ой степени изъ 1, то $r^p=a$ представляетъ собой корень изъ 1 степени m_1 и, слѣдовательно, согласно нашему предположенію, можетъ быть выражено въ радикалахъ. Но въ такомъ случаѣ r есть корень двучленнаго уравненія $x^p-a=0$; если только a не представляетъ собой p-ой степени числа, принадлежащаго послѣдней области раціональности, то это уравненіе неприводимо въ этой области. Такимъ образомъ число r также выражается въ радикалахъ.

Если же $a=b^p$, т. е. представляетъ собой p-ую степень числа, раціональнаго въ нашей области, и q есть корень p-ой степени изъ 1, то $r=qb$; а такъ какъ $p<m$, то q, согласно допущенію, также выражается въ радикалахъ.

6. Остается изслѣдовать второй случай, когда m есть простое число. Въ этомъ случаѣ всѣ корни изъ 1, кромѣ 1, являются первообразными. Если, поэтому, обозначимъ одинъ изъ нихъ черезъ r, скажемъ,

$$r=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m},$$

то всѣ первообразные корни m-ой степени будутъ:

$$r,\ r^2,\ r^3\ \ldots\ r^{m-1}. \qquad (1)$$

[14]) Т. е. путемъ пріобщенія радикала $\sqrt{-3}$.

Если числа k и k' отличаются другъ отъ друга числомъ, кратнымъ m, то $r^k = r^{k'}$. Мы получимъ поэтому всѣ корни (1) и въ томъ случаѣ, если составимъ рядъ

$$r^{k_1},\ r^{k_2},\ r^{k_3}\ \dots\ r^{k_{m-1}}, \qquad (2)$$

гдѣ $k_1, k_2, k_3 \dots k_{m-1}$ суть любыя $(m-1)$ чиселъ, которыя своими остатками (или вычетами) по модулю m имѣютъ числа 1, 2, 3 ... $m-1$. Числа (2) представляютъ собой корни уравненія $(m-1)$-ой степени

$$\frac{x^m-1}{x-1} = x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1 = 0. \qquad (3)$$

Корни этого уравненія можно расположить въ такомъ порядкѣ, что каждый изъ нихъ представитъ одну и ту же степень предыдущаго корня, а первый корень представитъ такую же степень послѣдняго. Такое расположеніе называется циклическимъ.

Чтобы это доказать, возьмемъ первообразный корень g по модулю m. (См. приложеніе IX въ концѣ книги). Тогда между вычетами степеней числа g

$$1,\ g,\ g^2,\ g^3\ \dots\ g^{m-2}$$

каждое изъ чиселъ 1, 2, 3 ... $m-1$ содержится одинъ разъ. Сообразно этому числа (1) отличаются развѣ только порядкомъ отъ чиселъ

$$r,\ r^g,\ r^{g^2},\ r^{g^3}\ \dots\ r^{g^{m-2}}. \qquad (4)$$

Послѣднія числа въ томъ же порядкѣ мы для краткости будемъ обозначать черезъ

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3\ \dots\ r_{m-2}. \qquad (5)$$

Въ этомъ ряду каждое число представляетъ собой g-ую степень предыдущаго, а первое опять таки g-ую степень послѣдняго, такъ какъ по теоремѣ Фермата $g^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$.

Пусть теперь ε будетъ однимъ изъ корней $(m-1)$-ой изъ 1 степени. Такъ какъ $m-1 < m$, то, въ силу нашего допущенія, ε выражается въ радикалахъ.

Мы пріобщимъ число ε къ области раціональности и разсмотримъ функцію

$$\psi(r) = r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2};$$

въ виду значенія (4) чиселъ (5) это есть раціональная функція отъ r.

Если мы здѣсь замѣнимъ r черезъ $r_1 = r^g$, то r_1 перейдетъ въ $r_1^g = r_2$, r_2 перейдетъ въ $r_2^g = r_3, \dots, r_{m-2}$ перейдетъ въ $r^g_{m-2} = r$; мы получаемъ такимъ образомъ:

$$\psi(r_1) = r_1 + \varepsilon r_2 + \varepsilon^2 r_3 + \dots + \varepsilon^{m-2} r;$$

а такъ какъ $\varepsilon^{m-1} = 1$, то

$$\psi(r) = \varepsilon \psi(r_1).$$

Такимъ же образомъ

$$\psi(r_1) = \varepsilon \psi(r_2),\ \psi(r_2) = \varepsilon \psi(r_3)\ \dots\ .$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\psi(r)^{m-1} = \psi(r_1)^{m-1} = \ldots = \psi(r_{m-2})^{m-1},$$

а потому

$$\psi(r)^{m-1} = \frac{1}{m-1}\left[\psi(r)^{m-1} + \psi(r_1)^{m-1} + \ldots + \psi(r_{m-2})^{m-1}\right].$$

Правая часть этого равенства представляетъ собой симметрическую функцію корней $r, r_1, r_2 \ldots r_{m-2}$; въ силу основной теоремы о симметрическихъ функціяхъ (§ 64, 3), она можетъ быть выражена раціонально въ коэффиціентахъ уравненія. Но выраженіе это, кромѣ раціональныхъ чиселъ, содержитъ также количество ε. Такимъ образомъ

$$\psi(r)^{m-1} = A,$$

гдѣ A есть число, принадлежащее области раціональныхъ чиселъ, расширенной пріобщеніемъ къ ней числа ε. Вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣленіе числа $\psi(r)$ приводится къ извлеченію корней, показателями которыхъ служатъ простые множители числа $m-1$. Если бы одно изъ двучленныхъ уравненій вида $x^p - a = 0$, къ которымъ мы такимъ образомъ приходимъ, оказалось приводимымъ, то вмѣсто радикала $\sqrt[p]{a}$, какъ показано въ п. 5, появилось бы одно изъ значеній p-аго корня изъ 1, которое, по допущенію, выражается въ радикалахъ.

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что числа $\psi(r)$ выражаются въ радикалахъ.

8. Имѣется $(m-1)$ корней (ε) $(m-1)$-ой степени изъ 1; это суть корни уравненія $x^{m-1} - 1 = 0$, въ числѣ которыхъ имѣется и 1. Въ этомъ уравненіи всѣ коэффиціенты, кромѣ перваго и послѣдняго, равны нулю. Сообразно этому изъ формулъ Ньютона (§ 65, (6)) слѣдуетъ, что и суммы одинаковыхъ степеней корней этого уравненія $s_1, s_2, s_3 \ldots s_{m-2}$ равны нулю, такъ что

$$\Sigma\varepsilon = 0,\ \Sigma\varepsilon^2 = 0, \ldots \Sigma\varepsilon^{m-2} = 0, \qquad (6)$$

гдѣ суммованія распространяются на всѣ значенія корней ε. Теперь, чтобы подчеркнуть зависимость числа $\psi(r)$ отъ ε, положимъ:

$$r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \ldots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon). \qquad (7)$$

Если мы теперь дадимъ ε всѣ его $(m-1)$ значеній и составимъ сумму $\Sigma\, \psi(r, \varepsilon)$, то, въ виду соотношеній (6), мы получимъ:

$$r = \frac{1}{m-1}\Sigma\,\psi(r, \varepsilon);\ ^{15}) \qquad (8)$$

[15]) Если $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-2}$ суть корни $(m-1)$-ой степени изъ 1, то, согласно обозначенію (7),

число r выражается, слѣдовательно, въ радикалахъ, и наше предложенiе такимъ образомъ доказано.

9. Сообразно этому опредѣленiе п. 1-аго можно развить слѣдующимъ образомъ.

Число называется метациклическимъ или выражающимся въ радикалахъ, если оно можетъ быть выражено помощью послѣдовательнаго прiобщенiя корней двучленныхъ уравненiй вида $x^n = a$, независимо отъ того, приводимы ли послѣднiя или нѣтъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если $a = b^n$, гдѣ b есть число предшествующей области рацiональности, то мы положимъ $x = by$ и тогда получимъ уравненiе $y^n - 1 = 0$, которое рѣшается въ радикалахъ.

§ 104. Уравненiе пятой степени въ общемъ видѣ не разрѣшается въ радикалахъ.

1. Пусть $f(x)$ будетъ неприводимая функцiя съ рацiональными коэффицiентами, степень которой выражается простымъ числомъ n. Предположимъ, что функцiя эта разлагается на множителей, по прiобщенiи ряда радикаловъ (которые въ данномъ случаѣ могутъ имѣть какъ вещественныя, такъ и мнимыя значенiя). Составимъ новую область рацiональности, прiобщивъ всѣ необходимые для разложенiя радикалы, кромѣ послѣдняго. Въ этой области функцiя $f(x)$ еще остается неприводимой. Если область, составленная такимъ образомъ, не содержитъ корня n-ой степени изъ 1 (ε), то мы прiобщимъ и его [16]. Однако, и послѣ этого функцiя останется еще неприводимой. Въ самомъ дѣлѣ, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, корни ε выражаются въ радикалахъ, показатели которыхъ ниже n; между тѣмъ, согласно § 101, 6, разложенiе функцiи n-ой степени можетъ быть обусловлено только прiобщенiемъ радикала n-ой же степени. Прiобщенiе же лишняго радикала никогда не можетъ помѣшать дѣлу [17].

$$r + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \ldots + \varepsilon^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon)$$
$$r + \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_1^2 r_2 + \ldots + \varepsilon_1^{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon_1)$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$r + \varepsilon_{m-2} r_1 + \varepsilon^2_{m-2} r_2 + \ldots + \varepsilon^{m-2}_{m-2} r_{m-2} = \psi(r, \varepsilon_{m-2}).$$

Складывая эти равенства и принимая во вниманiе соотношенiя (6), мы и получимъ равенство (8). Такъ какъ каждое изъ чиселъ $\psi(r, \varepsilon)$ выражается въ радикалахъ, то и r выражается въ радикалахъ.

[16]) Замѣтимъ, что прiобщенiе одного корня n-ой степени изъ 1 влечетъ за собой прiобщенiе остальныхъ, такъ какъ при простомъ n всѣ n-ые корни изъ 1 (кромѣ 1) первообразные и потому представляютъ собой степени любого изъ нихъ.

[17]) Мы прiобщаемъ иррацiональность ε; это, можетъ быть, и не нужно для того, чтобы функцiя разложилась на множители, но мы производимъ это расшире-

Итакъ, число ε мы относимъ къ „предшествующимъ радикаламъ". Послѣдній же радикалъ, обусловливающій разложеніе функціи, какъ уже было сказано выше, долженъ быть n-ой степени. Пусть это будетъ

$$r = \sqrt[n]{\theta}.$$

Радикалъ r не выражается раціонально въ предыдущихъ радикалахъ, а потому θ не представляетъ собой n-ой степени нѣкотораго числа α нашей области, ибо иначе число $r = \varepsilon^k \alpha$ также принадлежало бы этой области.

2. Такъ какъ функція $x^n - \theta$ неприводима, то, въ силу предложенія параграфа 101, 5, мы можемъ въ каждомъ уравненіи, содержащемъ r, замѣнить r черезъ εr, $\varepsilon^2 r$, ... $\varepsilon^{n-1} r$.

Если поэтому, въ частности, для какой либо раціональной функціи ψ

$$\psi(r) = \psi(\varepsilon r),$$

то имѣютъ мѣсто также соотношенія:

$$\psi(\varepsilon r) = \psi(\varepsilon^2 r) = \psi(\varepsilon^3 r) = \ldots\ldots = \psi(\varepsilon^{n-1} r),$$

а потому число $\psi(r)$ также принадлежитъ той же области раціональности (§ 101, 4).

3. Итакъ, согласно нашему допущенію, функція $f(x)$ разлагается на множителей по пріобщеніи радикала r; пусть $f(x, r)$ будетъ одинъ изъ множителей функціи $f(x)$ [18]), который неприводимъ и послѣ пріобщенія радикала r. Коэффиціентъ при высшемъ членѣ мы будемъ постоянно считать равнымъ 1.

Но если $f(x, r)$ есть дѣлитель функціи $f(x)$, то, какъ было показано въ § 101, 6, функціи

$$f(x, r), \; f(x, \varepsilon r), \; f(x, \varepsilon^2 r) \; \ldots \; f(x, \varepsilon^{n-1} r) \qquad (1)$$

также суть дѣлители функціи $f(x)$. Всѣ онѣ, какъ и $f(x, r)$, неприводимы [19]);

ніе области въ видахъ дальнѣйшихъ разсужденій. Дѣлу же эту не мѣшаетъ: если функція окажется разложимой въ нѣкоторой области, то это разложеніе, конечно, останется въ силѣ, если область будетъ расширена пріобщеніемъ нѣсколькихъ лишнихъ радикаловъ.

[18]) Такъ какъ разложеніе наступаетъ только послѣ пріобщенія радикала r, то каждый множитель необходимо зависитъ отъ r, почему одинъ изъ нихъ обозначенъ черезъ $f(x, r)$.

[19]) Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что функція $f(x, \varepsilon^k r)$ разлагается на множителей, т. е. что

$$f(x, \varepsilon^k r) = f_1(x, r)\, f_2(x, r).$$

Въ такомъ случаѣ, замѣняя здѣсь r черезъ $\varepsilon^{n-k} r$ (§ 101, 5), мы получимъ:

$$f(x, r) = f_1(x, \varepsilon^{n-k} r)\, f_2(x, \varepsilon^{n-k} r),$$

что противно условію.

кромѣ того между ними нѣтъ тождественныхъ, ибо, еслибы между ними были двѣ тождественныя функціи, то онѣ были бы всѣ тождественны [20]), а потому выражались бы раціонально въ области, еще не содержащей радикала r (§ 101, 4); *между тѣмъ это противорѣчитъ допущенію*, что функція $f(x)$ допускаетъ разложеніе только по пріобщеніи радикала r. Отсюда вытекаетъ, что никакія двѣ изъ функцій (1). не могутъ имѣть общаго дѣлителя, ибо таковой выражался бы раціонально въ зависимости отъ r [21]) и входилъ бы въ составъ одной изъ неприводимыхъ функцій (1). Произведеніе же

$$F(x)=Nf(x,r)=f(x,r)f(x,\varepsilon r)f(x,\varepsilon^2 r)f(x,\varepsilon^3 r)\dots f(x,\varepsilon^{n-1}r) \quad (2)$$

имѣетъ раціональное значеніе, а потому дѣлится на $f(x)$; а такъ какъ оно не имѣетъ никакихъ иныхъ множителей, кромѣ тѣхъ, которые содержатся въ функціи $f(x)$, то оно представляетъ собой степень функціи $f(x)$ (§ 101, 6). Но въ данномъ случаѣ это должна быть первая степень функціи $f(x)$, ибо линейный множитель, который входилъ бы въ составъ функціи $F(x)$ нѣсколько разъ, долженъ былъ бы принадлежать по крайней мѣрѣ двумъ функціямъ (1), что не можетъ имѣть мѣста. Итакъ,

$$f(x)=f(x,r)f(x,\varepsilon r)f(x,\varepsilon^2 r)\dots f(x,\varepsilon^{n-1}r), \quad (3)$$

множители же $f(x,r)$ суть линейныя функціи относительно x. Мы получимъ поэтому корни функціи $f(x)$, если приравняемъ нулю множителей $f(x,r)$; такимъ образомъ, напримѣръ:

$$x_1=\alpha_0+\alpha_1 r+\alpha_2 r^2+\alpha_3 r^3+\dots+\alpha_{n-1}r^{n-1}, \quad (4)$$

гдѣ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ суть числа, принадлежащія предпослѣдней области раціональности.

4. Функція n-ой степени $f(x)$ должна имѣть по крайней мѣрѣ одинъ вещественный корень, такъ какъ n есть число нечетное, а мнимые корни распадаются на сопряженныя пары; она можетъ поэтому

[20]) Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что имѣетъ мѣсто тождество

$$f(x,\varepsilon^i r)=f(x,\varepsilon^j r).$$

Замѣняя здѣсь r черезъ $\varepsilon^{n-i}r$, получимъ:

$$f(x,r)=f(x,\varepsilon^k r),$$

гдѣ $k=n+j-i$. Замѣняя здѣсь вновь r черезъ $\varepsilon^k r$, получимъ.

$$f(x,r)=f(x,\varepsilon^k r)=f(x,\varepsilon^{2k}r)=f(x,\varepsilon^{3k}r)=\dots f(x,\varepsilon^{(n-1)k}r).$$

Такъ какъ вычеты чиселъ $k, 2k, 3k \dots (n-1)k$ по модулю n проходятъ черезъ всѣ значенія $1, 2, 3 \dots (n-1)$, то послѣднее равенство обнаруживаетъ, что всѣ функціи (1) тождественны между собой.

[21]) Такъ какъ его можно было бы найти послѣдовательнымъ дѣленіемъ.

имѣть либо только вещественные корни, либо два мнимыхъ и $n-2$ вещественныхъ, либо четыре мнимыхъ и $n-4$ вещественныхъ и т. д.

5. Мы предположимъ, что послѣдовательное пріобщеніе радикаловъ происходитъ такимъ образомъ, что вслѣдъ за каждымъ радикаломъ ρ, не вызывающимъ еще разложенія функціи и имѣющимъ мнимое значеніе, пріобщается сопряженный съ нимъ радикалъ ρ'. Это всегда можно сдѣлать, такъ какъ пріобщеніе радикала, который можетъ оказаться лишнимъ, дѣлу не вредитъ.

Въ этомъ предположеніи, если $r = \sqrt[n]{\theta}$ есть первый радикалъ, обусловливающій уже разложеніе функціи, то здѣсь могутъ представиться слѣдующіе случаи.

1) θ есть число вещественное; такъ какъ ε принадлежитъ области раціональности, то и r можно считать вещественнымъ [22]).

Если тогда x_1 есть вещественный корень функціи $f(x)$, то и коэффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ въ выраженіи (4) должны имѣть вещественныя значенія; въ самомъ дѣлѣ, если бы это были комплексныя числа и $\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha'_{n-1}$ были бы сопряженныя съ ними числа, то мы имѣли бы также:

$$x_1 = \alpha_0' + \alpha_1' r + \alpha_2' r^2 + \alpha_3' r^3 + \ldots + \alpha'_{n-1} r^{n-1}, \text{[23])}$$

а вслѣдствіе этого

$$(\alpha_0 - \alpha_0') + (\alpha_1 - \alpha_1') r + (\alpha_2 - \alpha_2') r^2 + (\alpha_3 - \alpha_3') r^3 + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1}) r^{n-1} = 0.$$

Но такъ какъ функція $x^n - \theta$ неприводима, то это равенство можетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если

$$\alpha_0 - \alpha_0' = \alpha_1 - \alpha_1' = \alpha_2 - \alpha_2' = \ldots = \alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1} = 0,$$

то есть когда всѣ коэффиціенты α_i имѣютъ вещественныя значенія [24]).

Остальные корни выражаются тогда формулами:

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 r + \varepsilon^2 \alpha_2 r^2 + \varepsilon^3 \alpha_3 r^3 + \ldots + \varepsilon^{n-1} \alpha_{n-1} r^{n-1}, \\ x_3 &= \alpha_0 + \varepsilon^2 \alpha_1 r + \varepsilon^4 \alpha_2 r^2 + \varepsilon^6 \alpha_3 r^3 + \ldots + \varepsilon^{2(n-1)} \alpha_{n-1} r^{n-1}, \qquad (5) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_0 + \varepsilon^{n-1} \alpha_1 r + \varepsilon^{2(n-1)} \alpha_2 r^2 + \varepsilon^{3(n-1)} \alpha_3 r^3 + \ldots + \varepsilon^{(n-1)(n-1)} \alpha_{n-1} r^{n-1}; \end{aligned}$$

---

[22]) Если Θ есть абсолютное значеніе (модуль) числа θ, то любое значеніе r радикала $\sqrt[n]{\theta}$ можетъ быть представлено въ видѣ $\varepsilon^k \sqrt[n]{\Theta}$; такъ какъ ε принадлежитъ области раціональности, то пріобщить приходится лишь $\sqrt[n]{\Theta}$, т. е. вещественное число.

[23]) Равенство (4), какъ и всякое численное равенство, остается въ силѣ, если въ немъ замѣнить i черезъ $-i$.

[24]) Это вытекаетъ изъ основной теоремы, доказанной въ пунктѣ 6 § 63-го.

Еслибы всѣ коэффиціенты этого равенства не обращались въ нуль, то $r^n - \theta$ должно было бы дѣлиться на лѣвую часть этого равенства.

всѣ эти корни, какъ показано въ п. 3, отличны другъ отъ друга и отъ x_1.

Съ другой стороны,

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}$$

суть мнимыя числа, соотвѣтственно сопряженныя [25]) съ числами:

$$\varepsilon^{n-1}, \varepsilon^{n-2}, \ldots, \varepsilon^{\frac{n+1}{2}};$$

Поэтому и

$$x_2, x_3, \ldots, x_{\frac{n+1}{2}}$$

суть мнимыя числа, соотвѣтственно сопряженныя съ числами:

$$x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{\frac{n+3}{2}}.$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ функція $f(x)$ имѣетъ 1 вещественный и $n-1$ попарно сопряженныхъ мнимыхъ корней.

2) Если θ есть число мнимое, а θ' есть число, сопряженное съ θ, то функція $x^n - \theta$ имѣетъ исключительно мнимые корни; каждому изъ этихъ корней r отвѣчаетъ опредѣленное сопряженное число r', которое служитъ корнемъ уравненія $x^n - \theta' = 0$; вмѣстѣ съ тѣмъ

$$rr' = r_1 r_1' = r_2 r_2' = \ldots = r_{n-1} r'_{n-1} = \sqrt[n]{\theta\theta'} = R. \qquad (6)$$

Имѣя это въ виду, мы вмѣсто радикала r пріобщимъ сначала вещественное число R, если оно уже не содержится въ области раціональности Здѣсь вновь приходится различать два случая.

a) Пріобщеніе числа R уже вызываетъ разложеніе функціи $f(x)$. Тогда пріобщеніе числа r уже излишне, а такъ какъ R есть вещественный радикалъ, то мы находимся вновь въ условіяхъ случая 1).

b) Пріобщеніе числа R еще не вызываетъ разложенія функціи $f(x)$; сюда относится и тотъ случай, когда R имѣетъ раціональное значеніе (какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто въ формулѣ Кардана для кубическаго уравненія).

Тогда пріобщеніе радикаловъ r еще необходимо для рѣшенія уравненія; но вмѣстѣ съ радикаломь r пріобщается и сопряженное съ нимъ число $r' = R/r$.

Если въ этомъ случаѣ $x_1 = \psi(r)$ имѣетъ вещественное значеніе, то

$$\psi(r) = \psi'(r') = \psi'\left(\frac{R}{r}\right); \text{ [26]} \qquad (7)$$

здѣсь ψ' обозначаетъ функцію, которая получается изъ функціи ψ такимь образомъ, что мы замѣняемъ всѣ ея коэффиціенты соотвѣтственно сопря-

[25]) Ибо произведенія соотвѣтствующихъ чиселъ равны 1.
[26]) См. примѣчаніе [24]).

женными числами, которыя, согласно нашимъ условіямъ, принадлежатъ той же области раціональности.

Но равенство (7) остается въ силѣ, если въ немъ замѣнить r любымъ изъ корней $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}$ функціи $x^n - \theta$; а такъ какъ, въ силу соотношеній (6), и $R : r_i = r_i'$, то

$$\psi(r_1) = \psi'(r_1'), \ \psi(r_2) = \psi'(r_2'), \ \ldots \ \psi(r_{n-1}) = \psi'(r'_{n-1});$$

это значитъ, что всѣ n чиселъ $\psi(r), \psi(r_1), \psi(r_2), \ldots, \psi(r_{n-1})$ имѣютъ вещественныя значенія [27]).

Функція $f(x)$ имѣетъ въ этомъ случаѣ n вещественныхъ корней.

Для случая $n = 5$ мы получаемъ, такимъ образомъ, слѣдующее предложеніе.

6. Неприводимое уравненіе 5-ой степени съ вещественными коэффиціентами, разрѣшимое въ радикалахъ, имѣетъ либо 5 вещественныхъ корней, либо 1 вещественный и 4 мнимыхъ корня, но никогда не можетъ имѣть 3 вещественныхъ и двухъ мнимыхъ корней *).

7. Чтобы доказать, что не всякое уравненіе 5-ой степени разрѣшается въ радикалахъ, намъ остается только обнаружить, что существуютъ неприводимыя уравненія 5-ой степени съ вещественными раціональными коэффиціентами, имѣющія 3 вещественныхъ и 2 сопряженныхъ мнимыхъ корня. Это можно показать на безчисленныхъ примѣрахъ, которые очень легко составляются.

Такъ напримѣръ, какъ мы раньше видѣли (§ 63, 4), функція

$$f(x) = x^5 - 4x - 2$$

неприводима. Кромѣ того функція $f(x)$ не можетъ имѣть исключительно вещественные корни. Въ самомъ дѣлѣ, въ функціи $f(x)$ отсутствуютъ четвертая и третья степени x; слѣдовательно, по формуламъ Ньютона, не только сумма корней, но и сумма ихъ квадратовъ равна нулю. Это не могло бы имѣть мѣста, если бы всѣ корни были вещественными числами. Съ другой стороны,

$$f(-2) = -26, \ f(-1) = +1, \ f(1) = -5, \ f(2) = +22.$$

Для $x = -2, -1, 1, 2$ функція $f(x)$ имѣетъ попеременно то отрицательныя, то положительныя значенія; слѣдовательно, когда x переходитъ отъ -2 до $+2$, $f(x)$ должна обращаться въ нуль три раза. Это значитъ, что $f(x)$

[27]) Такъ какъ они не мѣняются, когда i мѣняется на $-i$.

*) Эта теорема принадлежитъ *Л. Кронекеру* (L. Kronecker).

имѣетъ три вещественныхъ и два мнимыхъ сопряженныхъ корня; поэтому она не разрѣшима помощью радикаловъ. Въ § 93 мы приближенно вычислили какъ дѣйствительные, такъ и мнимые корни функціи $f(x)$.

8. Замѣчаніе. При такомъ доказательствѣ нѣтъ необходимости опираться на существованіе корня уравненія пятой степени. Дѣйствительно, если бы уравненіе пятой степени не имѣло корня, то оно не было бы разрѣшимо въ радикалахъ; если же существуетъ одинъ корень, то существуютъ и четыре остальные, такъ какъ, если x_1 есть этотъ корень, то $\frac{f(x)}{x-x_1}=0$ есть уравненіе четвертой степени, которое разрѣшимо въ радикалахъ и имѣетъ четыре корня.

9. Первое точное доказательство невозможности рѣшить уравненіе 5-ой степени въ общемъ видѣ дано было Абелемъ (Abel). Оно положило конецъ многочисленнымъ напраснымъ попыткамъ и обманутымъ ожиданіямъ найти это рѣшеніе. Упомянутое доказательство было первымъ научнымъ трудомъ великаго изслѣдователя.

Въ знаменитой своей статьѣ въ первомъ томѣ журнала Крелля Абель ставитъ вопросъ нѣсколько въ иномъ видѣ, чѣмъ у насъ. Онъ спрашиваетъ, можно ли съ помощью знака извлеченія корня составить выраженіе для x_1 въ функціи пяти неопредѣленныхъ чиселъ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, удовлетворяющихъ уравненію

$$x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0, \qquad (8)$$

и отвѣчаетъ на этотъ вопросъ отрицательно.

При этомъ остается невыясненнымъ, нельзя ли для всевозможныхъ цѣлыхъ значеній a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 рѣшить уравненіе (8) помощью извлеченія корня изъ раціональныхъ чиселъ. У насъ же этотъ вопросъ рѣшается, одновременно съ главнымъ положеніемъ, въ отрицательномъ смыслѣ.

ГЛАВА XXI.

Изъ исторіи алгебры.

§ 105. Основные моменты въ исторіи ученія объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій.

1. Въ древности было извѣстно много знаменитыхъ задачъ, приводившихъ, по современному выраженію, къ уравненіямъ высшихъ степеней, которыя не удавалось разрѣшить при помощи циркуля и прямой линейки. Укажемъ здѣсь задачу объ удвоеніи куба, о трисекціи угла, задачу Архимеда о раздѣленіи шара плоскостью на двѣ части, объемы которыхъ находились бы между собою въ данномъ отношеніи. Всѣ эти задачи могутъ быть разрѣшены при помощи коническихъ сѣченій; онѣ послужили поводомъ къ изученію еще другихъ кривыхъ: циссоида Діоклеса (ок. 180 г. до Р. Х.), конхоида Никомеда (ок. 180 г. до Р. Х.) и др. также примѣнялись для рѣшенія этихъ задачъ. Однако, самыя замѣчательныя работы въ этомъ направленіи касаются коническихъ сѣченій и принадлежатъ Аполлонію [1]). Въ нихъ мы въ первый разъ встрѣчаемся съ задачами, приводящими, выражаясь въ нашей терминологіи, къ уравненію четвертой степени. Ему уже извѣстно, что два коническихъ сѣченія могутъ пересѣкаться не болѣе, какъ въ четырехъ точкахъ, что коническія сѣченія, касающіяся другъ друга въ одной точкѣ, могутъ пересѣкаться не больше, чѣмъ въ двухъ точкахъ, что точекъ соприкосновенія двухъ коническихъ сѣченій не можетъ быть больше двухъ, — а также и другія подобныя свойства этихъ кривыхъ. Это, въ сущности, не что иное, какъ теоремы относительно корней уравненія четвертой степени и совпаденія двухъ такихъ корней. Особенный интересъ представляетъ собою пятая книга Аполлонія, дошедшая до насъ не на греческомъ языкѣ, а въ переводѣ, сдѣланномъ Борелли (Borelli) съ арабскаго (Флорентійское изданіе этой книги на латинскомъ языкѣ появилось въ 1661 году).

[1]) Аполлоній изъ города Перги въ Памфиліи жилъ и работалъ въ Александріи. Главныя его работы относятся къ эпохѣ царствованія Птоломея Филопатора, умершаго въ 205-мъ году до Р. Х.

Въ этой книгѣ Аполлоній разсматриваетъ задачу о наибольшихъ и наименьшихъ разстояніяхъ данной точки отъ периферіи коническаго сѣченія, или другими словами, задачу о проведеніи нормалей къ коническому сѣченію; задача эта имѣетъ, такимъ образомъ, интересъ прежде всего для ученія о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.

Алгебраически эта задача приводитъ къ уравненію четвертой степени; у Аполлонія это выражается въ томъ, что основанія нормалей опредѣляются имъ, какъ точки пересѣченія даннаго коническаго сѣченія съ равнобочной гиперболой. Однако, Аполлоній знаетъ и примѣняетъ въ этихъ изслѣдованіяхъ также и дискриминантъ биквадратнаго уравненія, т. е. ему извѣстно геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ двѣ нормали совпадаютъ въ одну. Совершенно въ смыслѣ современной аналитической геометріи онъ даетъ для каждой абсциссы нѣкоторую ординату, до которой можетъ доходить точка, если изъ нея еще можно провести четыре нормали къ коническому сѣченію; если его построеніе перевести на нашъ языкъ, то получится просто уравненіе развертки коническаго сѣченія. Это построеніе зависитъ отъ кубическаго корня, который, какъ въ задачѣ Гиппократа [1]) объ удвоеніи куба, опредѣляется двумя средними пропорціональными. Въ дошедшемъ до насъ текстѣ нѣтъ никакихъ указаній на то, чтобы Аполлоній считалъ совокупность этихъ точекъ кривой линіей. Но, можетъ быть, въ нашемъ распоряженіи находится не все, что оставилъ послѣ себя Аполлоній; такое предположеніе подтверждается тѣмъ обстоятельствомъ, что въ концѣ пятой книги минимальныя линіи разсматриваются очень подробно, тогда какъ максимальнымъ линіямъ, получающимся тѣмъ же самымъ построеніемъ, удѣлено очень мало мѣста. Это вообще не отвѣчаетъ обыкновенію грековъ, которые при изслѣдованіи задачи всегда разсматриваютъ всѣ возможные случаи съ одинаковой тщательностью.

2. Мы обходимъ постепенное развитіе понятія объ алгебраическомъ уравненіи и лишь попутно упомянемъ объ открытіи рѣшенія уравненія 3-ей и 4-ой степени въ XVI столѣтіи [2]). Нужно, однако, назвать Віета, предшественника современной алгебры, который первый высказалъ

[1]) Гиппократъ родился на о-вѣ Хіосѣ; жилъ въ Аѳинахъ во второй половинѣ V-го столѣтія до Р. Х.

[2]) Первымъ открылъ рѣшеніе уравненій 3-ей и 4-ой степени С. Ферро (Scipione del Ferro), бывшій профессоромъ въ Болоньѣ отъ 1496 до 1526 г. Однако, на этой почвѣ разгорѣлся рѣзкій и некрасивый споръ о пріоритетѣ между Іеронимомъ Кардано (Hieronymus Cardanus, 1501—1576. Павія, Римъ) и Николаемъ Тарталья (1500—1557, Брешія, Венеція). Кардано въ своемъ сочиненіи „Ars magna“ (Nürnberg, 1545) опубликовалъ рѣшеніе уравненія третьей степени; отсюда сохранившееся еще по настоящее время выраженіе „формула Кардана“. Ученикъ Кардана, Луиджи Феррари (1522—1565, Болонья, Миланъ) открылъ рѣшеніе уравненія четвертой степени.

предложеніе, что каждая задача, приводящая къ уравненію третьей степени, либо рѣшается при помощи двухъ средне-пропорціональныхъ, либо сводится къ трисекціи угла. Къ первому классу относятся уравненія третьей степени, которыя имѣютъ одинъ вещественный корень и могутъ быть рѣшены при помощи кубическаго корня изъ вещественнаго числа. (Уже древніе привели Делійскую задачу къ нахожденію двухъ среднихъ пропорціональныхъ: $a:x = x:y = y:b$, откуда $x^3 = a^2 b$). Ко второму классу относятся уравненія съ тремя вещественными корнями (casus irreducibilis), которыя не могутъ быть рѣшены при помощи вещественныхъ радикаловъ, но приводятся, какъ показалъ Віета, къ трисекціи угла. Такъ какъ, съ другой стороны, уже тогда было извѣстно, что уравненіе четвертой степени приводится къ квадратнымъ и кубическимъ уравненіямъ, то тотъ же выводъ былъ распространенъ и на уравненіе четвертой степени. Этимъ былъ выясненъ трудный вопросъ о томъ, какимъ образомъ можно отъ кубичныхъ корней изъ мнимыхъ чиселъ прійти къ вещественнымъ числамъ. Всѣ эти предложенія позже были значительно обобщены Абелемъ (Abel) и распространены на большую категорію уравненій болѣе высокихъ степеней, которыя въ настоящее время извѣстны подъ названіемъ „Абелевыхъ уравненій“.

3. Съ этого времени дальнѣйшее развитіе ученія объ алгебраическихъ уравненіяхъ расчленяется въ два различныхъ направленія. Первое направленіе имѣетъ своею цѣлью дать способы вычислить съ любымъ приближеніемъ численное значеніе корней уравненія, коэффиціенты котораго численно заданы; для практическаго примѣненія алгебры эта сторона дѣла имѣетъ наиболѣе важное значеніе. Уже давно было извѣстно, что функція $f(x)$, имѣющая при $x=a$ и $x=b$ значенія противоположныхъ знаковъ, обращается между a и b въ нуль, т. е. имѣетъ въ этомъ интервалѣ по крайней мѣрѣ одинъ, вообще же нечетное число корней; въ этомъ содержится уже принципъ, по которому путемъ послѣдовательнаго дѣленія интервала можно неопредѣленно приблизиться къ корнямъ. Однако, чтобы избѣжать лишнихъ вычисленій, было существенно важно отдѣлить корни, т. е. установить интервалы, въ каждомъ изъ которыхъ содержится только по одному корню, или по крайней мѣрѣ точно установить, сколько корней содержится въ данномъ интервалѣ. Это, однако, долго не удавалось.

Правда, можно было указать верхній и нижній предѣлъ положительныхъ корней; былъ также извѣстенъ рядъ теоремъ, опредѣлявшій число корней, содержащихся въ данномъ интервалѣ до нѣкотораго четнаго числа, которое лишь въ частныхъ случаяхъ обращается въ нуль. Сюда относится правило Декарта, которое мы изложили въ параграфѣ 91,

далѣе болѣе сложная теорема Ньютона, теорема Бюдана и Фурье, теорема Ролля [1]).

Точный, хотя практически врядъ ли примѣнимый пріемъ рѣшенія этой задачи былъ указанъ Варингомъ [2]), а позднѣе былъ вновь открытъ Лагранжемъ [3]). Пріемъ этотъ основывается на томъ, что составляется уравненіе, корнями котораго служатъ разности корней даннаго уравненія, а затѣмъ разыскивается нижній предѣлъ положительныхъ корней этого уравненія. Если Δ есть этотъ нижній предѣлъ, то интервалъ размѣра Δ можетъ содержать не болѣе одного корня.

Вполнѣ удовлетворительное рѣшеніе задачи представляетъ собою теорема Штурма [4]), которую мы изложили въ параграфѣ 92-омъ. Работа Штурма написана по инициативѣ Фурье и стоитъ въ связи съ нѣкоторыми изслѣдованіями въ области математической физики, напримѣръ съ вопросомъ о томъ, сколько узловъ можетъ имѣть натянутая колеблющаяся струна; связь между этимъ вопросомъ и задачей объ опредѣленіи числа корней алгебраическаго уравненія совершенно очевидна.

Кронекеръ, который изъ принципіальныхъ соображеній вовсе не употребляетъ ирраціональныхъ чиселъ (см. приложеніе III), вынужденъ дать задачѣ другое выраженіе, такъ какъ онъ не только не можетъ пользоваться теоремой о существованіи корня, но и вообще не можетъ говорить о корнѣ уравненія. Онъ поэтому только обнаруживаетъ, что при помощи раціональнаго вычисленія можно найти такое цѣлое число s, что въ интервалѣ, имѣющемъ размѣръ $\frac{1}{s}$, функція $f(x)$ можетъ перемѣнить знакъ не болѣе одного раза. Этимъ достигнута та-же цѣль, что и методомъ Варинга-Лагранжа [5]).

4. Другая цѣль, которую алгебра себѣ ставитъ, имѣетъ болѣе теоретическое значеніе и относится къ алгебраическимъ законамъ, выражающимъ зависимость корней уравненія отъ коэффиціентовъ. Совер-

[1]) Ньютонъ „Arithmetica universalis"; теорема доказана Сильвестромъ (Sylvester), Transactions of the Irish Academy t. 24 (1871); Бюданъ (Budan), Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques (1803); Фурье (Fourier) Analyse des équations determinées (1831). Ролль (Rolle) 1652 - 1719, Traité d'Algèbre 1690.

[2]) Варингъ. (E. Waring) Medit. algebr. Cambridge. 1770.

[3]) Лагранжъ. (L. Lagrange). De la résolution des équations numériques de tous les degrés Paris 1798 (ges. Werke Bd. III).

[4]) Штурмъ (Jacob Karl Franz Sturm) родился въ Женевѣ въ 1803 году; умеръ въ Парижѣ въ 1855 году. Работа Штурма появилась сначала въ журналѣ „Bulletin de Férussac" 1829, а затѣмъ въ „Отчетахъ Парижской Академіи" въ 1835 г. Нѣмецкій переводъ, принадлежащій Леви (Loewy), вошелъ въ составъ Оствальдовскаго изданія классиковъ (Ostwalds Klassiker № 143, 1904).

[5]) L. Kronecker „Ueber den Zahlbegriff". Crelles Journal Bd. 101, 1887.

шенно естественно, что успѣхъ, достигнутый при рѣшеніи уравненія третьей и четвертой степени, постоянно побуждалъ математиковъ искать разрѣшенія уравненій болѣе высокихъ степеней и прежде всего уравненій пятой степени; задача заключалась, конечно, въ томъ, чтобы привести рѣшеніе уравненія къ радикаламъ. Извѣстно, что этимъ вопросомъ занимался Лейбницъ; въ связи съ этимъ стоитъ, очевидно, попытка рѣшенія этой задачи, которую Чирнгаузъ опубликовалъ въ 1683 году [1]).

Онъ вводитъ въ уравненіе новое неизвѣстное; именно, если x есть корень уравненія $f(x)=0$, то онъ полагаетъ $y=\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ есть функція $(n-1)$-ой степени. Въ такомъ случаѣ y, въ свою очередь, удовлетворяетъ нѣкоторому уравненію n-ой степени, коэффиціенты котораго зависятъ отъ n произвольныхъ коэффиціентовъ функціи φ. Затѣмъ онъ старается опредѣлить эти коэффиціенты такимъ образомъ, чтобы уравненіе для y приняло форму $y^n=a$. Этотъ пріемъ дѣйствительно ведетъ къ цѣли для уравненій 3-ей и 4-ой степени; но при уравненіяхъ болѣе высокихъ степеней онъ ничего не даетъ. Тѣмъ не менѣе пріемъ Чирнгауза сохранилъ значеніе для современной алгебры, такъ какъ онъ даетъ средства приводить уравненія болѣе высокихъ степеней къ нѣкоторымъ нормальнымъ формамъ. Такъ, напримѣръ, уравненія 5-ой степени приводятся къ такъ называемой Брингъ-Жерардовой формѣ $x^5+x+a=0$ (Ср. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig, 1884).

5. Новый толчекъ къ изслѣдованію алгебраическихъ уравненій далъ обширный мемуаръ Лагранжа, помѣщенный въ трудахъ Берлинской Академіи за 1770—71 г., подъ заглавіемъ „Réflexions sur la résolution algébrique des équations". Здѣсь прежде всего сопоставляются методы, которые служатъ для рѣшенія уравненія 3-ей и 4-ой степени и къ которымъ привели изслѣдованія Эйлера, Безу (1766) и Варинга (1736—1798); оцѣнивается внутреннее значеніе этихъ методовъ. Затѣмъ авторъ обобщаетъ эти методы и показываетъ, почему они непримѣнимы къ уравненіямъ болѣе высокихъ степеней. Лагранжъ приходитъ при этомъ къ понятію о резольвентахъ, которыя обыкновенно зависятъ, правда, отъ уравненій болѣе высокихъ степеней, нежели данныя, но въ извѣстномъ смыслѣ все таки даютъ упрощеніе задачи.

Функція корней уравненія, которая при перестановкахъ корней получаетъ опредѣленное число различныхъ значеній, удовлетворяетъ уравненію, степень котораго зависитъ отъ числа этихъ значеній. Такъ какъ число перестановокъ n элементовъ равно $n!$, то функція n корней уравненія n-ой степени имѣетъ не болѣе $n!$ значеній и удовлетворяетъ уравненію соотвѣтствующей степени. Но примѣненіе резольвентъ понижаетъ

[1]) Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, 1651—1708, былъ въ дружескихъ отношеніяхъ съ Лейбницемъ.

степень этого уравненія до $(n-2)!$, т. е. для уравненія 5-ой степени до 6-ой степени. Эта работа дѣлаетъ Лагранжа предшественникомъ современной алгебры, которая покоится на теоріи группъ перестановокъ и симметрическихъ функцій.

6. Въ виду продолжительныхъ и многочисленныхъ безплодныхъ попытокъ найти рѣшеніе уравненія 5-ой степени, становилось все болѣе и болѣе сомнительнымъ, можетъ ли эта задача вообще быть разрѣшена, правильно ли поставленъ вопросъ. Уже Гауссъ въ своей докторской диссертаціи (1799, полное собран. соч. т. III, стр. 17), въ которой онъ въ первый разъ даетъ доказательство существованія корня алгебраическаго уравненія, высказывается по этому поводу очень опредѣленно. Онъ подчеркиваетъ, что рѣшеніе уравненій въ томъ видѣ, какъ его до сихъ поръ понимаютъ, представляетъ собой не что иное, какъ приведеніе уравненія къ ряду двучленныхъ уравненій и что двучленныя уравненія отличаются отъ остальныхъ только большею легкостью численнаго ихъ разрѣшенія. Гауссъ указываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что нѣтъ никакихъ основаній допускать возможность такого пріема для уравненія любой степени. Онъ даже сообщаетъ здѣсь о дальнѣйшихъ своихъ изслѣдованіяхъ въ этомъ направленіи, которыхъ, однако, не оказалось ни въ опубликованныхъ имъ работахъ, ни въ бумагахъ, оставшихся послѣ его смерти. Но за то уже въ 1801-омъ году въ своихъ „Disquisitiones arithmeticae“, въ главѣ о дѣленіи окружности на равныя части Гауссъ даетъ уже важный примѣръ глубокаго анализа алгебраическихъ уравненій. Но такъ какъ уравненія, съ которыми авторъ имѣетъ дѣло, разрѣшаются въ радикалахъ, то вопросъ, поставленный Гауссомъ, остается здѣсь на заднемъ планѣ, тогда какъ на первое мѣсто выступаетъ рядъ выводовъ, относящихся къ алгебрѣ и къ теоріи чиселъ; въ частности, въ первой очереди стоитъ вопросъ о послѣдовательномъ приведеніи даннаго уравненія къ ряду уравненій возможно низшей степени. Гауссова теорія дѣленія окружности на равныя части сдѣлалась образцомъ для всѣхъ общихъ алгебраическихъ изысканій. Изъ замѣтки, помѣщенной въ „Disquisitiones“, видно, что Гауссъ получилъ тѣ-же результаты и въ другихъ отдѣлахъ, напримѣръ при дѣленіи эллиптическихъ функцій; замѣчаніе это было понято лишь спустя нѣсколько десятилѣтій, когда Абель и Якоби разработали теорію эллиптическихъ функцій.

7. Между тѣмъ въ Италіи была уже сдѣлана серьезная попытка доказать невозможность рѣшенія уравненій 5-ой степени. Попытка эта принадлежитъ Руффини и опубликована имъ въ 1799-омъ году въ учебникѣ „Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la resoluzione algebraica della equazioni generali di grado superiore al quarto“ [1]);

[1]) Руффини (Paolo Ruffini, 1765 - 1822), былъ собственно по призванію врачемъ, но впослѣдствіи занималъ ученую должность по математикѣ при универси-

въ пяти дальнѣйшихъ сочиненіяхъ, послѣднее изъ которыхъ появилось въ 1813 г., онъ постоянно возвращается къ тому же вопросу.

Руффини въ общемъ находится на правильномъ пути, такъ какъ онъ исходитъ отъ изслѣдованія числа значеній, которыя можетъ принимать функція отъ корней уравненія при перестановкахъ этихъ корней; благодаря этому онъ является первымъ обоснователемъ теоріи группъ. Однако, его доказательства еще вызываютъ рядъ сомнѣній; Мальфатти вскорѣ послѣ появленія этихъ работъ высказалъ эти сомнѣнія и оспаривалъ полученные имъ результаты. Сверхъ того его изложеніе мало доступно, а за предѣлами Италіи его работы почти вовсе не были извѣстны.

Въ 1815 г. Коши опубликовалъ работу „Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités, qu'elle renferme“, за которымъ позже (1844) послѣдовалъ болѣе обширный мемуаръ, посвященный тому же предмету. Здѣсь въ первый разъ установлено понятіе о составленіи перестановокъ и о группахъ; хотя понятія эти встрѣчаются уже у Руффини, о которомъ Коши попутно упоминаетъ, но только здѣсь они дѣйствительно положены въ основу цѣльной теоріи.

8. Значительный шагъ впередъ алгебра сдѣлала благодаря трудамъ Абеля (Niels Henrik Abel)

Абель родился въ деревнѣ Финё (Finnö) въ Норвегіи 5-го Августа 1802 года и скончался 6-го Апрѣля 1829 года. По поводу столѣтняго юбилея со дня его рожденія его соотечественники Гольстъ, Штёрмеръ и Силовъ (Holst, Störmer, Sylow) опубликовали его письма, которыя воспроизводятъ чудный образъ этого юнаго ученаго. То была мягкая натура съ жизнерадостнымъ, общительнымъ характеромъ, загубленная заботами, нуждой и недугомъ. Безъ всякаго побужденія извнѣ, среди разнообразныхъ затрудненій изъ него развился математикъ, создавшій во время своего короткаго пребыванія въ Германіи и Франціи рядъ работъ, которыя уже на 27-омъ году его жизни обезсмертили его имя. Смерть похитила его въ тотъ моментъ, когда приглашеніе на Берлинскую каѳедру должно было освободить его отъ всякихъ заботъ о насущныхъ нуждахъ. Это приглашеніе было дѣломъ извѣстнаго Крелля (Crelle), основателя „Журнала чистой

тетѣ въ Моденѣ. Ср. весьма достопримѣчательную статью Буркгардта „Начало теоріи группъ и Паоло Руффини“ Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Leipzig 1892.

[1]) Augustin Louis Couchy родился въ Парижѣ въ 1789 г. Послѣ іюльской революціи онъ жилъ въ Прагѣ въ качествѣ воспитателя герцога Бордосскаго, позднѣе вновь работалъ въ Парижѣ и умеръ въ 1857 г. Это одинъ изъ наиболѣе разносторонних изслѣдователей и плодовитыхъ писателей во всѣхъ почти отрасляхъ математики и математической физики. Его произведенія издаются парижской академіей во многихъ томахъ.

прикладной математики" (Journal für reine und angewandte Mathematik"). Крелль съ отеческой заботливостью отнесся къ молодому Абелю, пріѣхавшему въ Германію чужимъ и неизвѣстнымъ юношей, всячески поддерживалъ его и уже этимъ заслужилъ благодарность ученаго міра.

Абель началъ свои научныя изслѣдованія съ рѣшенія уравненія 5-ой степени, которое, какъ ему казалось, ему удалось найти. Это было заблужденіе, въ чемъ онъ самъ скоро убѣдился; но оно имѣло ту хорошую сторону, что обратило на него вниманіе норвежскихъ математиковъ, въ особенности Гансгена (Hansteen) и обезпечило ему ихъ поддержку, которой онъ пользовался всю жизнь. Руководящую роль по отношенію къ Абелю сыгралъ Дегенъ (Degen) въ Копенгагенѣ: Дегенъ, правда, не усмотрѣлъ ошибки въ рѣшеніи уравненія 5-ой степени, предложенномъ Абелемъ, но все же относился къ этому рѣшенію съ недовѣріемъ и указалъ Абелю область, въ которой послѣдній вскорѣ сдѣлалъ такія великія открытія, именно теорію эллиптическихъ функцій. Но и алгебры онъ не потерялъ изъ виду и именно въ связи съ теоріей эллиптическихъ функцій онъ сдѣлалъ въ ней наиболѣе замѣчательныя открытія.

Когда рѣшеніе уравненія 5-ой степени, какъ это и должно было быть, ему не удалось, онъ поставилъ себѣ цѣлью рѣшить, возможно ли вообще такое рѣшеніе. Не имѣя никакихъ свѣдѣній о работахъ Руффини, онъ далъ первое полное доказательство невозможности (1824—1826). Но будучи далекъ отъ мысли, что этимъ задача исчерпывается, онъ ставитъ вопросъ о характерѣ всѣхъ спеціальныхъ уравненій высшихъ степеней, допускающихъ алгебраическое рѣшеніе. Уже Гауссъ, какъ мы видѣли, указалъ классъ такого рода уравненій въ своей теоріи дѣленія окружности на равныя части. Упомянутое же выше таинственное замѣчаніе Гаусса, загадку котораго также раскрылъ Абель, указывало на дальнѣйшія области, въ которыхъ являются такого рода уравненія. Эти идеи привели къ дѣленію эллиптическихъ и гиперэллиптическихъ функцій, а также къ теоріи комплекснаго умноженія эллиптическихъ функцій. Такимъ образомъ Абель открылъ большой классъ алгебраическихъ уравненій, которыя разрѣшаются въ радикалахъ и, помимо того, обладаютъ рядомъ замѣчательныхъ свойствъ; эти уравненія сохранили названіе „Абелевыхъ уравненій".

Абель поставилъ себѣ, однако, и болѣе общую задачу, именно слѣдующую: найти всѣ уравненія опредѣленной степени, которыя допускаютъ алгебраическое рѣшеніе, а также рѣшить, допускаетъ ли заданное уравненіе алгебраическое рѣшеніе или нѣтъ; ясно, что въ связи съ этимъ стоитъ вопросъ о наиболѣе общей формѣ алгебраическаго выраженія, которое удовлетворяетъ алгебраическому уравненію.

Въ незаконченной работѣ, опубликованной лишь много лѣтъ послѣ его смерти, сохранились важныя предложенія, которыя послужили

для Кронекера точкой отправленія дальнѣйшихъ изслѣдованій въ этой области *).

9. Совершенно своеобразное явленіе въ исторіи алгебры представляетъ собой Эваристъ Галуа (Evariste Galois). Онъ родился въ 1811 году вблизи Парижа и погибъ на дуэли въ маѣ 1832 года, не достигши такимъ образомъ и 21 года. Въ возрастѣ около 16-ти лѣтъ, будучи еще ученикомъ коллегіи Людовика Великаго, Галуа сталъ заниматься болѣе глубокими вопросами алгебры и нѣкоторыя изъ своихъ работъ передалъ въ Парижскую Академію и опубликовалъ въ журналахъ „Annalen von Gergonne“ и „Bulletin des sciences mathématiques de Férussac“.

Важнѣйшіе результаты своихъ изслѣдованій онъ изложилъ въ письмѣ, которое онъ наканунѣ роковой дуэли, предчувствуя смерть, написалъ своему другу Августу Шевалье (Auguste Chevalier); это письмо было позднѣе опубликовано въ „Revue encyclopédique“ и потомъ еще разъ въ журналѣ Ліувиля. Галуа въ извѣстномъ смыслѣ закончилъ теорію группъ перестановокъ и ихъ приложеніе къ алгебрѣ; именно, онъ показалъ, что всѣ вопросы, которые могутъ быть поставлены относительно алгебраическихъ уравненій, необходимо приводятся къ этой теоріи. Установивши точно, что нужно разумѣть подъ областью раціональности, онъ показываетъ, что вся природа алгебраическаго уравненія зависитъ отъ особой группы перестановокъ, которая съ того времени сохранила названіе группы Галуа. Этимъ путемъ онъ находитъ простѣйшія условія, чтобы уравненіе простой степени разрѣшалось въ радикалахъ. Условіе это въ его формулировкѣ сводится къ тому, чтобы всѣ корни уравненія выражались раціонально черезъ два изъ нихъ. Но онъ разбираетъ и другіе вопросы, напримѣръ, вопросъ о томъ, при какихъ условіяхъ уравненіе можетъ быть приведено къ уравненію болѣе низкой степени, а также, какимъ образомъ можно достигнуть пониженія группы пріобщеніемъ ирраціональности; но всѣмъ этимъ вопросамъ онъ даетъ приложенія къ теоріи эллиптическихъ функцій, въ то время только что развернувшейся.

10. Во всѣхъ этихъ изслѣдованіяхъ не содержится какихъ либо общихъ предположеній объ области раціональности. Она можетъ состоять изъ раціональныхъ и ирраціональныхъ чиселъ, она можетъ содержать также перемѣнныя величины. Такимъ образомъ, всѣ эти предложенія относятся какъ къ числамъ, такъ и къ алгебраическимъ функціямъ, теорія которыхъ, въ связи съ проистекающими изъ нихъ путемъ интегрированія трансцендентными функціями, въ рукахъ Абеля, Римана и Вейерштрасса достигла высокой степени совершенства.

*) Сочиненія Абеля, включая и посмертныя работы, вышли въ двухъ изданіяхъ; первое изданіе выпустилъ Гольмбоэ (Holmböe, учитель и другъ Абеля, въ 1831 году: второе изданіе выпущено въ 1901 году издательствомъ Тейбнера подъ руководствомъ Силова и Ли.

11. Въ теоріи алгебраическихъ чиселъ задачи, относящіяся къ этимъ общимъ теоріямъ, въ сущности, только поставлены и ждутъ еще своего рѣшенія. Ближайшая цѣль заключается въ томъ, чтобъ изучить свойства спеціальныхъ категорій алгебраическихъ чиселъ; изслѣдователю открывается здѣсь неизмѣримое поле для дальнѣйшихъ изысканій. Въ настоящее время мы имѣемъ болѣе или менѣе точныя свѣдѣнія только о тѣхъ алгебраическихъ числахъ, къ которымъ приводитъ дѣленіе окружности на равныя части и комплексное умноженіе эллиптическихъ функцій.

Книга III.

АНАЛИЗЪ.

ГЛАВА XXII.

Безконечные ряды.

§ 106. Ряды съ положительными членами.

1. Подъ **числовымъ рядомъ** мы разумѣемъ составленную по какому либо закону послѣдовательность чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n$$

какого угодно рода. Эти числа называютъ также **членами** ряда. Рядъ называется **безконечнымъ**, если законъ таковъ, что его можно примѣнять неограниченно, такъ что для любого индекса ν можно вычислить соотвѣтствующее число a_ν.

Такой безконечный рядъ образуютъ, напримѣръ, натуральныя числа 1, 2, 3, ... и вообще члены **ариѳметической прогрессіи** a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, ... или члены **геометрической прогрессіи** 1, a, a^2, a^3, ... Другими примѣрами могутъ служить системы чиселъ:

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ \ldots,\ n^k,$$

гдѣ показатель k можетъ быть произвольнымъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ.

Встрѣчаются и такіе числовые ряды, которые составлены по гораздо болѣе сложнымъ законамъ, какъ, напримѣръ, рядъ послѣдовательныхъ приближенныхъ значеній безконечной десятичной дроби.

2. Мы сначала разсмотримъ ряды, члены которыхъ суть **положительныя числа**. Изъ такого ряда

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

мы можемъ составить другой рядъ, составляя суммы двухъ, трехъ, четырехъ, ... начальныхъ членовъ перваго ряда. Если присоединимъ еще, въ качествѣ перваго члена новаго ряда, первый членъ a_1, то получимъ числа:

$$A_1 = a_1,$$
$$A_2 = a_1 + a_2,$$
$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$A_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$
$$\cdot \qquad \cdot$$

n-ое изъ которыхъ есть

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Рядъ чиселъ A_n также безконеченъ; его члены также положительны, но онъ имѣетъ еще ту особенность, что члены его возрастаютъ вмѣстѣ съ n, такъ что

$$A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < \ldots$$

Ибо каждый членъ A_{n+1} получается изъ предыдущаго прибавленіемъ положительнаго числа a_{n+1}.

Рядъ чиселъ A_r называется рядомъ суммъ, соотвѣтствующимъ ряду чиселъ a_r.

Наоборотъ, когда имѣемъ числовой рядъ $A_1, A_2, A_3, \ldots$ съ положительными членами, возрастающими вмѣстѣ съ индексомъ, то этотъ рядъ будетъ рядомъ суммъ для ряда чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если положимъ

$$a_1 = A_1, \; a_2 = A_2 - A_1, \; a_3 = A_3 - A_2,$$

Такъ, рядъ натуральныхъ чиселъ есть рядъ суммъ для ряда, состоящаго исключительно изъ единицъ.

Рядъ

$$\frac{1}{2}, \; \frac{2}{3}, \; \frac{3}{4}, \; \frac{4}{5}$$

есть рядъ суммъ для ряда

$$\frac{1}{1.2}, \; \frac{1}{2.3}, \; \frac{1}{3.4}, \; \frac{1}{4.5}$$

и т. д.

3. Относительно ряда суммъ слѣдуетъ различать два случая. Если есть такое число K, что всѣ числа A_n постоянно остаются меньше K, то, по § 23, числа A_n имѣютъ верхнюю границу, которую мы обозначимъ черезъ A, то есть, всѣ числа A_n меньше A. Если же Δ есть произвольное, сколь угодно малое положительное число, то между A и $A - \Delta$ имѣются числа A_n; а такъ какъ числа A_n увеличиваются вмѣстѣ съ n то въ этомъ интервалѣ находятся всѣ числа A_n, для которыхъ $n > m$, если только число A_m лежитъ въ этомъ интервалѣ.

Въ этомъ случаѣ рядъ суммъ A_n называется **сходящимся**. Онъ стремится къ числу A, и сходимость считается тѣмъ лучшею, чѣмъ

быстрѣе мы, при данномъ Δ, попадаемъ въ интервалъ $(A - \Delta, A)$. Число A называютъ **суммою** ряда чиселъ a_n. Пишутъ также:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ говорятъ, что рядъ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, который обозначаютъ также одною буквою A, **сходится**.

Часто употребляютъ знакъ Σ (сумма) и пишутъ:

$$A = \sum^{h} a_h,$$

гдѣ индексъ h при Σ означаетъ, что h проходитъ черезъ значенія 1, 2, 3, … до безконечности.

4. Для обозначенія **предѣла** ряда величинъ употребляютъ знакъ Lim (сокращеніе слова limes = предѣлъ) и пишутъ такимъ образомъ

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty} A_n = A, \tag{1}$$

причемъ $n = \infty$ (n равно безконечности), написанное подъ знакомъ Lim выражаетъ, что величина A_n становится сколь угодно близкою къ A, когда n возрастаетъ сверхъ всякихъ границъ. Выражаясь нѣсколько неточно, называютъ число A суммой безконечнаго множества слагаемыхъ a_h. Мы можемъ сказать точнѣе:

Сумма безконечнаго ряда положительныхъ членовъ есть верхняя граница всѣхъ суммъ, составленныхъ изъ конечнаго числа этихъ членовъ [1].

Если сумма сходится, то, составляя сумму A_n для достаточно большого n, можно вычислить A съ какою угодно степенью точности; на этомъ именно и основано столь частое употребленіе безконечныхъ рядовъ.

Слѣдуетъ замѣтить, что при составленіи суммы A_n члены $a_1, a_2, a_3, \ldots$ берутся по порядку, то есть ни одного изъ слагаемыхъ не должно недоставать. Но если n уже достаточно велико, такъ что A_n уже находится въ предписанномъ интервалѣ $(A - \Delta, A)$, то мы останемся въ этомъ интервалѣ, если будемъ прибавлять послѣдующіе члены $a_{n+1}, a_{n+2} \ldots$ и не по порядку, а опуская нѣкоторые изъ нихъ, такъ какъ при этомъ числа A_n все еще возрастаютъ, оставаясь, однако, постоянно меньше A.

[1] Хотя число A было опредѣлено, какъ верхняя граница суммъ A_n, составленныхъ изъ конечнаго числа **начальныхъ** членовъ ряда $a_1, a_2, \ldots, a_h, \ldots$ взятыхъ по порядку безъ пропусковъ, но A будетъ верхнею границею всѣхъ вообще суммъ s, составленныхъ изъ членовъ a_h. Дѣйствительно, пусть s будетъ какая либо сумма членовъ a_h, и пусть m будетъ наибольшій индексъ членовъ a_h въ суммѣ s. Если s не $= A_m$, то члены суммы s составляютъ часть членовъ суммы A_m, такъ что $s \leqq A_m < A$. Поэтому въ комплексѣ всѣхъ суммъ s каждый членъ меньше A и, такъ какъ между суммами s имѣются суммы A_n, сколь угодно мало отличающіяся отъ A, то A есть верхняя граница всѣхъ s.

5. Если же нѣтъ такого числа, меньше котораго остаются всѣ суммы A_n, — если, слѣдовательно, для достаточно большихъ значеній n суммы A_n превышаютъ всякое данное число, то рядъ суммъ чиселъ a_n расходится. Комплексъ чиселъ a_n въ этомъ случаѣ не имѣетъ суммы. Однако, и въ этомъ случаѣ пишутъ

$$\lim_{n=\infty} A_n = \infty, \qquad (2)$$

гдѣ знакъ ∞ (безконечность) не означаетъ опредѣленнаго числа, а выражаетъ только, что числа A_n превосходятъ любое число, когда n неограниченно возрастаетъ.

6. Очень важное значеніе имѣетъ слѣдующее необходимое условіе сходимости ряда: если ε есть произвольно малое данное положительное число, то всѣ члены a_n должны быть меньше ε, коль скоро n больше, чѣмъ нѣкоторое достаточно большое число m, зависящее отъ ε; то есть, нуль долженъ быть нижнею границею чиселъ a_n; въ знакахъ:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0. \qquad (3)$$

Въ самомъ дѣлѣ если допустить, что какъ бы велико ни было число m, все еще существуютъ превосходящія его значенія n, для которыхъ $a_n > \varepsilon$, то можно взять n столь большимъ, чтобы въ суммѣ A_n заключалось произвольно большое число h членовъ, большихъ ε, и чтобы такимъ образомъ было $A_n > h\varepsilon$; но при всякомъ данномъ ε произведеніе $h\varepsilon$ можно сдѣлать произвольно большимъ, если взять h достаточно большимъ.

Такимъ образомъ условіе (3) есть необходимое, но отнюдь не достаточное условіе сходимости.

Позже мы познакомимся съ примѣрами рядовъ, въ которыхъ условіе (3) выполняется, хотя эти ряды расходящіеся.

§ 107. Безконечные геометрическіе ряды.

1. Какъ первый примѣръ безконечнаго ряда, разсмотримъ геометрическій рядъ

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ \ldots,$$

въ которомъ x есть положительное число. Для суммы A_n мы, по § 58, получаемъ

$$A_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} \qquad (1)$$

$$= \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

Такимъ образомъ, если $x < 1$, то всѣ суммы A_n меньше $1/(1-x)$ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, $1/(1-x)$ есть верхняя граница всѣхъ суммъ A_n, потому что x^n, при неограниченномъ возрастаніи числа n, опускается ниже всякой границы.

Въ этомъ предположеніи рядъ суммъ A_n сходится и мы можемъ положить

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}. \qquad (2)$$

Если же $x>1$, то, вмѣстѣ съ n, сумма A_n возрастаетъ выше всякихъ границъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ x^n возрастаетъ выше всякихъ границъ. Наконецъ, для $x=1$

$$A_n=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=n,$$

и въ этомъ случаѣ A_n возрастаетъ вмѣстѣ съ n выше всякихъ границъ. Рядъ $1+x+x^2+x^3+\ldots$ есть поэтому рядъ сходящійся, когда $x<1$; расходящійся, когда $x\geqslant 1$.

2. Къ сходящимся геометрическимъ рядамъ принадлежатъ также десятичныя періодическія дроби, и данное нами въ § 69, 11 доказательство того, что всякая десятичная періодическая дробь можетъ быть обращена въ обыкновенную, въ своей основѣ есть не что иное, какъ суммированіе этого безконечнаго геометрическаго ряда.

Именно, если безконечная десятичная дробь

$$\gamma=0,z_1z_2z_3\ldots$$

имѣетъ періодъ

$$z_1z_2z_3\ldots z_f$$

и если написанное въ десятичной системѣ число $z_1z_2z_3\ldots z_f$ положить равнымъ m:

$$z_1z_2z_3\ldots z_f=m,$$

то десятичная дробь будетъ имѣть значеніе

$$\begin{aligned}\gamma&=m\,10^{-f}+m\,10^{-2f}+m\,10^{-3f}+\ldots\\&=m\,10^{-f}(1+10^{-f}+10^{-2f}+\ldots),\end{aligned}$$

такъ что, положивъ $x=10^{-f}$ и помноживъ члены дроби (2) на 10^f, получимъ

$$\gamma=\frac{m}{10^f-1};$$

это же есть раціональная дробь, знаменатель которой, будучи цѣлымъ числомъ, можетъ быть написанъ при помощи однихъ только девятокъ.

3. Но и непеоріодическая безконечная десятичная дробь есть сумма сходящагося безконечнаго ряда, ибо, если

$$\gamma=0,z_1z_2z_3\ldots,$$

то, положивъ

$$\gamma_n=z_1\,10^{-1}+z_2\,10^{-2}+z_3\,10^{-3}+\ldots+z_n\,10^{-n},$$

найдемъ, что всѣ числа γ_n меньше 1; слѣдовательно, рядъ γ сходится.

§ 108. Дальнѣйшіе примѣры сходящихся и расходящихся рядовъ.

1. Въ качествѣ слѣдующаго примѣра, разсмотримъ безконечный рядъ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots, \tag{1}$$

котораго члены $a_n=\frac{1}{n}$ удовлетворяютъ условію § 106, 4, но который, какъ мы увидимъ, все-же есть рядъ расходящійся [2]).

Имѣемъ именно

$$1>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

и можно, такимъ образомъ, сумму (1) разложить на произвольно большое число отдѣльныхъ суммъ, изъ коихъ каждая больше $\frac{1}{2}$ и коихъ сумма можетъ поэтому стать произвольно большой.

2. Чтобы нѣсколько точнѣе изслѣдовать характеръ этого возрастанія, полагаемъ:

$$A_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

и для всякаго m:

$$\sigma_m=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{2m-1}.$$

Если мы каждый изъ m членовъ этой суммы замѣнимъ меньшимъ числомъ $\frac{1}{2m}$, то сумма уменьшится; если же замѣнить каждый изъ этихъ членовъ дробью $\frac{1}{m}$, то сумма увеличится. Поэтому

$$1>\sigma_m>\frac{1}{2}.$$

Принимая $m=1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots,\ 2^{\nu-1}$, получаемъ:

$$A_{2^\nu-1}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_8+\cdots+\sigma_{2^{\nu-1}}.$$

Такимъ образомъ

$$\nu>A_{2^\nu-1}>\frac{\nu}{2},$$

[2]) Рядъ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ называется гармоническимъ.

и если $n \geqslant 2^{\nu}-1$, то $A_n > \frac{\nu}{2}$ и возрастаетъ до безконечности вмѣстѣ съ n. Слѣдовательно, рядъ (1) расходящійся.

3. Мы разсмотримъ дальше рядъ

$$S_h = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \cdots \tag{2}$$

гдѣ h есть показатель, который можетъ и не быть цѣлымъ числомъ.

Если $h=1$, то рядъ S_h переходитъ въ только что разсмотрѣнный рядъ A, расходимость котораго мы доказали. Если $h<1$, то каждый членъ ряда S_h больше соотвѣтствующаго члена ряда A и, слѣдовательно, рядъ S_h будетъ расходиться.

Остается, такимъ образомъ, только тотъ случай, когда $h>1$.

Чтобы изслѣдовать сходимость ряда въ этомъ случаѣ, мы замѣтимъ, что сумма

$$\sigma_m = \frac{1}{m^h} + \frac{1}{(m+1)^h} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^h}$$

увеличится, если замѣнить въ ней всѣ члены первымъ членомъ $1/m^h$. Сообразно съ этимъ

$$\sigma_m < \frac{1}{m^{h-1}}.$$

Это мы примѣняемъ къ нашему ряду, полагая $m=1, 2, 4, 8,$.

$$1 = 1,$$

$$\frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} < \frac{1}{2^{h-1}},$$

$$\frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \frac{1}{6^h} + \frac{1}{7^h} < \frac{1}{2^{2(h-1)}},$$

$$\frac{1}{8^h} + \frac{1}{9^h} + \cdots + \frac{1}{15^h} < \frac{1}{2^{3(h-1)}},$$

. . . .

Если станемъ складывать эти отдѣльныя суммы до произвольнаго члена [3])

---

[3]) Пусть $\frac{1}{n^h}$ будетъ прозвольный членъ ряда S_h. Цѣлое число n содержится между двумя послѣдовательными цѣлыми степенями числа 2 Пусть это будетъ $(\nu-1)$-ая и ν-ая степени, такъ что $2^{\nu-1} < n \leq 2^{\nu}$. Тогда, полагая $m = 2^{\nu-1}$, имѣемъ

$$\frac{1}{(2^{\nu-1})^h} + \frac{1}{(2^{\nu-1}+1)^h} + \cdots + \frac{1}{n^h} + \cdots + \frac{1}{(2^{\nu})^h} < \frac{1}{(2^{\nu-1})^{(h-1)}};$$

и положимъ

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \frac{1}{5^h} + \dots + \frac{1}{n^h},$$

то получимъ

$$S_n < 1 + \frac{1}{2^{h-1}} + \frac{1}{2^{2(h-1)}} + \frac{1}{2^{3(h-1)}} + \dots$$

причемъ сумма на правой сторонѣ можетъ быть распространена до безконечности, такъ какъ отъ этого она только возрастаетъ.

Такъ какъ теперь $h > 1$, разность $h - 1$ есть положительное число, $1/2^{(h-1)}$ есть правильная дробь, то сумма геометрическаго ряда, стоящаго въ правой части этого неравенства, можетъ быть найдена по правилу § 107, что даетъ

$$S_n < \frac{1}{1 - 2^{h-1}}.$$

Рядъ (2) будетъ, такимъ образомъ, сходящимся, если $h > 1$; расходящимся, если $h \leqslant 1$.

§ 109. Признаки сходимости.

1. Результаты послѣднихъ двухъ параграфовъ могутъ быть обобщены при помощи одной общей теоремы о сходимости рядовъ

Эта теорема гласитъ:

Если

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

есть сходящійся безконечный рядъ (съ положительными членами) и если

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \dots,\ k_n,\ \dots$$

есть какой либо рядъ положительныхъ чиселъ, которыя всѣ остаются меньше нѣкотораго конечнаго предѣла g, то и рядъ

$$K = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 + \dots$$

есть рядъ сходящійся.

Доказательство почти само собой напрашивается. Ибо, если положить:

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$
$$K_n = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + \dots + k_n a_n,$$

и тѣмъ болѣе

$$\frac{1}{(2^{r-1})^h} + \frac{1}{(2^{r-1}+1)^h} + \dots + \frac{1}{n^h} < \frac{1}{2^{(r-1)(h-1)}}.$$

Это и есть послѣднее въ ряду складываемыхъ неравенствъ.

то изъ условій теоремы вытекаетъ, что

$$K_n < gA_n; \quad (1)$$

если поэтому всѣ суммы A_n остаются ниже границы A, то суммы K_n остаются ниже границы gA, а это (для рядовъ съ положительными членами) есть достаточное условіе сходимости.

2. Этотъ способъ разсужденія ни въ чемъ не измѣняется, если допустить, что между числами $k_1, k_2, k_3, \ldots$ фигурируютъ и нули, потому что тогда всѣ суммы K_n остаются положительными и неравенство (1) сохраняется. Суммы K_n все еще имѣютъ верхнюю границу. Отсюда слѣдуетъ:

Сумма, составленная изъ части членовъ сходящагося ряда, также сходится [4]).

3. Если въ безконечномъ ряду измѣнимъ нѣкоторое опредѣленное конечное число членовъ, то ничто не измѣнится въ отношеніи расходимости или сходимости ряда.

Ибо, если число m такъ велико, что сумма A_m содержитъ всѣ измѣненные члены, то, вслѣдствіе измѣненія членовъ, всѣ суммы A_n, въ которыхъ $n > m$, измѣнятся на одну и ту-же конечную величину и послѣ измѣненія эти суммы имѣютъ верхнюю конечную границу или не имѣютъ ея, смотря по тому, имѣло ли мѣсто то или другое до ихъ измѣненія.

4. О сходимости или расходимости безконечнаго ряда можно въ нѣкоторыхъ случаяхъ судить по закону составленія членовъ a_n и для этого служитъ теорема п. 1-аго въ связи съ примѣрами предыдущихъ параграфовъ. Первый изъ такихъ признаковъ заключается въ слѣдующемъ:

Если члены безконечнаго ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

таковы, что отношеніе $a_{n+1} : a_n$, начиная съ опредѣленнаго значенія n, постоянно остается меньше нѣкоторой правильной дроби и, въ частности, если

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

есть правильная дробь, то рядъ сходится.

Для доказательства этой теоремы, возьмемъ число x, удовлетворяющее неравенству

$$0 < x < 1,$$

---

[4]) Беремъ $k_n = 0$ или $k_n = 1$, смотря по тому, входитъ ли или не входитъ членъ a_n сходящагося ряда въ разсматриваемую часть.

и положимъ $a_n = k_n x^n$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k_{n+1}}{k_n} x < 0.$$

и такъ какъ $0 : x$ есть правильная дробь, то

$$k_{n+1} < k_n.$$

Числа k_n образуютъ, слѣдовательно, рядъ убывающихъ положительныхъ чиселъ и всѣ остаются меньше нѣкотораго конечнаго числа А такъ какъ число x есть правильная дробь, то рядъ

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

сходится; согласно же теоремѣ п. 1, сходится также и рядъ

$$k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \ldots = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Если предѣлъ отношенія $a_{n+1} : a_n$ больше 1, то числа a_n увеличиваются вмѣстѣ съ n, а потому не могутъ имѣть предѣломъ нуля. Слѣдовательно, уже по § 106, 6 рядъ расходящійся.

Предѣлъ частнаго $a_{n+1} : a_n$ можетъ быть равенъ 1 какъ для сходящихся, такъ для расходящихся рядовъ.

Ряды вида

$$X = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \ldots,$$

къ которымъ мы привели вопросъ, называются степенными рядами относительно x. Они сходятся, если числа $k_1, k_2, k_3, \ldots$ остаются конечными, а x есть правильная дробь. Къ этому классу принадлежатъ и безконечныя десятичныя дроби, которыя получаются, если положить $x = 1/10$, а подъ $k_1, k_2, k_3, \ldots$ разумѣть цифры, то есть, числа ряда 0, 1 ... 9.

5. Этотъ признакъ сходимости непримѣнимъ къ ряду S_h § 108, 3, потому что, при $a_n = n^{-h}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^h}$$

эти же частныя имѣютъ предѣломъ 1, каково бы ни было h. Между рядами S_h встрѣчаются, однако, какъ мы видѣли, какъ сходящіеся, такъ и расходящіеся.

Но именно изъ этого примѣра, который былъ нами изслѣдованъ непосредственно, мы можемъ вывести признакъ для такихъ случаевъ, для которыхъ первый признакъ не даетъ рѣшенія вопроса.

Если произведеніе na_n безгранично возрастаетъ вмѣстѣ съ n или имѣетъ при этомъ отличный отъ нуля предѣлъ g, то $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ есть рядъ расходящійся.

Ибо при каждомъ изъ этихъ предположеній возможно взять такое положительное число c, чтобы, начиная съ нѣкотораго достаточно большого значенія m перемѣнной n, было

$$a_n > \frac{c}{n};$$

поэтому будетъ также

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots > c\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots\right),$$

и сумма въ правой части этого неравенства съ безконечнымъ возрастаніемъ числа членовъ неограниченно возрастаетъ (по § 108, 1).

6. Если можно найти показателя b такого рода, что предѣлъ

$$\lim_{n=\infty} a_n n^h = g$$

есть конечное число, при чемъ $b > 1$. то рядъ $a_1 + a_2 + \ldots$ сходится.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ всѣ числа

$$a_n n^h = k_n$$

будутъ меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа [5]), а такъ какъ по § 108, 3 рядъ

$$1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \ldots$$

сходящійся, то, по теоремѣ п. 1-го; сходится и рядъ

$$k_1 + \frac{k_2}{2^h} + \frac{k_3}{3^h} + \ldots = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

7. Такъ, напримѣръ, въ силу этихъ теоремъ, рядъ

$$\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha+2\beta} + \frac{1}{\alpha+3\beta} + \frac{1}{\alpha+4\beta} + \ldots,$$

въ которомъ β есть положительное число, расходится, ибо предѣлъ дроби

[5]) Если c есть произвольное положительное число, то можно указать такое значеніе m перемѣнной n, что при $n \geqslant m$ будетъ $a_n b^n = k_n < g + c$. Если же означимъ черезъ C число, которое больше каждаго изъ чиселъ $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, g + c$, то всѣ числа k_n будутъ меньше C.

$$\frac{n}{\alpha+\beta n}=\frac{1}{\frac{\alpha}{n}+\beta}$$

равенъ $1:\beta$ и, слѣдовательно, отличенъ отъ нуля

8. Если

$$f(n)=\alpha n^h+\alpha_1 n^{h-1}+\alpha_2 n^{h-2}+\cdots+\alpha_h,$$

гдѣ α, α_1, α_2, ... α_h суть данныя числа, изъ коихъ α имѣетъ положительное значенiе, то

$$\frac{f(n)}{n^h}=\alpha+\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\ldots+\frac{\alpha_h}{n^h},$$

и, слѣдовательно, предѣлъ этого выраженiя, при безгранично возрастающемъ n, равенъ α. Поэтому числа

$$\frac{n^h}{f(n)}=k_n$$

остаются меньше нѣкотораго конечнаго числа, и рядъ

$$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\ldots=\frac{k_1}{1^h}+\frac{k_2}{2^h}+\frac{k_3}{3^h}+\ldots$$

сходится при $h>1$ (по теор. п. 1-го и § 108, 3.).

9. Такъ, напримѣръ, сумма дробей, обратныхъ послѣдовательнымъ треугольнымъ числамъ:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\ldots,$$

въ которой общiй членъ есть

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)},$$

сходится. Здѣсь мы въ состоянiи дѣйствительно разыскать сумму, ибо

$$a_n=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1},$$

и, слѣдовательно,

$$a_1+a_2+a_3+\ldots=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=2.$$

§ 110. Основанiе системы натуральныхъ логариѳмовъ.

1. Мы видѣли выше, въ теорiи логариѳмовъ, какiя соображенiя привели Непера къ тому, чтобы за основанiе системы логариѳмовъ

принять число $(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$, гдѣ Δ число весьма малое (у Непера одна десятимилліонная). Положивъ $\Delta = 1/n$, мы приходимъ къ числу вида

$$N = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

гдѣ n весьма большое число. Чтобы уяснить себѣ природу чисел ь N, которыя всѣ суть положительныя числа, примемъ сначала за n цѣлое число и развернемъ N для неопредѣленнаго n по формулѣ бинома. Если мы въ формулѣ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n!}x^n$$

положимъ $x = 1:n$, то получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots \qquad (1)$$
$$+ \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!},$$

откуда прежде всего можемъ заключить, что всѣ числа N больше, чѣмъ 2, ибо всѣ члены, слѣдующіе за первымъ членомъ суть положительныя числа. Съ другой стороны, замѣстивъ всѣ разности $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}, \ldots$, $1-\frac{n-1}{n}$ числомъ 1, которое больше каждой изъ нихъ, найдемъ, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}; \qquad (2)$$

а такъ какъ

$$2! = 2, \quad 3! = 2\cdot 3 > 2^2, \quad n! > 2^{n-1},$$

то тѣмъ болѣе

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}};$$

суммируя же геометрическій рядъ, имѣемъ по § 107,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \qquad (3)$$

Всѣ эти числа N оказываются такимъ образомъ меньше, чѣмъ 3, и должны поэтому (по § 23) имѣть верхнюю границу, которую, по установившемуся обыкновенію, мы будемъ обозначать черезъ e.

2. Мы докажемъ дальше, что числа N возрастаютъ вмѣстѣ съ n. Для этой цѣли замѣтимъ, что въ правой части равенства (1) всѣ слагаемыя суть положительныя числа и что мы уменьшимъ, слѣдовательно, это выраженіе, если опустимъ часть членовъ. Такимъ образомъ, при $m < n$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\dots \qquad (4)$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m!};$$

далѣе, такъ какъ $m < n$, то

$$1-\frac{1}{n} > 1-\frac{1}{m}, \quad 1-\frac{2}{n} > 1-\frac{2}{m}, \dots,$$

и вмѣстѣ съ этимъ a fortiori

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!}+\dots$$
$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{m!}.$$

Правая часть этого неравенства равна $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, какъ это видно изъ формулы (1), если замѣнить въ ней n черезъ m, а потому, какъ это и нужно было доказать,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \text{ если } n > m. \qquad (5)$$

Мы заключаемъ отсюда, что для всякаго n

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad (6)$$

что N тѣмъ ближе къ предѣлу e, чѣмъ больше n и что N, при достаточно большихъ значеніяхъ n, можетъ стать сколь угодно близкимъ къ предѣлу, не достигая его однако вполнѣ.

3. Можно было бы поэтому получить число e съ какою угодно степенью точности, вычисляя степени $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ для достаточно большихъ значеній n. Вслѣдствіе большой сложности этотъ способъ на практически не примѣняется. Для опредѣленія числа e слѣдующій путь представляется гораздо болѣе простымъ.

Изъ формулъ (4) и (6) вытекаетъ, что для любого m и для каждаго $n > m$ будетъ

$$e > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots \qquad (7)$$
$$+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{1}{m}$$

А такъ какъ, взявъ n достаточно большимъ, можно для каждаго даннаго m сдѣлать множители

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad \left(1 - \frac{2}{n}\right), \quad \left(1 - \frac{3}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

сколь угодно близкими къ единицѣ, то изъ неравенства (7) вытекаетъ, что при любомъ m

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!},$$

откуда, въ силу неравенства (2), слѣдуетъ, что

$$e > 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Далѣе, изъ самаго опредѣленія числа e слѣдуетъ, что оба числа e и $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ могуть быть сдѣланы сколь угодно близкими другъ къ другу, а вмѣстѣ съ тѣмъ сумма

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}, \qquad (8)$$

содержащаяся между ними, станетъ, при достаточно большомъ m, сколь угодной близкой къ e. Эту же сумму легко обратить въ десятичную дробь.

Этимъ уже доказана сходимость безконечнаго ряда

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Она вытекаетъ также и изъ общаго признака сходимости § 109, 4., ибо здѣсь отношеніе

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

имѣетъ предѣломъ нуль.

4. Чтобы оцѣнить величину погрѣшности, которую мы дѣлаемъ, вычисляя e при помощи выраженія (8), полагаемъ:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \Delta_m$$

и для всякаго $n > m$

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} + \Delta_n.$$

Отсюда путемъ вычисленія находимъ:

$$\Delta_m - \Delta_n = \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$
$$= \frac{1}{(m+1)!}\left(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \ldots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\ldots n}\right).$$

Но

$$1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \ldots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\ldots n}$$
$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-m+1}};$$

эта же сумма равна $2\left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right)$ и, слѣдовательно, меньше, чѣмъ 2. Такимъ образомъ получаемъ

$$\Delta_m < \Delta_n + \frac{2}{(m+1)!}$$

и такъ какъ, согласно п. 3, можно сдѣлать Δ_n сколь угодно малымъ, взявъ число n достаточно большимъ, то отсюда заключаемъ, что

$$\Delta_m < \frac{2}{(m+1)!}. \tag{9}$$

Выраженіе (8) легко вычисляется, такъ какъ m-ый его членъ получается изъ $(m-1)$-го дѣленіемъ послѣдняго на m. Мы получимъ, напримѣръ, съ точностью до седьмого десятичнаго знака

2
0,5
0,1666666667
0,0416666667
0,0083333333
0,0013888889
0,0001984127
0,0000248016
0,0000027557
0,0000002756
0,0000000251
―――――――――
2,7182818 .

Болѣе точное значеніе числа e будетъ:

$$e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ 23536\ 02874\ 71353.$$

5. Можно теперь освободиться отъ предположенія, что въ выраженіи

$$N = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

величина n, постоянно возрастая, принимаетъ только цѣлыя значенія, и доказать такимъ образомъ общую теорему:

Предѣлъ выраженія

$$X = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

при произвольномъ и неограниченномъ возрастаніи x равенъ числу e.

Это вытекаетъ изъ слѣдующей, подлежащей доказательству вспомогательной теоремы:

Если $x < y$, то

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y. \qquad (10)$$

Въ § 58, 3 мы для произвольнаго цѣлаго n доказали тождество

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

въ которомъ a и b могутъ быть совершенно произвольными числами.

Если мы возьмемъ числа a и b положительными и $a > b$, то сумма въ правой части, состоящая изъ n положительныхъ слагаемыхъ, увеличится, когда замѣнимъ въ ней b на a, и потому

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} < n a^{n-1},$$

или

$$a^n - b^n < n a^{n-1}(a - b), \qquad (11)$$

откуда далѣе слѣдуетъ, что

$$a^{n-1}(a - n(a - b)) < b^n \qquad (12)$$

въ предположеніи, что $a > b$.

Мы разумѣемъ теперь подъ p другое цѣлое число и полагаемъ:

$$a = 1 + \frac{p}{n-1},\ b = 1 + \frac{p}{n},$$

$$a - b = \frac{p}{n(n-1)},\ a - n(a - b) = 1;$$

тогда изъ неравенства (12) получимъ

$$\left(1+\frac{p}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{p}{n}\right)^{n}.$$

Примѣняя повторно эту формулу [6]), находимъ, что

$$\left(1+\frac{p}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{p}{n}\right)^{n},$$

когда m и n суть цѣлыя положительныя числа и

$$m < n.$$

Это неравенство сохранится, когда извлечемь изъ обѣихъ частей корни p-ой степени, причемь получимъ

$$\left(1+\frac{p}{m}\right)^{\frac{m}{p}} < \left(1+\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{p}}. \tag{13}$$

Каждые два раціональныхъ числа, x, y могутъ быть представлены въ видѣ дробей, имѣющихъ одинъ и тотъ же знаменатель; при $x < y$ мы можемъ поэтому положить:

$$x = \frac{m}{p}, \quad y = \frac{n}{p}.$$

Но тогда неравенство (13) переходить въ неравенство (10), которое такимь образомъ доказано для раціональныхъ значеній x и y.

Что оно вѣрно также и для ирраціональныхъ значеній x и y, слѣдуетъ изъ основной теоремы о непрерывности. (§ 24, 7 и § 24, 5.).

Отсюда непосредственно вытекаетъ справедливость нашей теоремы. Въ самомъ дѣлѣ, если m и n суть цѣлыя числа и

$$m < x < n,$$

то

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e;$$

если взять число m достаточно большимъ, то число $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$, а слѣдовательно, и число $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ будетъ сколь угодно близко къ числу e.

[6]) Складываемъ это неравенство со всѣми тѣми, которыя выводятся изъ него путемъ замѣщенія n черезъ $n-1$, $n-2$, ..., $n-m$.

6. Мы можемъ еще расширить теорему п. 5-го, доказавъ что X имѣетъ предѣлъ e и въ томъ случаѣ, когда x есть отрицательная величина, абсолютное значеніе которой неограниченно возрастаетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ неравенствѣ (11) положимъ

$$a = 1,\ b = 1 - \frac{p^2}{n^2},\ a - b = \frac{p^2}{n^2},$$

то найдемъ, что

$$1 - \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n < \frac{p^2}{n}$$

и, слѣдовательно,

$$1 > \left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{p^2}{n}.$$

Такъ какъ, при неограниченно возрастающемъ n и постоянномъ значеніи p, правая часть этого неравенства приближается къ предѣлу 1, то $\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^n$ а, слѣдовательно, и $\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{p}}$ приближается, возрастая, къ предѣлу 1 при неограниченно возрастающемъ n. Поэтому, полагая

$$x = \frac{n}{p},$$

находимъ, что предѣлъ выраженія $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x$, при неограниченно возрастающемъ x, равенъ 1.

Но

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

а такъ какъ $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ имѣетъ предѣлъ e, а лѣвая часть имѣетъ предѣлъ 1, то $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ имѣетъ предѣлъ $1 : e$, и, слѣдовательно,

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$$

имѣетъ предѣлъ e, что и требовалось доказать.

ГЛАВА XXIII.

Безконечные ряды съ положительными и отрицательными членами.

§ 111. Общее опредѣленіе суммы безконечнаго ряда.

1. Въ примѣненіяхъ алгебры оказывается недостаточнымъ изученіе безконечныхъ рядовъ съ одними только положительными членами. Приходится распространить изслѣдованіе и на ряды, въ которыхъ встрѣчаются какъ положительные, такъ и отрицательные члены. Если число отрицательныхъ членовъ ограничено, то вопросъ о сходимости приводится при помощи теоремы § 109, 3. къ случаю однихъ только положительныхъ членовъ. Если же число членовъ, какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ не ограничено, то мы вынуждены избрать другой путь; въ этомъ случаѣ мы не можемъ уже ограничиться однимъ только понятіемъ о верхней границѣ, но должны установить болѣе общее понятіе о предѣлѣ.

2. Пусть теперь

$$c_1, \; c_2, \; c_3, \; c_4,$$

будетъ безконечный рядъ членовъ, относительно знаковъ которыхъ не установлено никакихъ ограниченій. Полагаемъ, какъ и прежде:

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n.$$

Пусть C будетъ нѣкоторое число, Δ — напередъ заданное произвольно малое положительное число и α, β два числа такого рода, что

$$\alpha < C < \beta; \quad 0 < \beta - \alpha < \Delta \tag{1}$$

Число C называется предѣломъ чиселъ $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n, \ldots$, если можно выбрать число m такимъ образомъ, что

$$\alpha < C_n < \beta, \text{ коль скоро } n > m. \tag{2}$$

Поэтому числа C_n суть приближенныя значенія числа C въ томъ же смыслѣ, въ какомъ мы употребляли это выраженіе въ § 24.

Если такое число C существуеть, то мы полагаемъ $\lim\limits_{n=\infty} C_n = C$ и называемъ C суммой безконечнаго ряда.

Мы можемъ тогда сказать, что величины C_n, при возрастающемъ n, колеблются около значенія C, но что колебанія становятся все меньше и меньше и рано или поздно становятся ниже всякой границы, когда число n неограниченно возрастаетъ. Мы пишемъ въ этомъ случаѣ

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots .$$

и рядъ, который мы будемъ также называть рядомъ C, называется **сходящимся**. Въ случаѣ, когда числа $c_1, c_2, c_3, \ldots$ всѣ положительны, это опредѣленіе сходимости и суммы ряда совпадаетъ съ опредѣленіемъ, даннымъ выше.

3. *Общій необходимый и достаточный признакъ сходимости ряда содержится въ слѣдующемъ предложеніи:*

Обозначимъ черезъ m, n два какихъ нибудь натуральныхъ числа и положимъ

$$R_{n,m} = c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m}. \qquad (3)$$

Рядъ C сходится, если абсолютная величина числа $R_{n,m}$ становится меньше произвольно малаго числа ω, коль скоро оба числа n и $n+m$ становятся больше нѣкотораго достаточно большого числа N [1]).

При нашихъ обозначеніяхъ это условіе можно выразить и такъ:

$$\lim_{n=\infty} R_{n,m} = 0. \qquad (4)$$

Оно не только достаточно, но и необходимо.

4. Легко видѣть, что условіе (4) **необходимо**. Ибо, если $R_{n,m}$ по абсолютной величинѣ будетъ становиться больше нѣкотораго положительнаго числа ω. какъ бы при этомъ велико ни было число N, то и разности

$$C_{n+m} - C_n = R_{n,m}$$

будутъ становиться больше ω, какимъ бы большимъ ни взять число n, и колебанія чиселъ C_n не оставались бы меньше ω, какое бы большое значеніе мы ни выбрали для n.

5. Чтобы доказать достаточность условія (4), мы должны изъ него вывести существованіе числа C, которое, конечно, будетъ вообще ирраціональнымъ даже и въ томъ случаѣ, когда числа c_n раціональны. Это число C мы должны поэтому опредѣлить при помощи **сѣченія** (§ 22).

[1]) т. е., если для всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа ω можно указать такое положительное число N, чтобы изъ неравенствъ $n > N$ и $n + m > N$ вытекало неравенство $|R_{n,m}| < \omega$, гдѣ $|R_{n,m}|$ означаетъ абсолютную величину числа $R_{n,m}$.

Если возьмемъ какое либо число z изъ ряда вещественныхъ чиселъ, то возможенъ только одинъ изъ двухъ случаевъ.

α) Какъ бы велико ни было N, есть еще числа $n > N$, для которыхъ $C_n > z$. О такомъ числѣ z мы будемъ говорить, что оно есть „число a".

β) Можно выбрать число N столь большимъ, что, при $n > N$, будетъ постоянно $C_n \leqq z$. Пусть такое число z называется „числомъ b".

При наличности соотношеній (4) существуютъ какъ числа a, такъ и числа b. Ибо, согласно равенству (4), мы можемъ для любого напередъ избраннаго положительнаго числа ω взять число n_0 столь большимъ, что, каково то ни было число m, будетъ

$$R_{n_0, m} = C_{n_0+m} - C_{n_0} < \omega \text{ (по абсолютной величинѣ).}$$

Поэтому, если фиксировать значеніе n_0 и положить $n = n_0 + m$, то для каждаго произвольнаго m будетъ

$$C_{n_0} - \omega < C_n < C_{n_0} + \omega.$$

Такимъ образомъ, если $z > C_{n_0} + \omega$, то z есть число b. Если же $z < C_{n_0} - \omega$, то z есть число a, и существуютъ, слѣдовательно, оба рода этихъ чиселъ. Сверхъ того каждое число a меньше каждаго числа b и потому оба рода чиселъ отдѣляются другъ отъ друга сѣченіемъ. Этимъ сѣченіемъ производится число C, относительно котораго мы должны еще доказать, что оно служитъ предѣломъ чиселъ C_n. Это выводится слѣдующимъ образомъ.

Если α есть произвольное число a, β—произвольное число b, то, исключивъ тотъ случай, когда α или $\beta = C$, найдемъ, согласно понятію о сѣченіи, что

$$\alpha < C < \beta. \qquad (5)$$

Возьмемъ теперь столь малое положительное число ω, чтобы было еще

$$\alpha + \omega < C < \beta - \omega, \qquad (6)$$

другими словами, чтобы $\alpha + \omega$ было еще числомъ a, а $\beta - \omega$—числомъ b. Далѣе выберемъ N столь большимъ, чтобы, при n_0 и $n_0 + m$ большихъ N, было

$$C_{n_0} - \omega < C_{n_0+m} < C_{n_0} + \omega. \qquad (7)$$

Въ виду положеній α) и β) можно теперь выбрать число $n_0 > N$ такимъ образомъ, чтобы было $\alpha + \omega < C_{n_0}$, $\beta - \omega > C_{n_0}$, такъ что

$$\alpha < C_{n_0} - \omega < C_{n_0} + \omega < \beta. \qquad (8)$$

Въ виду же неравенствъ (7), при всякомъ положительномъ m, будетъ:

$$\alpha < C_{n_0} - \omega < C_{n_0+m} < C_{n_0} + \omega < \beta,$$

и если положимъ $n_0 + m = n$, то для достаточно большихъ значеній n будетъ

$$\alpha < C_n < \beta. \qquad (9)$$

Но изъ неравенствъ (5) и (9) слѣдуетъ, что C есть предѣлъ чиселъ C_n, что и требовалось доказать.

6. Послѣ этого теорема § 109, 1. можетъ быть обобщена такъ: Если

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \ldots$$

есть сходящійся рядъ изъ положительныхъ членовъ и если

$$k_1, k_2, k_3, k_4, \ldots$$

суть положительныя или отрицательныя числа, которыя по своей абсолютной величинѣ остаются менѣе нѣкоторой конечной границы g, то и рядъ

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4 + \ldots$$

сходится.

Ибо число

$$k_n a_n + k_{n+1} a_{n+1} + \ldots + k_{n+m} a_{n+m}$$

по абсолютной величинѣ меньше числа

$$g(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}),$$

откуда и вытекаетъ сходимость ряда $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots$

§ 112. Абсолютная и неабсолютная сходимость.

1. Пусть въ ряду

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots \qquad (\mathfrak{C})$$

будутъ какъ положительные, такъ и отрицательные члены. Изъ нихъ положительные означимъ черезъ

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, \qquad (\mathfrak{A})$$

а отрицательные черезъ

$$-b_1, -b_2, -b_3, -b_4, \ldots \qquad (\mathfrak{B})$$

Въ рядахъ ($\mathfrak{A}$) и ($\mathfrak{B}$) члены взяты въ той же послѣдовательности, въ которой они находятся въ ряду ($\mathfrak{C}$); оба ряда предполагаются безконечными.

Если обѣ суммы

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots,$$

сходятся, то сходится и сумма

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$$

и притомъ

$$C = A - B. \qquad (1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, сумму

$$C_n = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n$$

мы можемъ представить въ видѣ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu - b_1 - b_2 \ldots - b_\nu = A_\mu - B_\nu,$$

и при безграничномъ возрастаніи n возрастаютъ безгранично также и числа μ и ν. Поэтому

$$\operatorname{Lim} C_n = \operatorname{Lim} A_\mu - \operatorname{Lim} B_\nu,$$

что приводитъ къ равенству (1). Нами доказана такимъ образомъ теорема:

Безконечный рядъ изъ положительныхъ и отрицательныхъ членовъ сходится, когда сходится въ отдѣльности ряды, составленные изъ его положительныхъ и его отрицательныхъ членовъ.

Въ этомъ предположеніи будетъ также сходиться рядъ изъ исключительно положительныхъ членовъ, который получится замѣной членовъ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ихъ абсолютными величинами $c_1', c_2', c_3', \ldots$, т. е., замѣной членовъ b_i на $-b_i$; при этомъ сумма

$$C' = c_1' + c_2' + c_3' + \ldots = A + B;$$

наоборотъ, рядъ C' только тогда можетъ сходиться, когда сходятся ряды A и B. Рядъ, который остается сходящимся, когда всѣ его члены замѣняются ихъ абсолютными значеніями, называется абсолютно сходящимся. Къ этимъ рядамъ относятся по существу тѣ же законы, что и къ рядамъ, содержащимъ исключительно положительные члены.

2. Если изъ двухъ рядовъ A и B одинъ сходится, другой расходится, то рядъ C не можетъ сходиться, ибо тогда разность $C_n = A_\mu - B_\nu$ дѣлается равной положительной или отрицательной безконечности, смотря потому, расходится ли рядъ A или рядъ B. Не такъ будетъ, когда оба ряда A и B расходятся. Тогда рядъ C', члены котораго суть абсолютныя величины членовъ ряда C, навѣрное расходится. Не смотря на это, рядъ C все же можетъ сходиться, такъ какъ въ выраженіи $A_\mu - B_\nu$ безконечное возрастаніе въ положительную сторону можетъ компенсироваться безконечнымъ возрастаніемъ въ отрицательную сторону. Мы имѣемъ тогда дѣло съ особаго рода рядами, которые называются неабсолютно сходящимися. Причина этого названія станетъ еще яснѣе впослѣдствіи.

3. Для неабсолютной сходимости у насъ нѣтъ столь опредѣленныхъ признаковъ, какъ для абсолютной. Однако же имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема.

Если въ ряду съ знакопеременными членами:

$$P = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - \dots \qquad (1)$$

$p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$ суть положительныя постоянно убывающія числа, такъ что для всякаго n

$$p_n < p_{n-1} \qquad (2)$$

и если

$$\lim_{n=\infty} p_n = 0, \qquad (3)$$

то рядъ P сходится.

Доказательство очень простое. Такъ какъ разности

$$p_1 - p_2,\ p_3 - p_4,\ p_5 - p_6, \dots,\ p_{2m-1} - p_{2m}$$

всѣ положительны, то, положивъ

$$P_n = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \dots \pm p_n,$$

найдемъ, что всѣ суммы P_n суть положительныя числа, и суммы

$$P_2,\ P_4,\ P_6, \dots P_{2m}$$

образуютъ рядъ выростающихъ чиселъ. Напротивъ, суммы

$$P_1,\ P_3,\ P_5, \dots P_{2m-1}$$

составляютъ рядъ убывающихъ чиселъ, такъ напримѣръ,

$$P_1 = p_1;\ P_3 = p_1 - (p_2 - p_3),$$
$$P_5 = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5), \dots$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ разности

$$P_{2m-1} - P_{2m} = p_{2m-1}$$

положительны и потому

$$P_{2m} < P_{2m-1}.$$

Въ силу равенства (3), съ неограниченнымъ возрастаніемъ m разность $P_{2m-1} - P_{2m}$ приближается къ предѣлу нуль, а этимъ доказано, что оба ряда чиселъ P_{2m} и P_{2m-1} имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ. (Ср. то-же заключеніе въ § 79).

4. Если условіе (2) выполняется, но не выполняется условіе (3), если поэтому числа p_n при безконечно возрастающемъ n приближаются къ предѣлу, отличному отъ нуля, то числа P_{2m} имѣютъ верхнюю, а числа P_{2m-1} — нижнюю границу, но эти границы не равны между собою. Сумма P_n приближается поэтому къ двумъ различнымъ предѣламъ, смотря по тому, останавливаемся ли мы на четномъ или нечетномъ n. Такіе ря-

ды, которые, впрочемъ, рѣдко встрѣчаются въ примѣненіяхъ, называютъ **колебающимися рядами**, потому что ихъ значенія колеблются нѣкоторымъ образомъ между двумя значеніями. Простѣйшимъ примѣромъ этого рода является рядъ

$$+1-1+1-1+1-1+\ldots;$$

эта сумма имѣетъ значеніе 0 или 1, смотря по тому, складываемъ ли мы четное или нечетное число членовъ. Эти ряды не причисляются къ сходящимся.

5. Къ рядамъ, которые по § 3 сходятся, принадлежатъ между прочимъ оба слѣдующіе:

$$P=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots, \qquad (4)$$

$$Q=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots. \qquad (5)$$

Рядъ P содержитъ всѣ дроби съ числителями 1 (основныя дроби): дроби съ нечетными знаменателями имѣютъ положительные, а съ четными знаменателями—отрицательные знаки. Рядъ Q содержитъ члены только съ нечетными знаменателями, но знаки членовъ также чередуются. Здѣсь обнаруживается особенное явленіе. Положимъ для краткости:

$$U_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1},$$

$$G_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n},$$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Тогда

$$S_n=2G_n$$

и сумма $2n$ первыхъ членовъ ряда P есть

$$P_{2n}=U_n-G_n;$$

далѣе

$$S_{2n}-U_n+G_n=2G_{2n},$$

и, слѣдовательно,

$$P_{2n}-U_n-G_n=2(U_n-1G_{2n}). \qquad (6)$$

Съ другой стороны, U_n-G_{2n} есть сумма $3n$ первыхъ членовъ ряда

$$R=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots, \qquad (7)$$

который также содержитъ всѣ дроби съ числителемъ 1, причемъ, какъ и въ ряду P, дроби съ нечетными знаменателями снабжены положи-

Члены ряда R расположены не по порядку ихъ величинъ, а такъ, что за каждымъ положительнымъ членомъ постоянно слѣдуютъ два отрицательныхъ, потомъ опять положительный и т. д. Равенство (6) показываетъ, что рядъ R сходится и что

$$R = \frac{1}{2} P.$$

Такимъ образомъ рядъ R имѣетъ сумму, отличную отъ суммы ряда P, хотя каждый членъ, встрѣчающійся въ этомъ ряду, встрѣчается въ другомъ и наоборотъ. На первый взглядъ, этотъ результатъ кажется парадоксомъ, особенно же, когда позволяютъ себѣ (какъ это до сихъ поръ принято) выражаться такъ, что сумма такого ряда зависитъ отъ послѣдовательности суммированія, что противорѣчитъ перемѣстительному свойству сложенія. Истинное основаніе явленія состоитъ въ томъ, что въ въ суммѣ $R_{3n} = U_n - G_{2n}$ хотя и встрѣчаются всѣ члены, содержащіеся въ суммѣ P_{2n}, но встрѣчается еще опредѣленное число отрицательныхъ членовъ, которые только позже появляются въ ряду P, и число этихъ членовъ возрастаетъ безгранично вмѣстѣ съ n.

6. Эта особенность неабсолютно сходящихся рядовъ выясняется разсужденіями Дирихле (Dirichlet)[1], которыя приводятъ къ замѣчательной теоремѣ.

Пусть

$$A = a_1 + a_2 + a_3 \dots$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 \dots$$

будутъ два расходящихся ряда съ положительными членами. Мы предположимъ, однако, что

$$\operatorname{Lim} a_n = 0, \ \operatorname{Lim} b_n = 0. \qquad (8)$$

Въ § 108 мы видѣли, что такіе ряды существуютъ. Мы могли бы, напримѣръ, взять ряды

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots,$$

которыми мы уже раньше пользовались.

Составимъ рядъ

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \dots,$$

котораго члены $c_1, c_2, \dots$ суть тѣ-же числа, что и $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots,$ расположенныя, однако, въ такомъ порядкѣ: сначала возьмемъ нѣкоторое число

[1]) Опубликованы въ первый разъ въ посмертномъ сочиненіи Riemann'a: „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe".

положительныхъ членовъ a_1, a_2, ..., затѣмъ нѣкоторе число отрицательныхъ членовъ $-b_1$, $-b_2$, ..., потомъ опять нѣкоторые положительные члены a, затѣмъ вновь нѣкоторые отрицательные члены $-b$, причемъ будемь имѣть въ виду, чтобы члены a, равно какъ и члены $-b$, вводились вь ихъ послѣдовательности безъ пропусковъ и повтореній.

Легко теперь показать, что возможно установить такой порядокъ введенія членовь. при которомъ рядъ C будетъ имѣть любое напередъ заданное значеніе x. Это вытекаетъ изъ весьма простыхъ соображеній.

Если будемъ считать число x положительнымъ, то въ виду того, что рядъ A становится безконечнымъ, можно пойти такъ далеко въ суммированіи членовъ a, что сумма станетъ больше числа x и притомъ избытокъ ея надъ x будетъ меньше, чѣмъ послѣдній изъ введенныхъ членовъ a. Возьмемъ затѣмъ столько членовъ $-b$, чтобы сумма стала меньше числа x и чтобы она отличалась отъ x меньше, чѣмъ на послѣдній прибавленный членъ $-b$. Станемъ потомъ опять прибавлять члены a до тѣхъ поръ. пока вновь не перейдемъ черезъ x, и будемъ продолжать этотъ процессъ сколь угодно далеко. Разность между суммой и числомъ x, будучи постоянно меньше, чѣмъ послѣдній прибавленный членъ a или $-b$, можетъ поэтому, въ виду равенствъ (8), опуститься ниже всякой границы. Составленная по такому способу сумма приближается кь числу x, какъ къ предѣлу, и теорема такимъ образомъ доказана.

§ 113. Абелева теорема о непрерывности степенного ряда.

1. Въ § 109 мы уже разсматривали ряды вида

$$S(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \qquad (1)$$

которые были нами названы степенными рядами; числа a_1, a_2, a_3, ... называются коэффиціентами ряда; x — аргументомъ. Мы видѣли, что этотъ рядъ сходится, когда коэффиціенты a_1, a_2, a_3, ... суть положительныя числа, которыя лежатъ ниже нѣкоторой конечной границы, а $x < 1$; согласно § 111,6. сходимость ряда сохраняется, если нѣкоторые изъ коэффиціентовъ a_1, a_2, a_3, .. суть отрицательныя числа, лишь бы только они по абсолютной величинѣ оставались меньше нѣкотораго конечнаго предѣла.

Мы допустимъ теперь, что рядъ коэффиціентовъ

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

сходится и имѣетъ значеніе A. Такъ какъ это возможно въ томъ только случаѣ, когда числа a_n приближаются къ предѣлу нуль, то это допущеніе влечетъ за собой сходимость ряда (1) для $x < 1$.

2. При этомъ допущеніи имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Если, начиная со значеній, меньшихъ единицы, число x приближается къ предѣлу 1, то A есть предѣлъ, къ которому сумма $S(x)$ приближается съ любою степенью точности. Въ знакахъ:

$$\lim_{x=1} S(x) = A. \qquad (3)$$

Это предложеніе было впервые доказано Абелемъ и примѣнено къ выводу важныхъ слѣдствій. Доказательство состоитъ въ слѣдующемъ.

3. Положимъ

$$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

такъ что, по допущенію, предѣлъ

$$\lim_{n=\infty} A_n = A$$

имѣетъ опредѣленное значеніе.

Числа a_n можно выразить черезъ числа A_n, такимъ образомъ:

$$a_1 = A_1,$$
$$a_2 = A_2 - A_1,$$
$$a_3 = A_3 - A_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_n = A_n - A_{n-1},$$

откуда

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n =$$
$$= (1-x)(A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}) + A_n x^n.$$

Если теперь $x < 1$, то x^n при безконечно возрастающемъ n имѣетъ предѣлъ 0, число же A_n остается конечнымъ. Согласно съ этимъ, пока $x < 1$, будетъ

$$S(x) = (1-x)(A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots), \qquad (4)$$

и безконечный рядъ $S(x)$ преобразованъ такимъ образомъ въ другой рядъ, который также сходится при $x < 1$.

Будемъ разумѣть теперь подъ n нѣкоторое конечное число и, согласно равенству (4), положимъ

$$S(x) = (1-x) F_n(x) + (1-x) R_n(x), \qquad (5)$$

гдѣ

$$F_n(x) = A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1},$$
$$R_n(x) = A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

такъ что $R_n(x)$ опять есть безконечный рядъ, котораго коэффиціенты A_n, A_{n+1}, $A_{n+2}, \ldots$ сколь угодно близко подходятъ къ A, если только число n

взято достаточно большимъ. Полагая поэтому $A_n = A + \alpha_n$; $A_{n+1} = A + \alpha_{n+1}, \ldots$ и принимая во вниманіе формулу для выраженія суммы членовъ геометрической прогрессіи:

$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^n}{1-x},$$

найдемъ, что

$$R_n(x) = \frac{Ax^n}{1-x} + \frac{\rho}{1-x},$$

гдѣ

$$\frac{\rho}{1-x} = \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \alpha_{n+2} x^{n+2} + \ldots$$

Мы можемъ теперь взять n столь большимъ, чтобы всѣ числа α_n, α_{n+1}, $\alpha_{n+2}, \ldots$ были по абсолютной величинѣ меньше произвольно малой положительной величины Δ, и тогда, по абсолютной же величинѣ,

$$\frac{\rho}{1-x} < \Delta(x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots) = \frac{\Delta x^n}{1-x},$$

такъ что

$$\rho < \Delta x^n < \Delta.$$

Согласно равенству (5), будемъ теперь имѣть:

$$S(x) = (1-x)F_n(x) + Ax^n + \rho,$$

$$S(x) - A = (1-x)F_n(x) - A(1-x^n) + \rho. \qquad (6)$$

Отсюда можно заключить, что x возможно взять столь близкимъ къ 1, чтобы разность $S(x) - A$ была меньше произвольно малой величины 2Δ, а въ этомъ заключается содержаніе равенства (3).

Въ самомъ дѣлѣ, въ правой части равенства (6) можно прежде всего взять произвольное число n столь большимъ, чтобы ρ стало $< \Delta$ и, когда это сдѣлано, можно далѣе взять разности $1-x$ и $1-x^n$ столь малыми (и положительными), чтобы было также

$$(1-x)F_n(x) - A(1-x^n) < \Delta,$$

и тогда будетъ $S(x) - A < 2\Delta$ (по абсолютной величинѣ).

Такимъ образомъ Абелева теорема доказана. Она можетъ служить для опредѣленія суммы A, если мы можемъ найти сумму $S(x)$ при $x < 1$ и ея предѣлъ при $x = 1$.

§ 114. Ряды съ комплексными членами.

1. Если члены безконечнаго ряда

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$$

суть комплексныя числа, то они имѣютъ видъ

$$c_1 = a_1 + b_1 i;\ c_2 = a_2 + b_2 i;\ c_3 = a_3 + b_3 i, \ldots,$$

гдѣ $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ суть вещественныя числа.

Сумма такого ряда

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$$

называется **сходящейся**, когда вещественныя и комплексныя части образуютъ въ отдѣльности сходящіеся ряды, когда, слѣдовательно, ряды

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$
$$B = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

сходятся; тогда

$$C = A + Bi$$

есть сумма ряда C.

Дѣйствительно, если A и B суть предѣлы для A_n и B_n, то $A + Bi$ есть предѣлъ для $A_n + B_n i$ и, наоборотъ, $A_n + B_n i$ не можетъ имѣть предѣла, если его не имѣетъ хоть одна изъ величинъ A_n и B_n.

2. Для сходимости такихъ рядовъ мы имѣемъ тотъ же общій признакъ, что и для рядовъ съ вещественными членами, именно, если положимъ

$$R_{n,m} = c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m},$$

то сумма $R_{n,m}$ по абсолютному значенію должна стать меньше любого малаго числа, когда числа n и $n+m$ будутъ больше нѣкотораго достаточно большого числа N.

Здѣсь содержится, какъ частный случай, требованіе, чтобы членъ c_n по абсолютному значенію сталъ меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа, что представляется необходимымъ, но не достаточнымъ условіемъ сходимости, какъ и въ § 106, 6.

Подъ **абсолютнымъ значеніемъ** комплекснаго числа $z = x + iy$ мы уже раньше (§ 47) условились понимать положительное число

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Теперь будетъ цѣлесообразно ввести въ употребленіе простой общій знакъ для абсолютнаго значенія комплекснаго числа z; слѣдуя Вейерштрассу, мы будемъ заключать для этой цѣли z въ двѣ вертикальныя черты. Такимъ образомъ

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Относительно сходимости ряда C съ комплексными членами имѣетъ мѣсто слѣдующая теорема:

Рядъ C сходится, если сходится рядъ

$$C' = |c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| + \ldots$$

абсолютныхъ значеній его членовъ.

Доказательство выводится непосредственно изъ теоремы § 47, 5, по которой абсолютное значеніе суммы никогда не бываетъ больше суммы обсолютныхъ значеній слагаемыхъ; ибо, положивъ

$$R'_{n,m} = |c_{n+1}| + |c_{n+2}| + \ldots + |c_{n+m}|,$$

будемъ имѣть

$$|R_{n,m}| \leqq R'_{n,m}.$$

и если $R'_{n,m}$ имѣетъ предѣломъ нуль, то то же справедливо и для $R_{n,m}$.

Эта теорема такъ же необратима, какъ и соотвѣтственная теорема, относящаяся къ вещественнымъ рядамъ съ положительными и отрицательными членами. Очень легко можетъ случиться, что рядъ C сходится, между тѣмъ какъ рядъ C' расходится. Мы и здѣсь различаемь поэтому абсолютную и неабсолютную сходимость. Мы называемъ сходящійся рядъ съ комлексными членами абсолютно сходящимся, когда сходится рядъ абсолютныхъ значеній его членовъ, и неабсолютно сходящимся -- въ противномъ случаѣ.

4. Отсюда выводится далѣе слѣдующая теорема:

Если рядъ

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots$$

сходится абсолютно и если

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4, \ldots$$

есть какой либо рядъ комплексныхъ чиселъ, коихъ абсолютныя значенія

$$|c_1|,\ |c_2|,\ |c_3|,\ |c_4|, \ldots$$

не возрастаютъ неограниченно, то и рядъ

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 + \ldots$$

сходится абсолютно.

Ибо, полагая

$$R_{n,m} = c_{n+1} w_{n+1} + c_{n+2} w_{n+} + \ldots + c_{n+m} w_{n+m}$$

и принимая во вниманіе, что абсолютное значеніе произведенія равно произведенію абсолютныхъ значеній его множителей, находимъ

$$|R_{n,m}| \leqq |c_{n+1}| \cdot |w_{n+1}| + |c_{n+2}| \cdot |w_{n+2}| + \ldots + |c_{n+m}| \cdot |w_{n+m}|.$$

Поэтому, если каждое изъ чиселъ $|c_{n+1}|$, $|c_{n+2}|$, ... $|c_{n+m}|$ меньше нѣкотораго опредѣленнаго положительнаго числа g, то

$$|R_{n,m}| < g\,\{|w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \ldots + |w_{n+m}|\};$$

если рядъ II сходится абсолютно, то правая часть этого неравенства становится меньше всякаго напередъ заданнаго числа. То же справедливо и относительно лѣвой части, слѣдовательно, теорема п. 4 доказана.

§ 115. Степенные ряды. Кругъ сходимости.

1. Мы будемъ теперь разсматривать степенные ряды, въ которыхъ какъ аргументъ z, такъ и коэффиціенты c_ν могутъ быть комплексными числами. Присоединивъ еще членъ c_0, не зависящій отъ аргумента, обозначимъ такой рядъ черезъ

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \qquad (1)$$

Положимъ

$$z = x + iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$
$$z^n = r^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

и станемъ изображать, согласно § 47, значенія z точками плоскости. Тогда r есть абсолютное значеніе $|z|$ величины z, и точки, изображающія всѣ тѣ значенія z, которыя имѣютъ одинаковыя абсолютныя значенія r, лежатъ на кругѣ (r), центръ котораго находится въ началѣ координатъ.

2. Существуютъ степенные ряды, сходящіеся при всякомъ значеніи аргумента z. Таковъ, напримѣръ, рядъ

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

потому что въ ряду

$$1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \frac{r^4}{4!} + \dots,$$

составленномъ изъ абсолютныхъ значеній членовъ предыдущаго ряда, отношеніе $(n+1)$-го члена къ n-ому

$$\frac{r^n}{n!} : \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{r}{n}$$

и имѣетъ предѣломъ нуль, каково бы ни было значеніе r. Отсюда вытекаетъ сходимость ряда, согласно § 109, 4.

Существуютъ, наоборотъ, и такіе ряды, которые не сходятся ни при какомъ значеніи z (кромѣ $z = 0$). Таковъ, напримѣръ, рядъ

$$1 + 1!z + 2!z^2 + 3!z^3 + 4!z^4 + \dots.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если c есть число, которое больше r, то по § 48, 2, возможно взять число n столь большимъ, чтобы выполнялось неравенство $n!r^n > c^n$; такимъ образомъ уже отдѣльные члены этого ряда неограниченно возрастаютъ вмѣстѣ съ n, и рядъ не можетъ быть сходящимся.

Вообще же степенной рядъ сходится для нѣкоторыхъ значеній z и расходится для другихъ значеній. Относительно такихъ рядовъ справедливы слѣдующія теоремы.

3. Если γ_n есть абсолютное значеніе числа c_n и r_1 есть такое положительное число, что при неограниченно возрастающемъ n число $\gamma_n r_1^n$ не возрастаетъ безпредѣльно, то рядъ $S(z)$ сходится абсолютно для всякаго z, абсолютное значеніе котораго r меньше r_1.

Дѣйствительно, когда $r : r_1$ есть правильная дробь, то рядъ

$$1 + \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \ldots$$

сходится, а вмѣстѣ съ нимъ сходится (по § 114, 3, 4.) и рядъ

$$\gamma_0 + \gamma_1 r_1 \frac{r}{r_1} + \gamma_2 r_1^2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \gamma_3 r_1^3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 + \ldots,$$

члены котораго суть абсолютныя значенія членовъ ряда $S(z)$. Такимъ образомъ и рядъ $S(z)$ сходится абсолютно.

4. Если $\gamma_n r^n$ остается конечнымъ для всѣхъ значеній r [1]), то рядъ $S(z)$ сходится при всѣхъ значеній z; обратное тоже, конечно, справедливо.

Если $\gamma_n r^n$ остается конечнымъ для нѣкотораго значенія r, то то-же имѣетъ мѣсто и для всѣхъ меньшихъ значеній r. Если поэтому $\gamma_n r^n$ остается конечнымъ не для всѣхъ, а хотя-бы только для нѣкоторыхъ значеній r, то эти значенія r имѣютъ верхнюю границу ρ, и рядъ $S(z)$ сходится для всѣхъ z, коихъ абсолютныя значенія меньше ρ.

Кругъ, описанный радіусомъ ρ изъ начала координатъ, какъ изъ центра, называется кругомъ сходимости степенного ряда $S(z)$, и мы имѣемъ теорему:

5. Рядъ $S(z)$ сходится абсолютно во всякой точкѣ внутри круга сходимости.

6. Наоборотъ, рядъ $S(z)$ не можетъ сходиться ни въ какой точкѣ внѣ круга сходимости.

Ибо, если рядъ $S(z)$ сходится, то $\operatorname{Lim} c_n z^n = 0$. Поэтому произведеніе $\gamma_n r^n$ должно оставаться конечнымъ и r должно было бы быть меньше или въ крайнемъ случаѣ равно ρ.

О сходимости ряда въ точкахъ, расположенныхъ на периферіи круга сходимости, нельзя установить никакого общаго предложенія. Здѣсь, смотря по природѣ ряда, можетъ имѣть мѣсто сходимость или расходимость; можетъ также случиться, что въ одной части периферіи рядъ сходится а въ другой—расходится.

[1]) При неограниченномъ возрастаніи n.

Въ видѣ примѣра укажемъ геометрическій рядъ:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$

Здѣсь оказывается $\rho = 1$ и кругъ сходимости есть кругъ, описанный изъ начала координатъ радіусомъ, равнымъ 1-цѣ.

Въ этомъ случаѣ на кругѣ сходимости рядъ не можетъ сходиться, такъ какъ абсолютныя значенія всѣхъ членовъ ряда, будучи равными единицѣ, не могутъ имѣть предѣла, равнаго нулю.

7. Если рядъ $S(z)$ сходится абсолютно для нѣкотораго значенія z_1 величины z, то сходится абсолютно и рядъ

$$U(z) = \alpha_0 c_0 + \alpha_1 c_1 z + \alpha_2 c_2 z^2 + \alpha_3 c_3 z^3 + \cdots,$$

гдѣ $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ есть рядъ положительныхъ вещественныхъ чиселъ, которыя не возрастаютъ неограниченно, причемъ сходимость имѣетъ мѣсто для всякаго числа z, котораго абсолютное значеніе r меньше абсолютнаго значенія r_1 числа z_1.

Чтобы это вывести, достаточно разсмотрѣть рядъ

$$\alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 r + \alpha_2\gamma_2 r^2 + \alpha_3\gamma_3 r^3 + \cdots$$

$$= \alpha_0\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 \frac{r}{r_1} r_1 + \alpha_2\gamma_2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 r_1^2 + \alpha_3\gamma_3 \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 r_1^3 + \cdots,$$

который есть не что иное, какъ рядъ абсолютныхъ значеній членовъ ряда $U(z)$ и который сходится по теоремѣ § 109, 1.

Для правильности этого вывода отнюдь не требуется, чтобы числа α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ оставались конечными: достаточно, чтобы величина $\alpha_n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$ не дѣлалась безконечной. По § 18, 8 это имѣетъ мѣсто при каждомъ $r < r_1$, когда $\alpha_n = n^k$ есть какая либо степень величины n или вообще какая либо цѣлая функція отъ n. Принявъ, напримѣръ, $\alpha_n = nz^{-1}$ или $n^{-1}z$, мы получаемъ теорему:

8. Три ряда

$$S(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots,$$
$$T(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + 4c_4 z^3 + \cdots,$$
$$U(z) = c_0 z + \frac{c_1 z^2}{2} + \frac{c_2 z^3}{3} + \frac{c_3 z^4}{4} + \cdots$$

имѣютъ одинъ и тотъ же кругъ сходимости.

§ 116. Дѣйствія надъ безконечными рядами.

1. Мы разсматриваемъ два безконечныхъ ряда съ вещественными или комплексными членами u_i, v_i и полагаемь

$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n, \qquad (1)$$
$$V_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Первые члены мы обозначаемъ здѣсь не черезъ u_1, v_1, а черезъ u_0, v_0, а подъ U_n, V_n мы разумѣемъ суммы $n+1$ первыхъ членовъ, что при умноженіи рядовъ представляется особенно удобнымъ. Допустимъ что эти ряды сходятся и что U, V суть ихъ суммы, такъ что

$$\lim_{n=\infty} U_n = U; \quad \lim_{n=\infty} V_n = V.$$

Если положимъ

$$u_0 \pm v_0 = w_0, \quad u_1 \pm v_1 = w_1, \quad u_2 \pm v_2 = w_2, \dots.$$

гдѣ всюду берется либо только верхній, либо только нижній знакъ, и

$$W_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n,$$

то

$$U_n \pm V_n = W_n.$$

Увеличивая здѣсь n неограниченно, найдемъ, что и сумма W_n сходится и что

$$W = U \pm V,$$

если предѣлъ W_n есть W. Этимъ доказано слѣдующее предложеніе:

Складывая или вычитывая соотвѣтствующіе члены двухъ сходящихся рядовъ, мы складываемъ или вычитываемъ эти ряды.

Значеніе ряда U не измѣняется, когда мы присоединимъ вначалѣ или гдѣ либо вставимъ члены, значенія которыхъ равны нулю. Отсюда слѣдуетъ, что сумму W можно составить весьма разнообразными способами, относя различнымъ образомъ другъ къ другу члены u_n, v_n; такъ, напримѣръ:

$$W = v_1 + (v_2 + u_1) + (v_3 + u_2) + (v_4 + u_3) + \dots$$

или

$$W = v_1 + (v_2 + u_1) + v_3 + (v_4 + u_2) + v_5 + \dots.$$

2. Операція умноженія представляется менѣе простою.

Пусть

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots \qquad (2)$$
$$V = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

будутъ два сходящихся ряда. Пусть a_i и b_i будутъ абсолютныя значенія величинъ u_i и v_i, и допустимъ сначала, что ряды

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$
$$B = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots \tag{3}$$

сходятся, такъ что ряды U и V сходятся абсолютно.

3. Если при умноженіи A на B поступать такъ, какъ при умноженіи двухъ конечныхъ многочленовъ, то придется умножить каждый членъ одной суммы на каждый членъ другой суммы и затѣмъ взять сумму этихъ произведеній. Всѣ эти произведенія имѣютъ видъ $a_\mu\, b_\nu$. Мы соединяемъ эти произведенія въ группы по суммѣ индексовъ $\mu + \nu$ и затѣмъ складываемъ эти группы, то есть составляемъ числа

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ &\dots\dots\dots \\ c_m &= a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + a_2 b_{m-2} + \dots + a_m b_0, \end{aligned} \tag{4}$$

беремъ ихъ общую сумму

$$C_m = c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_m \tag{5}$$

и сравниваемъ эту сумму со значеніемъ произведенія $A_n B_n$.

Въ произведеніи $A_n B_n$ содержатся всѣ тѣ и только тѣ члены $a_\mu\, b_\nu$ для которыхъ выполняются сразу оба неравенства $\mu \leqslant n$; $\nu \leqslant n$.

Въ суммѣ C_m содержатся всѣ тѣ и только тѣ члены $a_\mu\, b_\nu$, въ которыхъ $\mu + \nu \leqslant m$. Поэтому, если возьмемъ $m = 2n$, то сумма C_m будетъ содержать всѣ тѣ члены $a_\mu\, b_\nu$ для которыхъ $\mu \leqslant n$, $\nu \leqslant n$, и, сверхъ того, еще и другіе члены, въ которыхъ μ или ν больше n. Такъ какъ всѣ числа a_μ, b_ν суть положительныя числа, то

$$A_n B_n < C_{2n}. \tag{6}$$

Съ другой стороны, среди членовъ $a_\mu\, b_\nu$ произведенія $A_n B_n$, наряду съ другими, содержатся и всѣ тѣ члены, въ которыхъ $\mu + \nu \leqslant n$, ибо ни въ одномъ изъ этихъ членовъ μ или ν не можетъ быть больше n. Но эти члены суть члены суммы C_n, слѣдовательно

$$C_n < A_n B_n;$$

а потому, замѣнивъ n на $2n$, имѣемъ:

$$C_{2n} < A_{2n} B_{2n}; \tag{7}$$

изъ неравенствъ-же (6) и (7) слѣдуетъ, что

$$A_n B_n < C_{2n} < A_{2n} B_{2n}\,.$$

Такъ какъ, далѣе, произведенія $A_n B_n$ и $A_{2n} B_{2n}$ имѣютъ по допущенію одинъ и тотъ же предѣлъ AB, то и C_{2n}, а слѣдовательно и C_n имѣетъ тотъ же предѣлъ [2]).

Такимъ образомъ рядъ

$$C = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots$$

сходится и притомъ

$$C = AB. \tag{8}$$

4. Въ интересахъ послѣдующаго важно еще замѣтить, что разность

$$D_n = C_n - A_n B_n$$

есть сумма положительныхъ произведеній вида $a_u b_r$ и что D_n при неограниченно возрастающемъ n имѣетъ предѣломъ нуль.

5. Составимъ теперь изъ рядовъ U, V новый рядъ W по тому же закону, по которому мы составили рядъ C изъ рядовъ A и B, то есть, полагаемъ:

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 v_0\,, \\ w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0\,, \\ w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0\,, \qquad\qquad (9) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ w_m &= u_0 w_m + u_1 w_{m-1} + u_2 w_{m-2} + \ldots + u_m v_0\,, \\ W_m &= w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_m\,. \end{aligned}$$

Составимъ далѣе разность

$$\Delta_n = U_n V_n - W_n\,.$$

Эта разность отличается отъ разности D_n только обозначеніемъ. Она есть сумма произведеній $u_u v_r$, и если замѣнить эти произведенія

[2]) Если n число нечетное, то $n = 2m+1$, и такъ какъ $C_{2m+1} = C_{2m} + c_{2m+1}$, гдѣ $c_{2m+1} > 0$, то

$$C_{2m} < C_{2m+1} < A_{2m+1} B_{2m+1}.$$

Увеличивая m безгранично, находимъ, что $\lim\limits_{m=\infty} C_{2m+1} = AB$, т. е., $\lim\limits_{n=\infty} C_n = AB$ и въ томъ случаѣ, когда n получаетъ нечетныя значенія.

ихъ абсолютными значеніями $a_n b_i$, то Δ_n перейдетъ въ D_n. Согласно теоремѣ, по которой абсолютное значеніе суммы не больше суммы абсолютныхъ значеній ея слагаемыхъ, находимъ, что

$$|\Delta_n| \leqslant D_n;$$

поэтому $|\Delta_n|$ а, слѣдовательно, также и Δ_n имѣетъ предѣломъ нуль. Отсюда же вытекаетъ, что

$$W = UV.$$

Такимъ образомъ и рядъ W сходится. Но

$$|w_n| \leqslant a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = c_n,$$

а такъ какъ рядъ C сходится, то и рядъ чиселъ $|w_i|$ сходится, то есть рядъ W сходится абсолютно. Мы имѣемъ такимъ образомъ теорему:

Если изъ двухъ абсолютно сходящихся рядовъ U и V мы составимъ по формуламъ (9) рядъ W, то и этотъ послѣдній будетъ абсолютно сходиться и притомъ $W = UV$.

6. Абелева теорема (§ 113) даетъ возможность распространить только что доказанную теорему такимъ образомъ, что уже не будетъ больше надобности дѣлать различіе между абсолютною и неабсолютною сходимостью.

Если U и V суть два сходящихся ряда и если составленный изъ нихъ по формуламъ (9) рядъ W также сходится, то $W = UV$.

Въ самомъ дѣлѣ, если r означаетъ положительную правильную дробь и ряды U и V сходятся, то ряды

$$U(r) = u_0 + r u_1 + r^2 u_2 + r^3 u_3 + \ldots,$$
$$V(r) = v_0 + r v_1 + r^2 v_2 + r^3 v_3 + \ldots$$

сходятся абсолютно (§ 115); выводимый изъ нихъ по формуламъ (9) рядъ

$$W(r) = w_0 + r w_1 + r^2 w_2 + r^3 w_3 + \ldots$$

по п. 5. сходится абсолютно, причемъ

$$U(r)\, V(r) = W(r). \qquad (10)$$

Если положить $r = 1$, то ряды $U(r)$, $V(r)$, $W(r)$ переходятъ въ U, V, W и, когда эти послѣдніе сходятся, то по абелевой теоремѣ

$$\operatorname*{Lim}_{r=1} U(r) = U, \quad \operatorname*{Lim}_{r=1} V(r) = V, \quad \operatorname*{Lim}_{r=1} W(r) = W;$$

поэтому, если въ равенствѣ (10) будемъ приближать r къ предѣлу 1, то получимъ

$$UV = W,$$

что и требовалось доказать.

Въ § 113 мы доказали, однако, Абелеву теорему только въ предположеніи вещественныхъ коэффиціентовъ. Въ случаѣ комплексныхъ коэффиціентовъ достаточно примѣнить эту теорему къ вещественной и мнимой части вь отдѣльности, чтобы доказать ея справедливость и для этого случая.

ГЛАВА XXIV.

Безконечные сходящіеся ряды для показательной и для тригонометрическихъ функцій.

§ 117. Рядъ для показательной функціи.

1. Примѣнимъ теперь общіе законы къ отдѣльнымъ спеціальнымъ рядамъ и, прежде всего, разсмотримъ рядъ

$$E(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad (1)$$

Какъ мы уже показали въ § 115, 2, онъ сходится абсолютно при всякомъ вещественномъ или комплексномъ значеніи z. Въ частности, при $z = 1$, мы изслѣдовали этотъ рядъ уже въ § 110 и нашли его значеніе, а именно:

$$E(1) = e = 2{,}7182818\ldots \qquad (2)$$

Равнымъ образомъ, непосредственно изъ опредѣленія мы получаемъ:

$$E(0) = 1.$$

2. На послѣднемъ равенствѣ необходимо, однако, остановиться нѣсколько подробнѣе. Если мы обозначимъ абсолютную величину z черезъ r, то получимъ

$$|E(z) - 1| \leqq \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots$$

А такъ какъ

$$\frac{1}{2!} < \frac{1}{1!},\ \frac{1}{3!} < \frac{1}{2!},\ \frac{1}{4!} < \frac{1}{3!}, \ldots,$$

то

$$|E(z) - 1| < r\left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots\right) = rE(r).$$

Мы видимъ отсюда, что абсолютное значеніе выраженія $E(z)-1$ становится менѣе всякаго даннаго числа, когда z стремится къ нулю.

$E(z)$ непрерывно приближается къ 1, если z непрерывно приближается къ 0, что формально выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\lim_{z=0} E(z) = 1.$$

3. Другая особенность ряда $E(z)$ выводится изъ правила умноженія рядовъ, изложеннаго въ § 116, 5.

Если мы обозначимъ черезъ x и y два произвольныхъ вещественныхъ или комплексныхъ числа и предположимъ, при положительномъ значеніи n, что

$$u_n = \frac{x^n}{n!},\quad v_n = \frac{y^n}{n!},\quad u_0 = v_0 = 1,$$

то, согласно § 116, (9)

$$w_n = \frac{y^n}{n!} + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{x}{1!} + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

а такъ какъ

$$B_k^{(n)} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

есть не что иное, какъ биноміальный коэффиціентъ (§ 53, § 55), то отсюда слѣдуетъ:

$$w_n = \frac{1}{n!}\left(y^n + B_1^{(n)} y^{n-1} x + B_2^{(n)} y^{n-2} x^3 + \ldots + x^n\right)$$

$$= \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Такимъ образомъ рядъ W есть не что иное, какъ $E(x+y)$, слѣдовательно

$$E(x+y) = E(x)\,E(y). \qquad (3)$$

При этомъ x, y могутъ имѣть вещественныя или мнимыя значенія. Мы знаемъ изъ § 18 и § 34, что для вещественныхъ значеній x и y равенствами (1), (2), (3) выражаются характеристическіе признаки степеней e^x [1]) и потому для вещественнаго значенія x мы получаемъ результатъ

$$e^x = E(x).$$

Такъ какъ до сихъ поръ мы еще не дали опредѣленія степеней съ мнимыми показателями, то мы въ правѣ теперь и для мнимаго z положить

$$e^z = E(z) \qquad (4)$$

[1]) Это утвержденіе будетъ вполнѣ обосновано въ § 121, п. 4.

и такимъ образомъ опредѣлить степени числа e и для комплексныхъ значеній z. Опредѣленное такимъ образомъ выраженіе e^z или $E(z)$ называется **показательной функціей**. Основное свойство степеней, выраженное въ равенствѣ (3), сохраняется въ такомъ случаѣ и для комплексныхъ показателей x, y.

4. Показательная функція e^z есть предѣлъ выраженія

$$Z=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

при безконечномъ возрастаніи n.

Для доказательства этого предложенія, сначала будемъ понимать подъ n положительное цѣлое число, и въ такомъ случаѣ получимъ по формулѣ бинома (§ 110)

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1+z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{z^3}{3!}+\ldots$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Разложимъ это выраженіе на двѣ части:

$$Z=Z_1+Z_2,$$

гдѣ, при условіи $m<n$,

$$Z_1=1+z+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{z^2}{2!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{z^m}{m!}.$$

$$Z_2=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}+\ldots+$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Если подъ r будемъ разумѣть абсолютную величину z и если число $k\leqslant n$, то

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{r^k}{k!}<\frac{r^k}{k!}.$$

Примѣняя это неравенство къ отдѣльнымъ членамъ выраженія Z_2, получаемъ:

$$|Z_2|<\frac{r^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{r^{m+2}}{(m+2)!}+\ldots+\frac{r^n}{n!}.$$

Если положимъ теперь вообще

$$E_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!},$$

то найдемъ, что

$$|Z_2| < E_n(r) - E_m(r) < E(r) - E_m(r).$$

Коэффиціенты въ выраженіи Z_1:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots, \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

при постоянномъ значеніи m и достаточномъ возрастаніи n могутъ стать сколь угодно близкими къ 1, и слѣдовательно, при достаточномъ увеличеніи n, абсолютное значеніе $|Z_1 - E_m(z)|$ можетъ быть сдѣлано менѣе любой величины Δ.

Согласно съ этимъ,

$$Z - E(z) = (Z_1 - E_m(z)) - (E(z) - E_m(z)) + Z_2$$

и, слѣдовательно,

$$|Z - E(z)| \leqslant |Z_1 - E_m(z)| + |E(z) - E_m(z)| + E(r) - E_m(r).$$

Теперь возьмемъ прежде всего число m столь большимъ, чтобы каждое изъ чиселъ

$$|E(z) - E_m(z)| \quad \text{и} \quad E(r) - E_m(r)$$

было меньше произвольнаго числа Δ: это возможно сдѣлать въ виду сходимости ряда $E(z)$. Затѣмъ припишемъ числу n столь большое значеніе, чтобы и неравенство $|Z_1 - E_m(z)| < \Delta$ выполнялось, при этомъ будетъ также

$$|Z - E(z)| \leqslant 3\Delta.$$

Можно, слѣдовательно, приписать числу n столь большое значеніе, что абсолютная величина разности $Z - E(z)$ станетъ меньше произвольно малаго числа, а вмѣстѣ съ этимъ доказана теорема п. 4. для любого значенія z:

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z, \tag{5}$$

разумѣется, пока только при условіи, что n есть возрастающее цѣлое число.

5. Положимъ теперь

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n + \nu}\right)^{n+\nu},$$

разумѣя подъ n цѣлое число, а подъ ν правильную дробь; мы найдемъ, что

$$Z = \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu} \frac{(n+\nu+z)^n}{(n+\nu)^n}$$
$$= \left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu} \left(1 + \frac{\nu+z}{n}\right)^n \left(1 + \frac{\nu}{n}\right)^{-n}.$$

Если n здѣсь неограниченно возрастаетъ, оставаясь цѣлымъ числомъ, то

$$\operatorname{Lim}\left(1 + \frac{z}{n+\nu}\right)^{\nu} = 1, \quad \operatorname{Lim}\left(1 + \frac{\nu+z}{n}\right)^n = e^{\nu+z}, \quad \operatorname{Lim}\left(1 + \frac{\nu}{n}\right)^n = e^{\nu},$$

слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ предѣлъ Z равенъ e^z.

Подобно тому, какъ это было сдѣлано въ § 110, 6, можно показать, что Z имѣетъ тотъ же предѣлъ, когда число n остается отрицательнымъ, между тѣмъ какъ его абсолютная величина безгранично возрастаетъ.

6. Положивъ $z = ix$, гдѣ x есть вещественное число, и принимая во вниманіе соотношенія

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad \ldots$$

найдемъ, что

$$E(ix) = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots,$$

и мы можемъ теперь положить

$$E(ix) = A(x) + iB(x), \tag{6}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots \\ B(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Эти два ряда сходятся абсолютно при всѣхъ значеніяхъ x.

Мы знаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что

$$A(x) + iB(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n. \tag{8}$$

Когда x и y суть два произвольныхъ вещественныхъ числа, то изъ теоремы, выражаемой равенствомъ (3), слѣдуетъ, что

$$(A(x) + iB(x))\,(A(y) + iB(y)) = A(x+y) + iB(x+y)$$

или, отдѣляя вещественную часть формулы отъ мнимой, имѣемъ

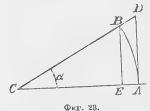
$$A(x+y) = A(x)A(y) - B(x)B(y),$$
$$B(x+y) = B(x)A(y) + B(y)A(x).$$

Эти формулы, очевидно, совпадаютъ вполнѣ съ формулами сложенія тригонометрическихъ функцій $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ (§ 47, 3). Болѣе глубокое основаніе подобнаго совпаденія выяснится изъ нижеслѣдующихъ разсужденій.

§ 118. Тригонометрическія функціи, какъ суммы рядовъ.

1. Изслѣдованію связи, существующей между рядами и тригонометрическими функціями, необходимо предпослать слѣдующее разсужденіе:

Пусть AB будетъ дуга съ радіусомъ, равнымъ линейной единицѣ, и угломъ α, который мы измѣряемъ дуговой мѣрой, такъ что длина дуги AB также равна α. Опустимъ изъ B перпендикуляръ BE на CA, а въ точкѣ A возставимъ перпендикуляръ AD до пересѣченія его въ точкѣ D съ продолженіемъ радіуса CB. По правиламъ тригонометріи, мы имѣемъ:



Фиг. 23.

$$BE = \sin\alpha, \quad AD = \operatorname{tg}\alpha, \quad CE = \cos\alpha.$$

Какъ явствуетъ изъ чертежа, площадь сектора CAB менѣе площади треугольника CAD и болѣе площади треугольника CEB, но

$$\text{площадь } CAB = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\text{„} \quad CAD = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\text{„} \quad CEB = \frac{1}{2}\sin\alpha,$$

откуда вытекаетъ слѣдующее неравенство:

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha, \tag{1}$$

но $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$, поэтому

$$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

Такъ какъ $\cos\alpha$ приближается къ единицѣ съ уменьшеніемъ угла α, то отсюда слѣдуетъ:

2. Частное $\sin\alpha : \alpha$ приближается къ предѣлу 1, когда уголъ α приближается къ 0.

Такъ какъ $\cos\alpha$ становится равнымъ 1 при $\alpha = 0$, то и $\operatorname{tg}\alpha/\alpha$ имѣетъ предѣлъ 1:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1. \tag{2}$$

Та же мысль можетъ быть выражена и такъ: функціи $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ при малыхъ значеніяхъ α становятся почти равными дугѣ α.

$\operatorname{Cos}\alpha$ больше $\frac{1}{2}$, когда уголъ α меньше $\pi/3$, потому что $\cos\alpha$ возрастаетъ съ уменьшеніемъ α и равенъ $\frac{1}{2}$, при $\alpha = \pi/3$ (уголъ равносторонняго треугольника).

Слѣдовательно, когда $\alpha < \frac{\pi}{3}$, то, на основаніи неравенства (1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 2\sin\alpha < 2\alpha. \tag{3}$$

3. Если φ означаетъ произвольный уголъ, а n есть какое-нибудь цѣлое число, то по формулѣ Муавра (§ 47, 8):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

откуда, положивъ $n\varphi = x$, выводимъ:

$$\cos x + i\sin x = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n. \tag{4}$$

Правая часть этого равенства, очевидно, не зависитъ отъ n. Посмотримъ теперь, къ какому результату можно придти, когда n будетъ возрастать до безконечности.

Замѣтивъ, что

$$\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n \left(1 + i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n, \tag{5}$$

разсмотримъ въ отдѣльности каждый изъ двухъ множителей правой части. Если въ тригонометрической формулѣ

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{6}$$

положить $\alpha = x : 2n$, то выйдетъ

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2n}\right)^n.$$

Если же для краткости положимъ

$$2n\sin^2\frac{x}{2n} = \xi,$$

и разложимъ полученное выраженіе по формулѣ бинома, то получимъ:

$$\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n = \sigma + \rho,$$

гдѣ, при m цѣломъ и меньшемъ числа n,

$$\sigma = 1 - \xi + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\xi^2}{2!} - \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\frac{\xi^m}{m!},$$

$$\rho = \pm\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{\xi^{m+1}}{(m+1)!} \pm \ldots$$

$$\pm\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\frac{\xi^n}{n!}$$

Въ выраженіяхъ σ и ρ знаки $+$ и $-$ правильно чередуются. Но, согласно неравенству (1),

$$\xi < \frac{x^2}{2n},$$

стало быть, и подавно $\xi < x^2$, и ξ становится менѣе всякой данной положительной величины, когда n безконечно возрастаетъ. Отсюда слѣдуетъ, что σ имѣетъ предѣлъ 1 при постоянномъ m и безконечно возрастающемъ n. Абсолютная-же величина второй части ρ меньше, чѣмъ

$$\frac{x^{2m+2}}{(m+1)!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} = E_n(x^2) - E_m(x^2)$$

и, въ силу сходимости ряда $E(x)$, становится менѣе всякой данной величины при достаточномъ возрастаніи чиселъ m и n.

Отсюда явствуетъ, что предѣлъ выраженія $\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$ равенъ 1.

4. Примѣняя тѣ же разсужденія ко второму множителю

$$\left(1 + i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n,$$

произведенія (5), положимъ для краткости

$$n\operatorname{tg}\frac{x}{n} = t$$

и допустимъ сначала, что x есть положительное число. Если $m < n$, то мы снова получаемъ, по формулѣ бинома, равенство

$$\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n = S + R,$$

въ которомъ

$$S=1+it+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{(it)^2}{2!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\frac{(it)^m}{m!}$$

$$R=\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{(it)^{m+1}}{(m+1)!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{(it)^n}{n!}$$

Но, по п. 1., $\operatorname{tg}\frac{x}{n}\Big/\frac{x}{n}$, при безконечномъ возрастаніи n, имѣетъ предѣломъ 1, и, слѣдовательно, t имѣетъ предѣломъ число x; далѣе, въ силу неравенства (3), $t < 2x$, по крайней мѣрѣ когда $n > 3x/\pi$.

Отсюда, какъ и раньше, выводится, что

$$|R| < E_n(2x) - E_m(2x) \tag{7}$$

и что S, при постоянномъ m и безконечно большомъ n, стремится къ величинѣ

$$1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\ldots+\frac{(ix)^m}{m!}. \tag{8}$$

Но сумма (8), въ свою очередь, при достаточно большомъ значеніи числа m будетъ сколь угодно близка къ величинѣ $A(x)+iB(x)$ (§ 117, 6). А такъ какъ, кромѣ того, $|R|$ при тѣхъ же условіяхъ безпредѣльно уменьшается, то отсюда слѣдуетъ, что

$$\operatorname{Lim}\left(1+i\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^n = A(x)+iB(x).$$

Согласно равенствамъ (4) и (5), мы отсюда получаемъ:

$$\cos x + i\sin x = A(x)+iB(x),$$

$$\cos x = A(x), \quad \sin x = B(x).$$

Такимъ образомъ, тригонометрическія функціи $\cos x$, $\sin x$ представляютъ собою суммы безконечныхъ рядовъ:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots$$

По этимъ формуламъ можно вычислять $\cos x$ и $\sin x$. Но такъ какъ ряды эти сходятся тѣмъ лучше, чѣмъ меньше величина x, то ихъ цѣлесообразно примѣнять для вычисленія $\cos x$ и $\sin x$ лишь при малыхъ значеніяхъ x; въ другихъ же случаяхъ пользуются формулами сложенія.

Необходимо, однако, помнить, что при употребленіи этихъ формулъ уголъ долженъ измѣряться не въ градусахъ, а непремѣнно въ дуговой мѣрѣ.

Число $\pi = 3{,}141592\ldots$ можетъ быть въ такомъ случаѣ опредѣлено, какъ наименьшее положительное число, обращающее въ нуль рядъ, которымъ выражается синусъ.

Согласно § 117, (6), мы получимъ для степени e^z съ мнимымъ показателемъ, выраженія

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos x + i\sin x, \\
e^{-ix} &= \cos x - i\sin x.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Складывая и вычитывая эти равенства, мы получаемъ функціи $\cos x$ и $\sin x$, выраженныя въ показательной функціи съ мнимыми показателями:

$$
\begin{aligned}
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Отсюда слѣдуетъ далѣе:

$$
e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \; e^{i\pi} = -1, \; e^{2i\pi} = +1. \tag{12}
$$

Для того, чтобы комплексную величину $z = x + yi$ выразить черезъ ея абсолютное значеніе r и фазу ϑ, мы можемъ теперь, вмѣсто выраженія

$$
z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),
$$

пользоваться болѣе краткимъ:

$$
z = re^{i\vartheta}.
$$

ГЛАВА XXV.

Биноміальный рядъ.

§ 119. Биноміальный рядъ для цѣлыхъ отрицательныхъ показателей.

1. Въ § 55 мы вывели формулу бинома для цѣлаго положительнаго показателя. Если μ есть натуральное число, то по этой формулѣ

$$(1+z)^\mu = B_0^{(\mu)} + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \ldots, \qquad (1)$$

гдѣ

$$B_0^{(\mu)} = 1, \quad B_1^{(\mu)} = \mu, \quad B_2^{(\mu)} = \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2},$$
$$B_n^{(\mu)} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \qquad (2)$$

суть биноміальные коэффиціенты.

Выраженія $B_m^{(\mu)}$ сохраняють, однако, смыслъ и въ томъ случаѣ, когда μ не есть положительное цѣлое число и даже тогда, когда μ есть число комплексное. Только ни одно изъ этихъ выраженій не дѣлается въ этихъ случаяхъ равнымъ нулю и сумма въ правой части равенства (1) не обрывается. Ея члены образуютъ безконечный рядъ.

Посмотримъ, будетъ ли эта сумма сходящейся.

2. Пусть z будетъ комплексное число и r абсолютное значеніе z. Въ ряду (1) отношеніе $(n+1)$—го члена къ n-ому равно

$$B_n^{(\mu)} z^n : B_{n-1}^{(\mu)} z^{n-1} = \frac{\mu-n+1}{n} z = \left(\frac{\mu+1}{n} - 1\right) z,$$

и абсолютное значеніе этого отношенія

$$\left|\frac{\mu+1}{n} - 1\right| r$$

имѣетъ предѣлъ r при неограниченномъ возрастаніи n. Сообразно съ этимъ, рядъ (1) сходится абсолютно, когда $r < 1$, и расходится, когда $r > 1$ (§ 109, 4).

Поэтому, кромѣ того случая, когда μ есть цѣлое положительное число, рядъ (1) имѣетъ кругъ сходимости, радiусъ котораго равенъ 1 (§ 115, 10).

3. Въ § 55, (10) мы познакомились съ выраженiемъ для биномiальныхъ коэффицiентовъ, которое мы теперь, при нѣсколько измѣненныхъ обозначенiяхъ, представимъ такъ:

$$B_n^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_{n-2}^{(\nu)} + \ldots + B_n^{(\mu)} B_0^{(\nu)}. \qquad (3)$$

Тамъ мы вывели, однако, это равенство только въ томъ предположенiи, что μ, ν суть цѣлыя числа. Но при помощи выраженiй (2) мы можемъ доказать, что оно остается въ силѣ и въ общемъ случаѣ. Дѣйствительно, согласно формуламъ (2),

$$B_0^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_0^{(\nu)}, \quad B_1^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_1^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_0^{(\nu)},$$

равенство (3) справедливо при $n = 0$ и $n = 1$. Допустивъ, что это равенство вѣрно для нѣкотораго n, мы докажемъ, что оно также вѣрно для $n + 1$. Для этой цѣли мы воспользуемся равенствомъ

$$(\mu - n)\, B_n^{(\mu)} = (n+1)\, B_{n+1}^{(\mu)}, \qquad (4)$$

которое выводится непосредственно изъ равенствъ (2).

Помножимъ обѣ части равенства (3) на $\mu + \nu - n$ и въ отдѣльныхъ членахъ правой части разложимъ этотъ множитель слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \mu + \nu - n &= (\nu - n) + \mu, \\ &= (\nu - n + 1) + (\mu - 1), \\ &= (\nu - n + 2) + (\mu - 2), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Мы получимъ такимъ образомъ

$$(\mu + \nu - n)\, B_n^{(\mu+\nu)} =$$

$$B_0^{(\mu)} (\nu - n) B_n^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} (\nu - n + 1) B_{n-1}^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} (\nu - n + 2) B_{n-2}^{(\nu)} + \ldots +$$
$$+ \mu B_0^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + \qquad (\mu - 1) B_1^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \ldots$$

или, на основанiи равенства (4),

$$(n+1)\, B_{n+1}^{(\mu+\nu)} = (n+1)\, B_0^{(\mu)} B_{n+1}^{(\nu)} + n B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + (n-1)\, B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \ldots +$$
$$+ \; B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + \qquad 2 B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \ldots.$$

Если мы сложимъ здѣсь члены, стоящiе другъ подъ другомъ, то множитель $(n+1)$ сократится, и мы получимъ:

$$B_{n+1}^{(\mu+\nu)} = B_0^{(\mu)} B_{n+1}^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_n^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_{n-1}^{(\nu)} + \ldots,$$

что въ сущности есть не что иное, какъ равенство (3), въ которомъ n измѣнено въ $n+1$.

4. Обозначимъ теперь черезъ $\varphi(\mu)$ сумму ряда (1). Значеніе ея намъ, вообще говоря, пока неизвѣстно. Перемноживъ, по правилу § 116, 5. два подобныхъ ряда:

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= B_0^{(\mu)} + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \cdot\cdot \\ \varphi(\nu) &= B_0^{(\nu)} + B_1^{(\nu)} z + B_2^{(\nu)} z^2 + B_3^{(\nu)} z^3 + \cdot\cdot \end{aligned} \qquad (5)$$

въ предположеніи, что $|z| < 1$, мы получимъ слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} &B_0^{(\mu)} B_0^{(\nu)}, \\ &(B_0^{(\mu)} B_1^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_0^{(\nu)}) z, \\ &(B_0^{(\mu)} B_2^{(\nu)} + B_1^{(\mu)} B_1^{(\nu)} + B_2^{(\mu)} B_0^{(\nu)}) z^2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

для членовъ ряда, представляющаго собою произведеніе, и, согласно равенству (3), будемъ имѣть:

$$\varphi(\mu)\,\varphi(\nu) = \varphi(\mu + \nu). \qquad (6)$$

5. Этимъ равенствомъ выражается характеристическая особенность степеней, изъ которой можно, какъ и раньше, вывести значеніе $\varphi(\mu)$. Если, напримѣръ, μ есть цѣлое положительное число и $\nu = -\mu$, то по формулѣ бинома для цѣлыхъ показателей

$$\varphi(0) = 1, \ \varphi(\mu) = (1+z)^{\mu},$$

и изъ равенства (6) слѣдуетъ, что

$$\varphi(-\mu) = \frac{1}{(1+z)^{\mu}} = (1+z)^{-\mu}.$$

Формула бинома остается, такимъ образомъ, справедливой для цѣлыхъ отрицательныхъ показателей, когда абсолютная величина z меньше 1. При $\mu = -1, -2, -3$ мы имѣемъ, напримѣръ,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots\cdot$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 - \cdots,$$

$$\frac{1}{(1+z)^3} = 1 - \frac{2\,.\,3}{2} z + \frac{3\,.\,4}{2} z^2 - \frac{4\,.\,5}{2} z^3 + \cdots\cdot$$

Если μ число дробное, или ирраціональное, или даже комплексное, то $\varphi(\mu)$ все еще сохраняетъ значеніе, которое также слѣдуетъ искать между степенями; но такъ какъ эти степени многозначны, то нужно еще установить это значеніе.

Точное изслѣдованіе биноміальнаго ряда ведетъ начало отъ Абеля, который ясно показалъ значеніе этого ряда въ общемъ случаѣ, также и для комплекснаго μ *).

Для простоты мы ограничимся здѣсь простѣйшимъ случаемъ, когда μ имѣетъ вещественное значеніе.

§ 120. Непрерывность биноміальнаго ряда.

1. Подъ функціей $\Phi(x)$ аргумента x разумѣютъ выраженіе, численное значеніе котораго опредѣляется нѣкоторыми правилами исчисленія, когда дано произвольное значеніе аргумента x. Такъ какъ аргументъ x способенъ принимать различныя значенія, то онъ называется также **перемѣнною**. Функціи и аргументъ могутъ принимать также **комплексныя значенія**. Примѣрами такихъ функцій могутъ служить цѣлыя функціи, которыя мы разсматривали въ одиннадцатой главѣ, далѣе тригонометрическія функціи $\sin x$, $\cos x$ или показательная функція e^x. Употребляются также функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Къ нимъ принадлежатъ симметрическія функціи § 64 или функціи X, Y въ § 66.

2. Функція $\Phi(x)$ называется **непрерывной**, если она обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что абсолютное значеніе ея измѣненія $\Phi(x') - \Phi(x)$ становится меньше произвольнаго положительнаго числа Δ, когда разность $x' - x$ по абсолютному значенію меньше нѣкотораго достаточно малаго числа δ. Короче это выражаютъ и такъ:

Непрерывною называется такая функція, у которой безконечно малому измѣненію аргумента соотвѣтствуетъ безконечно малое измѣненіе функціи.

Такимъ образомъ, для непрерывной функціи измѣненія скачками исключены.

3. Если X и Y суть двѣ непрерывныя функціи аргумента x, то и ихъ соединенія $X + Y$, $X - Y$, XY суть непрерывныя функціи. Ибо, если α и β суть измѣненія X и Y, то соотвѣтствующія измѣненія вышеуказанныхъ соединеній будутъ $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha Y + \beta X + \alpha\beta$, а эти величины становятся всѣ три безконечно малыми, когда α и β суть безконечно малыя.

Примѣняя повторно эту теорему, найдемъ, что **цѣлая функція непрерывныхъ функцій всегда есть непрерывная функція.**

*) N. H. Abel. „Untersuchungen über die Reihe“

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots$$

(1826) Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 71.

4. Обозначимъ черезъ u_0, u_1, u_2, u_3 ... члены безконечнаго ряда непрерывныхъ функцій аргумента x и допустимъ, что по своему абсолютному значенію онѣ остаются меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа g, независящаго отъ x. Если r есть положительная дробь, то, какъ мы видѣли,

$$U = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + r^3u_3 +$$

есть абсолютно сходящійся безконечный рядъ, котораго сумма U есть функція отъ x. Покажемъ теперь, что это есть непрерывная функція отъ x.

Для этой цѣли возьмемъ цѣлое положительное число n и положимъ:

$$U_n = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + \ldots + r^nu_n,$$
$$R_n = r^{n+1}u_{n+1} + r^{n+2}u_{n+2} + \ldots.$$
$$U = U_n + R_n;$$

тогда, согласно п. 3, U_n будетъ непрерывною функціею отъ x, а R_n — есть безконечный рядъ, сумма котораго удовлетворяетъ неравенству

$$|R_n| < g(r^{n+1} + r^{n+2} + r^{n+3} + \ldots) = \frac{gr^{n+1}}{1-r}$$

Далѣе, такъ какъ r есть правильная дробь, то можно взять n столь большимъ, чтобы $|R_n|$ была меньше произвольно малой величины Δ, а тогда и измѣненіе R_n при измѣненіи x будетъ по абсолютной величинѣ меньше числа 2Δ, ибо, если R'_n означаетъ измѣненное значеніе R_n, то

$$|R_n| < \Delta, \quad |R'_n| < \Delta,$$
$$|R'_n - R_n| \leqslant |R_n| + |R'_n| < 2\Delta.$$

Такъ какъ, сверхъ того, U_n есть непрерывная функція, то можно взять измѣненіе аргумента x столь малымъ, чтобы и измѣненіе $U'_n - U_n$ было меньше Δ, а тогда измѣненіе функціи U будетъ меньше, чѣмъ 3Δ, т. е. произвольно будетъ малымъ. Этимъ доказана непрерывность функціи U относительно аргумента x.

5. Мы можемъ также разсматривать U, какъ функцію отъ r, и, какъ таковая, она непрерывна, пока r остается меньше какой либо опредѣленной правильной дроби, а потому мы заключаемъ, что степенной рядъ

$$S(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \cdot$$

есть непрерывная функція отъ z внутри круга его сходимости. Ибо, если r есть абсолютное значеніе аргумента z, ρ — радіусъ круга сходимости и $r < \rho$, то въ интервалѣ между r и ρ можно найти значеніе ρ_0, удовлетворяющее условію

$$\sqrt{r\rho} < \rho_0 < \rho;$$

а такъ какъ тогда

$$\frac{\rho r}{\rho_0} < \rho_0 < \rho,$$

то рядъ

$$c_0 + c_1 \frac{\rho r}{\rho_0} + c_2 \left(\frac{\rho r}{\rho_0}\right)^2 + \ldots,$$

сходится и

$$\lim_{n=\infty} \left| c_n \left(\frac{\rho z}{\rho_0}\right)^n \right| = 0.$$

Общій членъ $c_n z^n$ ряда $S(z)$ равенъ

$$c_n \left(\frac{\rho z}{\rho_0}\right)^n \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n,$$

а потому, если мы въ теоремѣ п. 4 замѣнимъ r на ρ_0/ρ, u_n на $c_n(\rho z)^n/\rho_0^n$, то условія этой теоремы будутъ выполнены, откуда слѣдуетъ:

Степенной рядъ $S(z)$ есть непрерывная функція отъ z внутри круга сходимости.

Такъ, напримѣръ, по этой теоремѣ степенная функція e^z и тригонометрическія функціи $\sin z$ и $\cos z$, какъ степенные ряды, суть непрерывныя функціи отъ z. Содержаніе теоремы Абеля въ § 113 состоитъ въ томъ, что если и рядъ

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

сходится, то $U = u_0 + ru_1 + r^2u_2 + \ldots$ есть непрерывная функція отъ r также и при $r = 1$, если только измѣненія числа r ограничиваются его уменьшеніемъ.

6. Биноміальный рядъ

$$\varphi(\mu) = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \ldots$$

находится въ условіяхъ п. 4, пока абсолютное значеніе z меньше 1, и такъ какъ биноміальные коэффиціенты $B_n^{(\mu)}$, будучи цѣлыми функціями отъ μ, непрерывны, то $\varphi(\mu)$ есть непрерывная функція отъ μ.

Какъ уже было сказано, мы будемъ предполагать, что μ есть вещественное число, но z можетъ имѣть комплексныя значенія.

§ 121. Сумма биноміальнаго ряда.

1. Если $z = x + yi$, то можно положить

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

гдѣ r есть число положительное, а ϑ обозначаетъ уголъ, который опредѣленъ лишь до числа, кратнаго 2π. Чтобы опредѣлить этотъ уголъ вполнѣ точно, мы можемъ условиться брать уголъ ϑ между $-\pi$ и $+\pi$, такъ что

$$-\pi < \vartheta \leq \pi. \tag{1}$$

Сверхъ того мы въ послѣдующихъ разсужденіяхъ предполагаемъ, что

$$r < 1 \tag{2}$$

Сходящійся при этихъ допущеніяхъ биноміальный рядъ

$$\varphi(\mu) = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + B_3^{(\mu)} z^3 + \dots \tag{3}$$

имѣетъ вообще комплексныя значенія, и такъ какъ

$$z^n = r^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta),$$

а коэффиціенты $B_n^{(\mu)}$ суть вещественныя числа, то, положивъ

$$\varphi(\mu) = X + Yi,$$

имѣемъ:

$$\begin{aligned} X &= 1 + B_1^{(\mu)} r\cos\vartheta + B_2^{(\mu)} r_2 \cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)} r^3 \cos 3\vartheta + \dots, \\ Y &= \phantom{1 +{}} B_1^{(\mu)} r\sin\vartheta + B_2^{(\mu)} r^2 \sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)} r^3 \sin 3\vartheta + \dots . \end{aligned} \tag{4}$$

2. Положимъ

$$\begin{aligned} X = R\cos\theta, \quad Y = R\sin\theta, \\ Z = X + Yi = R(\cos\theta + i\sin\theta), \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ R есть вещественное положительное число, а θ есть уголъ, который опредѣленъ лишь до числа кратнаго 2π.

Мы имѣемъ въ виду опредѣлить R и θ, какъ функціи отъ μ. Чтобы указать ихъ зависимость отъ μ, мы будемъ также писать $R = R(\mu)$, $\theta = \theta(\mu)$ и замѣтимъ, что R, $\cos\theta$, $\sin\theta$ — суть непрерывныя функціи отъ μ.

На функцію $\theta(\mu)$ также можно смотрѣть, какъ на непрерывную, но въ такомъ случаѣ мы не можемъ уже заключить $\theta(\mu)$ въ любой интервалъ длины 2π; напротивъ, если для нѣкотораго значенія μ, напр., для $\mu = 0$ указанъ опредѣленный интервалъ для $\theta(\mu)$, то при непрерывномъ измѣненіи μ и $\theta(\mu)$ уголъ $\theta(\mu)$ можетъ выйти за предѣлы этого интервала. Въ этомъ именно смыслѣ мы будемъ здѣсь разсматривать функцію $\theta(\mu)$, принимая ее за непрерывную функцію отъ μ.

Для $\mu = 0$ имѣемъ $X = 1$, $Y = 1$ и, слѣдовательно,

$$\cos\theta(0) = 1, \quad \sin\theta(0) = 0,$$

поэтому $\theta(0)$ есть кратное 2π и, чтобы вполнѣ опредѣлить функцію $\theta(\mu)$, достаточно положить

$$\theta(0) = 0.$$

Для $R(0)$ получаемъ значеніе 1.

3. Для опредѣленія R и θ служитъ основное равенство § 119, (6):

$$\varphi(\mu)\,\varphi(\nu) = \varphi(\mu + \nu),$$

гдѣ подъ μ и ν разумѣются два вещественныхъ числа.

Примѣняя формулу Муавра, мы получаемъ:

$$R(\mu)\,R(\nu)\Big[\cos\big(\theta(\mu)+\theta(\nu)\big) + i\sin\big(\theta(\mu)+\theta(\nu)\big)\Big]$$
$$= R(\mu+\nu)\Big[\cos\theta(\mu+\nu) + i\sin\theta(\mu+\nu)\Big].$$

Такъ какъ значеніями синуса и косинуса угла вполнѣ опредѣляется остатокъ отъ дѣленія этого угла на 2π, то отсюда вытекаетъ

$$R(\mu+\nu) = R(\mu)\,R(\nu),\qquad \theta(\mu+\nu) = \theta(\mu) + \theta(\nu). \tag{6}$$

Ко второй части послѣдняго изъ этихъ равенствъ можно было-бы прибавить еще число, кратное 2π. Но такъ какъ $\theta(\mu)$ есть непрерывная функція, а это кратное могло бы измѣняться только скачкомъ, то оно не зависитъ отъ μ и ν и оказывается равнымъ нулю, если положимъ $\nu = 0$.

4. Изъ перваго изъ равенствъ (6) выводится прежде всего значеніе $R(\mu)$ совершенно также, какъ и въ § 33. А именно, пользуясь повторно этимъ равенствомъ, находимъ, что. при цѣломъ n,

$$R(n\mu) = R(\mu)^n.$$

такъ что при $\mu = 1$

$$R(n) = R(1)^n$$

и при $\mu = m/n$

$$R(m) = \left[R\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n;$$

слѣдовательно,

$$R\left(\frac{m}{n}\right) = [R(1)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{R(1)^m},$$

подъ условіемъ, что радикалъ обозначаетъ единственное положительное значеніе корня n-ой степени. Если, далѣе, въ первомъ изъ равенствъ (6) положимъ $\nu = \mu$, $R(0) = 1$, то найдемъ, что

$$R(-\mu) = \frac{1}{R(\mu)}.$$

Такъ какъ $R(\mu)$ есть непрерывная функція отъ μ, то приходимъ къ заключенію что одно и то же равенство

$$R(\mu) = R(1)^\mu, \tag{7}$$

имѣетъ мѣсто также и при ирраціональныхъ положительныхъ и отрицательныхъ значеніяхъ μ; при чемъ подъ $R(1)^\mu$ слѣдуетъ понимать, какъ и въ § 33, единственное вещественное значеніе μ-той степени величины $R(1)$ [2].

5. Примѣняя повторно второе изъ равенствъ (6)

$$\theta(\mu+\nu)=\theta(\mu)+\theta(\nu),$$

найдемъ подобнымъ же образомъ:

$$\theta(n\mu)=n\theta(\mu),$$

такъ что, при $\mu=1$:

$$\theta(n)=n\theta(1)$$

и, при $\mu=m:n$:

$$\theta(m)=n\theta\left(\frac{m}{n}\right)=m\theta(1), \tag{8}$$

Такимъ образомъ, для раціональныхъ значеній μ имѣетъ мѣсто равенство

$$\theta(\mu)=\mu\theta(1),$$

которое вслѣдствіе непрерывности остается справедливымъ и для каждаго ирраціональнаго значенія μ. Намъ остается, поэтому, опредѣлить еще величины $R(1)$ и $\theta(1)$, которыя также зависятъ отъ ζ, т. е. отъ r и ϑ.

6. Для опредѣленія $R(1)$ и $\theta(1)$ выводимъ изъ равенствъ (4) уравненія

$$R(1)\cos\theta(1)=1+r\cos\vartheta,$$
$$R(1)\sin\theta(1)=r\sin\vartheta,$$

откуда, возводя въ квадратъ, складывая и принимая во вниманіе, что $R(1)$ есть положитетельное число, находимъ:

$$R(1)=\sqrt{1+2r\cos\vartheta+r^2}, \tag{9}$$

гдѣ радикалъ берется со знакомъ плюсъ.

Далѣе, путемъ дѣленія предыдущихъ уравненій, получаемъ:

$$\operatorname{tg}\theta(1)=\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta}.$$

Если тангенсъ угла данъ, то этимъ уголъ опредѣленъ до числа кратнаго π; каждому значенію тангенса соотвѣтствуетъ одинъ только уголъ, содержащійся между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Мы опредѣляемъ такимъ

[2]) Замѣняя здѣсь R, μ и ν соотвѣтственно на E, x, y, приходимъ къ слѣдующему выводу: Если $E(\zeta)$ есть непрерывная функція вещественной аргумента ζ, которая при произвольныхъ вещественныхъ значеніяхъ x и y удовлетворяетъ соотношенію $E(x+y)=E(x)E(y)$, то $E(\zeta)=[E(1)]^\zeta$ и если $E(1)=e$, то $E(\zeta)=e^\zeta$ (см. § 117, 3).

образомъ величину ω однозначно условіями:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < +\frac{\pi}{2}, \tag{10}$$

гдѣ границы $\pm\frac{1}{2}\pi$ исключены по той причинѣ, что знаменатель $1+r\cos\vartheta$ не можетъ быть нулемъ, когда r есть правильная дробь. Тогда

$$\theta(1) = \omega + h\pi.$$

гдѣ h есть неизвѣстное цѣлое число, еще подлежащее опредѣленію.

7. Замѣтимъ для этого, что для значеній r, меньшихъ единицы, Y въ рав. (4) есть непрерывная функція отъ r, переходящая въ нуль, при $r=0$, и что, при $r=0$, ω также переходитъ въ 0, а $R(1)$ въ 1. Но

$$Y = R(1)^{\mu}\sin\mu(\omega + h\pi);$$

при $r=0$, отсюда получаемъ:

$$\sin\mu h\pi = 0.$$

Это равенство должно имѣть мѣсто при всякомъ произвольно выбранномъ значеніи μ, а это возможно только въ томъ случаѣ, когда цѣлое число $h=0$. Ибо, если бы оно не было равно 0, то достаточно было бы положить $\mu = 1:2h$, чтобы получить $\sin\mu h\pi = 1$. Поэтому, $h=0$, и сумма биноміальнаго ряда такимъ образомъ вполнѣ опредѣлена въ предположеніи, что r есть правильная дробь. Мы имѣемъ:

$$\varphi(\mu) = \left(\sqrt{1+2r\cos\vartheta+r^2}\right)^{\mu}(\cos\mu\omega + i\sin\mu\omega). \tag{11}$$

гдѣ ω опредѣляется соотношеніями (9).

Если z есть вещественное число, то либо $\vartheta=0$, либо $\vartheta=\pi$; слѣдовательно, $\omega=0$ и, согласно соотношеніямъ (9), число $z=x$ будетъ положительнымъ, при $\vartheta=0$, и отрицательнымъ, когда $\vartheta=\pi$, а потому $x=r\cos\vartheta$, $x^2=r^2$, и равенство (10) въ этомъ случаѣ даетъ намъ:

$$\varphi(\mu) = (1+x)^{\mu}. \tag{12}$$

гдѣ подъ $(1+x)^{\mu}$ разумѣется единственное вещественное положительное значеніе этой степени.

Если въ равенствѣ (12) отдѣлимъ вещественныя и мнимыя части, то получимъ вещественныя значенія рядовъ X и Y:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{1+2r\cos\vartheta+r^2}\right)^{\mu}\cos\mu\omega &= 1 + B_1^{(\mu)}r\cos\vartheta + B_2^{(\mu)}r^2\cos2\vartheta + \\ &\quad + B_3^{(\mu)}r^3\cos3\vartheta + \ldots, \\ \left(\sqrt{1+2r\cos\vartheta+r^2}\right)^{\mu}\sin\mu\omega &= B_1^{(\mu)}r\sin\vartheta + B_2^{(\mu)}r^2\sin2\vartheta + \\ &\quad + B_3^{(\mu)}r^3\sin3\vartheta + \ldots\end{aligned} \tag{13}$$

8. Если возьмемъ $\mu = \frac{1}{2}$, то

$$B_1^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}, \quad B_2^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{2\,.\,4}, \quad B_3^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}, \ldots,$$

$$B_n^{\left(\frac{1}{2}\right)} = (-1)^{n-1}\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-3)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n},$$

и, слѣдовательно,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\,.\,4}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}x^3 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}x^4 + \ldots, \quad (14)$$

когда x есть вещественная правильная дробь. Далѣе, при $\mu = -\frac{1}{2}$, находимъ:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^2 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^3 + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}x^4 - \ldots$$

Можно примѣнять эти формулы для извлеченія квадратныхъ корней, при чемъ вычисленія представляются особенно простыми, когда корни извлекаются изъ чиселъ, которыя мало отличаются отъ ближайшихъ точныхъ квадратовъ. Такъ, напримѣръ,

$$\sqrt{99} = \sqrt{100}\sqrt{1 - 0{,}01} = 10\sqrt{1 - 0{,}01}.$$

Если въ равенствѣ (9) положимъ $x = -0{,}01$, то, найдемъ, что

$$-\tfrac{1}{2}x = 0{,}005$$

$$\tfrac{1}{8}x^2 = 0{,}0000125$$

$$-\tfrac{1}{16}x^3 = 0{,}0000000625$$

$$0{,}0050125625$$

$$1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 = 0{,}9949874375$$

$$\sqrt{99} = 9{,}949874375,$$

при чемъ послѣдній десятичный знакъ нѣсколько великъ. Дѣля на 3, находимъ:

$$\sqrt{11} = 3{,}31662479$$

съ точностью до девятаго десятичнаго знака.

§ 122. Биноміальный рядъ на границѣ сходимости.

1. Въ § 120 мы видѣли, что биноміальный рядъ имѣетъ кругъ сходимости радіуса 1. Нѣтъ смысла задаваться вопросомъ о значеніи этого ряда внѣ его круга сходимости. Однако-же, представляется интереснымъ изслѣдовать, сходится-ли этотъ рядъ въ точкахъ, принадлежащихъ кругу сходимости, т. е. для величинъ z, абсолютныя значенія которыхъ равны 1. Если это имѣетъ мѣсто, то можно будетъ опредѣлить сумму ряда

для этихъ значеній по теоремѣ Абеля (§ 113), отыскавъ предѣлъ, при $r = 1$, выраженія $\varphi(\mu)$, найденнаго нами въ предыдущемъ параграфѣ.

2. Первый случай: $\mu > 0$.

Въ этомъ случаѣ биноміальный рядъ, при $r = 1$, сходится абсолютно для всякаго значенія ϑ.

Это было бы доказано, если бы мы могли показать, что рядъ биноміальныхъ коэффиціентовъ

$$1 + B_1^{(\mu)} + B_2^{(\mu)} + \ldots \tag{1}$$

сходится абсолютно при положительномъ μ, ибо, принимая во вниманіе, что $\sin n\vartheta$ и $\cos n\vartheta$ суть правильныя дроби, мы нашли бы, что сходятся также оба ряда

$$\begin{aligned} X &= 1 + B_1^{(\mu)}\cos\vartheta + B_2^{(\mu)}\cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\cos 3\vartheta + \ldots \\ Y &= \phantom{1 +{}} B_1^{(\mu)}\sin\vartheta + B_2^{(\mu)}\sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\sin 3\vartheta + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Согласно теоремѣ § 109, 6, сходимость этого ряда будетъ доказана въ томъ случаѣ, если удастся найти такое число h, которое больше 1 и для котораго

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} n^h B_n^{(\mu)} = 0. \tag{3}$$

3. Чтобы найти такой показатель, положимъ, понимая подъ n и $k < n$ два цѣлыхъ числа,

$$\begin{aligned} B_n^{(\mu)} &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} \\ &= B_k^{(\mu)}\frac{(\mu-k)(\mu-k-1)\ldots(\mu-n+1)}{(k+1)(k+2)\ldots n}. \end{aligned}$$

Обозначая черезъ K абсолютное значеніе числа $B_k^{(\mu)}$ и полагая $k > \mu$, найдемъ отсюда абсолютное значеніе числа $B_n^{(\mu)}$:

$$|B_n^{(\mu)}| = K\frac{k-\mu}{k+1}\cdot\frac{k-\mu+1}{k+2}\cdots\frac{n-\mu-1}{n}, \tag{4}$$

гдѣ K есть положительное число, независящее отъ n.

Но, если $m > 1$, то по формулѣ бинома имѣемъ:

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\mu-1} \\ &= 1 - \frac{\mu+1}{m} + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1\,.\,2}\frac{1}{m^2} - \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1}{m^3} + \ldots \\ &= \left(1 - \frac{\mu+1}{m}\right) + \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{1\,.\,2}\frac{1}{m^2}\left(1 - \frac{\mu+3}{3m}\right) \\ &\quad + \frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)(\mu+4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{1}{m^4}\left(1 - \frac{\mu+5}{5m}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

и, если $m > \mu + 1$, а l есть натуральное число, то:

$$m(l - 1) \geqslant l - 1, \quad ml \geqslant m + l - 1 > \mu + l;$$

слѣдовательно, разности

$$1 - \frac{\mu+1}{m}, \quad 1 - \frac{\mu+3}{3m}, \quad 1 - \frac{\mu+5}{5m}, \ldots$$

всѣ имѣютъ положительныя значенія, такъ что

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-\mu-1} > 1 - \frac{\mu+1}{m},$$

что можно писать и такъ:

$$\frac{m - \mu - 1}{m} < \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\mu+1}.$$

Полагая здѣсь $m = k + 1,\ k + 2, \ldots, n$, находимъ:

$$\frac{k-\mu}{k+1} < \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{\mu+1},$$

$$\frac{k - \mu + 1}{k+2} < \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{\mu+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n - \mu - 1}{n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\mu+1}.$$

и сообразно съ этимъ получаемъ изъ равенства (4):

$$B_n^{(\mu)} < K\left(\frac{k+1}{k+2}\,\frac{k+2}{k+3} \cdots \frac{n}{n+1}\right)^{\mu+1} \tag{5}$$

$$< K\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{\mu+1},$$

такъ что, если h есть произвольное положительное число, то

$$n^h B_n^{(\mu)} < K(k+1)^{\mu+1}(n+1)^{h-\mu-1}. \tag{6}$$

Выраженіе же, стоящее въ правой части этого неравенства, будетъ приближаться къ предѣлу нуль при неограниченномъ возрастаніи n, если возьмемъ

$$h < 1 + \mu.$$

Такъ какъ допущеніе $h > 1$ совмѣстимо съ этимъ условіемъ, то, согласно равенству (3), для разсматриваемаго случая сходимость доказана.

Соотношеніе (5) показываетъ, что

$$\lim_{n=\infty} B_n^{(\mu)} = 0 \qquad (7)$$

не только при положительномъ μ, но и тогда, когда $\mu + 1$ есть положительное число, слѣдовательно, и въ случаѣ, когда μ есть отрицательная правильная дробь. Но только въ этомъ случаѣ убываніе величины $B_n^{(\mu)}$ уже не достаточно для того, чтобы гарантировать абсолютную сходимость ряда (1), такъ какъ $h < 1 + \mu$ остается ниже 1.

4. Это приводитъ насъ къ второму случаю $-1 < \mu \leqslant 0$.

Въ этомъ случаѣ биноміальный рядъ сходится на кругѣ сходимости, кромѣ случая $z = -1$, хотя сходится вообще уже не абсолютно.

Доказательство основывается на общемъ равенствѣ (§ 53, (7))

$$B_n^{(\mu+1)} = B_n^{(\mu)} + B_{n-1}^{(\mu)}, \qquad (8)$$

справедливость котораго для произвольнаго μ выводится изъ соотношеній

$$B_n^{(\mu)} = \frac{\mu - n + 1}{n} B_{n-1}^{(\mu)}, \quad B_n^{(\mu+1)} = \frac{\mu + 1}{n} B_{n-1}^{(\mu)}$$

между биноміальными коэффиціентами. Положивъ теперь, при любомъ z,

$$S_n^{(\mu)} = 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + \ldots + B_n^{(\mu)} z^n,$$

и умноживъ обѣ части этого равенства на $1 + z$, получимъ, согласно рав. (8):

$$\begin{aligned}(1+z) S_n^{(\mu)} &= 1 + B_1^{(\mu)} z + B_2^{(\mu)} z^2 + \ldots + B_n^{(\mu)} z^n \\ &\quad + \quad z + B_1^{(\mu)} z^2 + \ldots + B_{n-1}^{(\mu)} z^n + B_n^{(\mu)} z^{n+1} \\ &= 1 + B_1^{(\mu+1)} z + B_2^{(\mu+1)} z^2 + \ldots + B_n^{(\mu+1)} z^n + B_n^{(\mu)} z^{n+1} \\ &= S_n^{(\mu+1)} + z^{n+1} B_n^{(\mu)}.\end{aligned}$$

Если абсолютное значеніе r величины z равно 1, то, при неограниченномъ возрастаніи n, величина z^{n+1} остается конечной, а число $B_n^{(\mu)}$ становится равнымъ нулю.

А такъ какъ $\mu + 1 > 0$, то $S_n^{(\mu+1)}$, согласно п. 2, имѣетъ конечный предѣлъ и, если $1 + z$ не равно 0, то и сумма $S_n^{(\mu)}$ имѣетъ конечный предѣлъ, т. е. рядъ $\varphi(\mu)$ сходится.

Однако же, при $z = -1$, нашъ рядъ въ этомъ случаѣ не можетъ сходиться, ибо при вещественномъ значеніи z, меньшемъ единицы, функція $\varphi(\mu)$ дѣлается равною $(1 + z)^\mu$, а это выраженіе обращается въ безконечность, когда μ есть отрицательное число и $z = -1$. Поэтому, согласно теоремѣ Абеля § 113, рядъ не можетъ сходиться при $z = -1$.

При $\mu = 1$ и $\zeta = -1$ биноміальный рядъ обращается въ выраженіе $+1-1+1-1+1-\ldots$, т. е., въ сумму, колеблющуюся между 0 и 1.

5. Очень легко исчерпывается третій случай $\mu \leqq -1$.

Въ этомъ случаѣ $\mu+1$ есть либо отрицательное число, либо нуль, слѣдовательно, $n-\mu-1$ есть положительное число, которое больше n или въ крайнемъ случаѣ равно n. Поэтому,

$$\frac{n-\mu-1}{n} \geqq 1,$$

и, слѣдовательно, биноміальные коэффиціенты $B_n^{(\mu)}$ будутъ больше 1 и не будутъ приближаться къ предѣлу нуль. Такимъ образомъ, и члены рядовъ X, Y:

$$B_m^{(\mu)} \cos m\vartheta, \quad B_m^{(\mu)} \sin m\vartheta$$

не будутъ безконечно малыми и, слѣдовательно, эти ряды не могутъ сходиться. Единственнымъ исключеніемъ, не представляющимъ, однако, никакого интереса, является рядъ Y, когда $\vartheta = 0$ или $= \pi$, при чемъ $Y=0$.

6. Чтобы въ случаяхъ сходимости ряда опредѣлить его сумму, достаточно положить $r=1$ въ § 122 (8), (9) и (10). Тогда

$$\sqrt{1+2r\cos\vartheta+r^2} = \sqrt{2(1+\cos\vartheta)} = 2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

такъ какъ $\cos\frac{1}{2}\vartheta$ есть положительное число, ибо, по предположенію, ϑ лежитъ между $-\pi$ и $+\pi$. Далѣе,

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\vartheta}{2(\cos\frac{1}{2}\vartheta)^2} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta$$

и, слѣдовательно,

$$\omega = \tfrac{1}{2}\vartheta,$$

при чемъ ω, какъ это и требовалось находится между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$. Отдѣляя въ равенствѣ § 122. (10) вещественную часть отъ мнимой, мы такимъ образомъ найдемъ:

$$\left(2\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)^{\mu}\cos\mu\frac{\vartheta}{2} = 1 + B_1^{(\mu)}\cos\vartheta + B_2^{(\mu)}\cos 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\cos 3\vartheta + \cdots,$$

$$\left(2\cos\frac{1}{2}\vartheta\right)^{\mu}\sin\mu\frac{\vartheta}{2} = \qquad B_1^{(\mu)}\sin\vartheta + B_2^{(\mu)}\sin 2\vartheta + B_3^{(\mu)}\sin 3\vartheta + \cdots,$$

и эти равенства справедливы при $\mu > -1$; при положительномъ значеніи μ, предѣльное значеніе $\vartheta = \pm\pi$ еще допустимо.

ГЛАВА XXVI.

Логариѳмическіе ряды.

---

§ 123. Логариѳмическіе ряды.

1. Если въ биноміальномъ ряду

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots, \quad (1$$

гдѣ x есть положительная или отрицательная правильная дробь, положить $\mu = 0$, то обѣ части примутъ значеніе 1. Если же предварительно приведемъ равенство (1) къ виду:

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x + \frac{\mu - 1}{1.2}x^2 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}x^3 + \quad (2)$$

и затѣмъ станемъ приближать μ къ нулю, то правая часть преобразуется въ рядъ:

$$\lambda = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \quad (3$$

который также сходится, когда x есть правильная дробь.

Но, по § 120, 4, рядъ (2) есть непрерывная функція отъ μ, когда x есть правильная дробь, и потому λ есть предѣлъ частнаго $((1+x)^\mu - 1) : \mu$ при $\mu = 0$.

Чтобы найти сумму ряда (3), достаточно представить этотъ предѣлъ не въ формѣ безконечнаго ряда.

Этого нельзя сдѣлать непосредственно, потому что при $\mu = 0$ уничтожается и числитель и знаменатель дроби $((1+x)^\mu - 1) : \mu$, а 0.0 не имѣетъ опредѣленнаго значенія. Мы можемъ, однако, найти косвеннымъ образомъ и этотъ предѣлъ, воспользовавшись уже найденными нами (§ 110) предѣлами.

Если положить

$$(1+x)^\mu - 1 = \frac{1}{y}, \quad (4$$

то ν будетъ возрастать до безконечности, когда μ будетъ приближаться къ нулю. Но изъ равенства (4) слѣдуетъ:

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \frac{1}{\nu};$$

если мы возьмемъ логариѳмы обѣихъ частей, то получимъ:

$$\mu = \frac{\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\log(1+x)} \qquad (5)$$

Изъ равенствъ же (4) и (5) вытекаетъ, что

$$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} = \frac{\log(1+x)}{\nu\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} = \frac{\log(1+x)}{\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}}. \qquad (6)$$

По § 110. 5,

$$\lim_{\nu=\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e$$

(основаніе натуральной системы логариѳмовъ). Слѣдовательно, согласно равенству (6),

$$\lim_{\mu=0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} = \frac{\log(1+x)}{\log e}.$$

Это равенство получитъ наиболѣе простой видъ, если мы примемъ e за основаніе системы логариѳмовъ. Эти логариѳмы называются **натуральными логариѳмами**. Для отличія ихъ отъ другихъ, напр., бригговыхъ логариѳмовъ, употребляются различныя обозначенія: $\log\mathrm{nat}\,x$ или $l(x)$. Мы здѣсь будемъ пользоваться также весьма употребительнымъ обозначеніемъ $\ln x$. Поэтому, если мы теперь положимъ въ основаніе систему натуральныхъ логариѳмовъ, то получимъ

$$\lim_{\mu=0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} = \ln(1+x).$$

Изъ равенства же (3) мы получимъ такимъ образомъ разложеніе

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots \qquad (7)$$

Мы получимъ нѣсколько болѣе удобную форму, если замѣнимъ x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ldots, \qquad (8)$$

и затѣмъ вычтемъ равенство (8) изъ равенства (7):

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots, \qquad (9)$$

Положивъ

$$\frac{1+x}{1-x} = y \quad \text{и, слѣдовательно,} \quad x = \frac{y-1}{y+1},$$

найдемъ, что каждому положительному значенію величины y соотвѣтствуетъ значеніе x, меньшее единицы, а именно, x есть положительное число, при $y > 1$, и отрицательное, когда $y < 1$, такъ что можно при помощи ряда (9) найти натуральный логариѳмъ каждаго положительнаго числа.

Изъ равенства (9), при $x = 1/3$, получаемъ

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\,.\,3^3} + \frac{1}{5\,.\,3^5} + \frac{1}{7\,.\,3^7} + \frac{1}{9\,.\,3^9} + \frac{1}{11\,.\,3^{11}} + \frac{1}{13\,.\,3^{13}} + \ldots \quad (10)$$

откуда находимъ, что натуральный логариѳмъ числа 2 равенъ

0,693147

съ точностью до шестого десятичнаго знака. Этотъ способъ довольно тягостенъ, когда требуется высокая степень точности.

2. Рядъ (7) расходится, когда $x = -1$, ибо при этомъ значеніи x онъ обращается въ

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right).$$

Напротивъ, при $x = +1$, получаемъ

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots,$$

и этотъ рядъ сходится, хотя и не абсолютно (§ 112, 5).

По теоремѣ о непрерывности степенного рядъ (§ 113) мы можемъ опредѣлить сумму этого ряда, положивъ $x = 1$ въ суммѣ $\ln(1+x)$. Такимъ образомъ находимъ:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots. \qquad (11)$$

§ 124. Циклометрическіе ряды.

1. Если въ биноміальномъ ряду положимъ $z = ix$, то получимъ:

$$\varphi(\mu) = 1 + i\mu x - \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}x^2 - i\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

и значеніе этой суммы найдется изъ равенствъ (9), (10) § 121, если въ нихъ положить $\vartheta = \pm \frac{1}{2}\pi$, при чемъ верхній знакъ относится къ положительнымъ, а нижній къ отрицательнымъ значеніямъ x. Если x есть правильная дробь и $r = (x)$, то

$$\operatorname{tg}\omega = x, \qquad (1)$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi(\mu) = (\sqrt{1+x^2})^\mu (\cos\mu\omega + i\sin\mu\omega).$$

Отдѣляя вещественную часть отъ мнимой, находимъ

$$(\sqrt{1+x^2})^\mu \cos\mu\omega = 1 - \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}x^4 - \ldots,$$

$$(\sqrt{1+x^2})^\mu \sin\mu\omega = \mu x - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 +$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1.2.3.4.5}x^5 - \ldots,$$

и, дѣля второй изъ этихъ рядовъ на μ, получаемъ:

$$(\sqrt{1+x^2})^\mu \frac{\sin\mu\omega}{\mu} = x - \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)}{1.2.3.4.5}x^5 - \ldots,$$

При $\mu = 0$ правая часть преобразуются въ безконечный рядъ

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots, \qquad (2)$$

сходящій при всякомъ значеніи x, равномъ правильной дроби; значеніе же этого ряда мы найдемъ, какъ и въ логариѳмическомъ ряду, разыскавъ предѣлъ лѣвой части при $\mu = 0$.

Но, по § 118, 2, $\sin\alpha : \alpha = 1$, при $\alpha = 0$, а потому, положивъ $\alpha = \mu\omega$, имѣемъ:

$$\lim_{\mu=0} \frac{\sin\mu\omega}{\mu} = \omega \lim_{\mu=0} \frac{\sin\mu\omega}{\mu\omega} = \omega,$$

а $(\sqrt{1+x^2})^\mu$ дѣлается равнымъ 1; такимъ образомъ находимъ:

$$\omega = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots, \qquad (3)$$

2. Когда задано положительное или отрицательное число, равное тангенсу нѣкотораго угла ω, то этимъ опредѣляется только остатокъ отъ дѣленія угла на π. Но уголъ будетъ опредѣленъ вполнѣ, если присоединить еще ограниченіе, что онъ долженъ заключаться между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$.

Опредѣленный такимъ образомъ уголъ (выраженный въ дуговой мѣрѣ), какъ дуга, тангенсъ которой есть x, называютъ arcus tangens x (правильнѣе arcus tangentis x) и пишутъ сокращено:

$$\omega = \operatorname{arctg} x, \tag{4}$$

такъ что равенство (3) даетъ:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots \tag{5}$$

Такъ какъ формула (5) имѣетъ мѣсто только въ томъ случаѣ, когда x содержится между -1 и $+1$, то уголъ $\operatorname{arctg} x$ лежитъ между $-\frac{1}{4}\pi$ и $+\frac{1}{4}\pi$ (между -45^0 и $+45^0$).

3. Рядъ (5) остается сходящимся, когда x становится равнымъ 1, а $\operatorname{arctg} x$ принимаетъ тогда значеніе $\frac{1}{4}\pi$, и мы получаемъ такимъ образомъ сумму извѣстнаго ряда Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots, \text{*)} \tag{6}$$

Вслѣдствіе медленной сходимости, этотъ рядъ однако не пригоденъ для практическаго вычисленія числа π.

4. Чтобы получить ряды съ лучшей сходимостью, служащіе для вычисленія π, берутъ уголъ, который находится въ извѣстномъ отношеніи къ числу π и котораго тангенсъ равенъ извѣстной правильной дроби. Если возьмемъ, напримѣръ, уголъ, равный $\frac{1}{6}\pi$ (30^0, половину угла равносторонняго треугольника), то его тангенсъ равенъ $1/\sqrt{3}$, и изъ равенства (5) получаемъ:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \frac{1}{11.3^5} + \ldots \tag{7}$$

Ниже будутъ найдены ряды, имѣющіе еще лучшую сходимость.

§ 125. Функція arc tg x.

Если въ ряду § 123, (9) подставить ix вмѣсто x, то получимъ рядъ, который отличается отъ ряда § 124, (5) только множителемъ i, и потому вполнѣ естественно, если мы положимъ

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ix}{1-ix}. \tag{1}$$

*) Объ открытіи суммы этого ряда Лейбницемъ ср. Cantor, „Geschichte der Mathematik", Bd. III, Kapitel 86.

Это равенство представляетъ собою прежде всего только опредѣленіе логариѳма мнимой величины, но въ силу этого опредѣленія оба ряда § 123, (9) и § 123, (5) объединяются въ одномъ законѣ.

2. Основное свойство логариѳмовъ сохраняется согласно формулѣ (1), а именно: сумма двухъ логариѳмовъ равна логариѳму произведенія слагаемыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если положить

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \beta = \operatorname{arc\,tg} y,$$
$$x = \operatorname{tg}\alpha, \qquad y = \operatorname{tg}\beta,$$

то имѣемъ по формулѣ сложенія для тангенсовъ:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{x+y}{1-xy}; \tag{2}$$

поэтому

$$\alpha+\beta = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy},$$

или

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}. \tag{3}$$

При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что къ лѣвой части необходимо еще прибавить π или отнять отъ нея π, когда сумма $\alpha+\beta$ выступаетъ изъ интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$.

Изъ равенствъ (1) и (3) получаемъ:

$$\ln\frac{1+ix}{1-ix} + \ln\frac{1+iy}{1-iy} = \ln\frac{1-xy+i(x+y)}{1-xy-i(x+y)},$$

при чемъ

$$\frac{1-xy+i(x+y)}{1-xy-i(x+y)} = \frac{(1+ix)(1+iy)}{(1-ix)(1-iy)},$$

такъ что законъ логариѳмовъ сохраняется:

$$\ln\frac{1+ix}{1-ix} + \ln\frac{1+iy}{1-iy} = \ln\frac{1+ix}{1-ix}\cdot\frac{1+iy}{1-iy}.$$

3. Этимъ закономъ можно воспользоваться для преобразованія ряда $\operatorname{arctg} x$ въ сумму подобныхъ ему рядовъ, которые, имѣя гораздо болѣе высокую степень сходимости, могутъ служить для точнаго вычисленія π.

Если опредѣлить двѣ правильныя дроби x и y такъ, чтобы онѣ удовлетворяли равенству

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1, \tag{4}$$

то, принимая во вниманіе, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{4}\pi$, найдемъ, по равенству (3), что

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y,$$

и изъ § 124, (5) слѣдуетъ:

$$\frac{\pi}{4} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$
$$+ y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots$$

Для опредѣленія x и y равенство (4) преобразовываютъ въ

$$(x + 1)(y + 1) = 2,$$

и, положивъ $x = \frac{1}{2}$, находятъ $y = \frac{1}{3}$, и получаютъ такимъ образомъ ряды Эйлера, имѣющіе лучшую сходимость:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{2^7} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}\frac{1}{3^7} + \ldots$$

Если къ обѣимъ частямъ равенства (3) прибавить еще третій уголъ и вновь примѣнить ту же формулу, то выйдетъ:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} \frac{x + y + z - xyz}{1 - xy - xz - yz},$$

и если опредѣлить правильныя дроби x, y, z такъ, чтобы онѣ удовлетворяли равенству

$$x + y + z - xyz = 1 - xy - xz - yz,$$

то получимъ

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z \qquad (5)$$

въ формѣ трехъ рядовъ, которые иногда еще лучше сходятся. Взявъ, напримѣръ, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{8}$, $z = \frac{1}{5}$, получаемъ:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5}.$$

По этой формулѣ производилъ вычисленіе Дазе (Dahse), который опредѣлилъ число π съ 200 десятичными знаками.

Еще гораздо раньше (1706) Джонъ Машинъ (John Machin) далъ лучшую формулу, которою онъ пользовался для вычисленія π со 100 десятичными знаками. Выводъ ея основанъ на слѣдующихъ соображеніяхъ:

Если въ равенствѣ (3) положить $y = 1$, то при любомъ x будетъ:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{x+1}. \qquad (6)$$

Если здѣсь взять для x значеніе, близкое къ 1, то $(1-x)/(1+x)$ будетъ малою дробью, и мы получимъ для второго члена правой части хорошо сходящійся рядъ согласно равенству § 124, (5). Для того же, чтобы и первый членъ представить въ видѣ хорошо сходящагося ряда, слѣдуетъ положить $\operatorname{arc\,tg} x = n \operatorname{arc\,tg} \alpha$, гдѣ n есть произвольное цѣлое число. Чѣмъ больше n, тѣмъ меньше будетъ α при данномъ значеніи x. Взявъ $n = 4$ и положивъ $\alpha = \beta$ въ равенствѣ (2), получимъ:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}, \quad \operatorname{tg} 4\beta = \frac{2 \operatorname{tg} 2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2 2\beta}.$$

Если же положить $\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $x = \operatorname{tg} 4\beta$, то изъ формулы (6) получимъ:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \alpha - \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} 4\beta - 1}{\operatorname{tg} 4\beta + 1}.$$

Взявъ произвольное число α равнымъ 1/5, находимъ $x = 120/119$, откуда, наконецъ, слѣдуетъ:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}. \qquad (7)$$

Ясно, что равенство (7) болѣе пригодно для вычисленія, чѣмъ равенство (5), такъ какъ рядъ § 124, (5) быстрѣе сходится при $x = 1/5$, чѣмъ при $x = 1/2$. Недавно Шанксъ (Shanks) примѣнилъ формулу (7) для вычисленія π съ 707 десятичными знаками *).

---

*) Чтобы дать представленіе о точности, выражаемой, напримѣръ, уже 100 десятичными знаками, Шубертъ (H. Schubert) въ Гамбургѣ придумалъ смѣлый образъ, который можно найти въ статьѣ „Квадратура круга“ въ собраніи научныхъ лекцій Вирхова (Virchow) и Гольцендорфа (Holzendorff) Heft 67.

Знаки e для основанія системы натуральныхъ логариѳмовъ и π для отношенія окружности къ діаметру вошли во всеобщее употребленіе съ тѣхъ поръ, какъ Эйлеръ употребилъ ихъ въ сочиненіи „Variae observationes circa series infinitas“, появившемся въ Запискахъ Петербургской Академіи въ 1739 году. Знакъ π былъ уже употребленъ въ 1706 г. В. Джонсомъ (Villiam Jones).

Число π называется Людольфовымъ числомъ по имени *Ludolph von Ceulen вычислившаго это число съ 35* десятичными знаками и умершаго въ 1610 г. профессоромъ въ Лейденѣ. Въ церкви Петра въ Лейденѣ въ 1840 г. была еще видна ненаходимая съ тѣхъ поръ надпись, указывавшая это число. Опредѣленія этого числа восходятъ до Архимеда. Cantor Bd. II. S. 598 f.

Число Дазе имѣется въ Журналѣ Крелля, т. 27. (1844); число Шанкса указано въ „Proceedings of the Royal society“ въ Лондонѣ, т. 21, съ поправкою въ т. 22 (1873).

§ 126. Тригонометрическіе ряды.

1. Приближая въ общихъ выраженіяхъ для X, Y (§ 121, 12)) число μ къ нулю, мы получимъ новыя разложенія въ ряды, обладающіе замѣчательными особенностями. Принявъ въ соображеніе, что, при $\mu = 0$,

$$\frac{B_n^{(\mu)}}{\mu} = \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

мы прежде всего найдемъ, что

$$\begin{aligned} \lim_{\mu=0} \frac{\rho^\mu \cos\mu\omega - 1}{\mu} &= r\cos\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \cos 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\vartheta - \ldots, \\ \lim_{\mu=0} \frac{\rho^\mu \sin\mu\omega}{\mu} &= r\sin\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\vartheta - \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

если

$$\rho = \sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2}, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta}. \tag{2}$$

Но изъ равенства

$$\cos\mu\omega = 1 - 2\left(\sin\frac{\mu\omega}{2}\right)^2$$

слѣдуетъ, что

$$\frac{\rho^\mu\cos\mu\omega - 1}{\mu} = \frac{\rho^\mu - 1}{\mu} - 2\rho^\mu \frac{\sin\frac{1}{2}\mu\omega}{\mu} \sin\tfrac{1}{2}\mu\omega. \tag{3}$$

А такъ какъ уже раньше было доказано, что

$$\lim_{\mu=0} \frac{\sin\mu\omega}{\mu} = \omega, \quad \lim_{\mu=0} \frac{\rho^\mu - 1}{\mu} = \ln\rho,$$

то второй членъ въ правой части равенства (3) исчезаетъ и мы получаемъ изъ равенства (1):

$$\begin{aligned} \ln\sqrt{1 + 2r\cos\vartheta + r^2} &= r\cos\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2\cos 2\vartheta \\ &\quad + \tfrac{1}{3} r^3 \cos 3\vartheta - \tfrac{1}{4} r^4 \cos 4\vartheta + \ldots, \\ \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin\vartheta}{1 + r\cos\vartheta} &= r\sin\vartheta - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\vartheta \\ &\quad + \tfrac{1}{3} r^3 \sin 3\vartheta - \tfrac{1}{4} r^4 \sin 4\vartheta + \ldots. \end{aligned}$$

2. Отсюда получаются интересные результаты при переходѣ къ границѣ сходимости, т. е., когда $r = 1$. Что ряды, находящіеся въ правыхъ частяхъ равенствъ (4), еще сходятся при $r = 1$ вытекаетъ изъ одной общей теоремы, доказательство которой мы здѣсь приведемъ.

Пусть $c_1, c_2, c_3, \ldots$ будутъ положительныя числа, удовлетворяющія условіямъ

$$c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > \ldots \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} c_n = 0 \qquad (5)$$

и составляющія, поэтому, рядъ убывающихъ чиселъ, которыя становятся меньше всякой границы. Пусть, далѣе,

$$u_1, u_2, u_3 \ldots$$

будетъ рядъ положительныхъ или отрицательныхъ чиселъ такого свойства, что съ безграничнымъ возрастаніемъ n сумма

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \qquad (6)$$

по абсолютной величинѣ остается меньше нѣкоторой конечной границы g, при чемъ нѣтъ надобности, чтобы эта сумма приближалась къ опредѣленному предѣлу.

При этихъ предположеніяхъ сумма

$$S_n = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \ldots + c_n u_n$$

сходится, т. е. $\operatorname{Lim} S_n = S$ имѣетъ опредѣленное значеніе

Для доказательства этой теоремы мы, согласно равенству (6), полагаемъ:

$$u_1 = U_1,$$
$$u_2 = U_2 - U_1,$$
$$u_3 = U_3 - U_2,$$
$$\ldots\ldots$$
$$u_n = U_n - U_{n-1}$$

и получаемъ отсюда:

$$S_n = c_1 U_1 + c_2(U_2 - U_1) + c_3(U_3 - U_2) + \ldots + c_n(U_n - U_{n-1})$$
$$= U_1(c_1 - c_2) + U_2(c_2 - c_3) + \ldots + U_{n-1}(c_{n-1} - c_n) + U_n c_n .$$

А такъ какъ безконечный рядъ

$$c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + (c_3 - c_4) + \ldots = c_1$$

состоитъ изъ однихъ только положительныхъ членовъ и такъ какъ абсолютныя величины всѣхъ чиселъ $U_1, U_2, U_3, \ldots$ меньше g, то и рядъ

$$U_1(c_1 - c_2) + U_2(c_2 - c_3) + U_3(c_3 - c_4) + \ldots$$

сходится (по § 111, 6), но въ такомъ случаѣ и сумма S_n сходится, ибо произведеніе $U_n c_n$ приближается къ нулю.

Взявъ въ этой теоремѣ для ряда $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ числа $+1, -1, +1, -1, \ldots$, мы получимъ отсюда теорему § 112, 3.

3. Чтобы примѣнить эту теорему къ рядамъ (4), положимъ

$$c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ \ c_3 = \frac{1}{3},\ \ c_4 = \frac{1}{4},\ \ldots,$$

чѣмъ требованія (5) будутъ удовлетворены, и останется только показать, что суммы

$$U_n = \cos\vartheta - \cos 2\vartheta + \cos 3\vartheta - \ldots \pm \cos n\vartheta,$$
$$V_n = \sin\vartheta - \sin 2\vartheta + \sin 3\vartheta - \ldots \pm \sin n\vartheta$$

остаются ниже нѣкоторой конечной границы. Это легко выводится изъ тригонометрическихъ формулъ:

$$2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\cos n\vartheta = \cos\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\vartheta + \cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta,$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}\vartheta\sin n\vartheta = \sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\vartheta + \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta.$$

Примѣняя эти формулы къ отдѣльнымъ членамъ суммъ U_n и V_n, мы получимъ:

$$2\,U_n\cos\frac{1}{2}\vartheta = \left(\cos\frac{1}{2}\vartheta + \cos\frac{3}{2}\vartheta\right) - \left(\cos\frac{3}{2}\vartheta + \cos\frac{5}{2}\vartheta\right) + \ldots$$
$$\pm\left(\cos\frac{2n-1}{2}\vartheta + \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta\right)$$
$$= \cos\frac{1}{2}\vartheta \pm \cos\frac{2n+1}{2}\vartheta,$$

$$2\,V_n\cos\frac{1}{2}\vartheta = \left(\sin\frac{1}{2}\vartheta + \sin\frac{3}{2}\vartheta\right) - \left(\sin\frac{3}{2}\vartheta + \sin\frac{5}{2}\vartheta\right) + \ldots$$
$$\pm\left(\sin\frac{2n-1}{2}\vartheta + \sin\frac{2n+1}{2}\vartheta\right)$$
$$= \sin\frac{1}{2}\vartheta \pm \sin\frac{2n+1}{2}\vartheta.$$

Мы должны теперь исключить тотъ случай, когда $\cos\frac{1}{2}\vartheta = 0$, т. е., $\vartheta = \pm\pi$. За этимъ исключеніемъ вышеприведенныя формулы показываютъ, что величины U_n и V_n никогда не переходятъ опредѣленной границы, такъ какъ при неограниченно возрастающемъ n величины $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta$ и $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta$ хотя и безпрестанно колеблются, но все же остаются положительными или отрицательными правильными дробями.

Въ случаѣ $\vartheta = \pm\pi$, который мы исключили, всѣ члены ряда U_n становятся равными -1, и U_n дѣлается равнымъ отрицательной безконечности. Члены же ряда V_n дѣлаются равными нулю, а слѣдовательно, и самый рядъ V_n равенъ нулю.

4. Установивъ такимъ образомъ сходимость рядовъ (4), мы можемъ, по § 113, найти значенія ихъ суммъ приближая въ лѣвыхъ частяхъ r къ 1. При этомъ получаемъ

$$\sqrt{1+2r\cos\vartheta+r^2} = \sqrt{2(1+\cos\vartheta)} = 2\cos\frac{\vartheta}{2}.$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\vartheta}{1+r\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\vartheta}{2}$$

Въ этихъ равенствахъ $-\pi<\vartheta<+\pi$ и, слѣдовательно, $\cos\frac{\vartheta}{2}$ есть положительное число, а $\frac{1}{2}\vartheta$ содержится между $-\frac{1}{2}\pi$ и $+\frac{1}{2}\pi$.

Такимъ образомъ мы изъ равенствъ (4) получаемъ разложенія:

$$\log\left(2\cos\frac{\vartheta}{2}\right) = \cos\vartheta-\tfrac{1}{2}\cos 2\vartheta+\tfrac{1}{3}\cos 3\vartheta-\tfrac{1}{4}\cos 4\vartheta+\ldots,$$
$$\frac{\vartheta}{2} = \sin\vartheta-\tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta+\tfrac{1}{3}\sin 3\vartheta-\tfrac{1}{4}\sin 4\vartheta+\ldots \qquad (8)$$

Въ случаѣ $\vartheta=\pi$, который мы исключили, первый изъ этихъ рядовъ перестаетъ быть сходящимся и вмѣстѣ съ тѣмъ правая часть становится безконечной. Второй рядъ еще сохраняетъ сходимость, но сумма его равна нулю, а не $\frac{1}{2}\pi$.

5. Положивъ во второмъ изъ равенствъ (8) $\vartheta=x$ и $\vartheta=\pi-x$, мы получимъ два равенства

$$\frac{1}{2}x = \sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots$$
$$\frac{\pi-x}{2} = \sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots. \qquad (9)$$

изъ коихъ первое имѣетъ мѣсто въ интервалѣ

$$-\pi<x<+\pi, \qquad (10)$$

а второе—въ интервалѣ

$$0<x<\pi. \qquad (11)$$

Такимъ образомъ оба равенства сохраняются въ общей области

$$0<x<\pi.$$

Складывая эти равенства, получимъ для этого интервала

$$\frac{\pi}{4} = \sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{7}\sin 7x+\ldots \qquad (12)$$

и здѣсь мы приходимъ къ тому замѣчательному результату, что рядъ, который находится въ правой части и члены котораго суть непрерывныя функціи отъ x, имѣетъ сумму, независящую отъ x.

6. О природѣ этихъ рядовъ можно себѣ составить наглядное геометрическое представленіе.

Положимъ:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots. \\
\varphi(x) &= \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \ldots.
\end{aligned} \qquad (13)
$$

Такъ какъ ряды въ правыхъ частяхъ этихъ равенствъ сходятся не только въ интервалахъ (10) и (11), но при всѣхъ значеніяхъ x, то равенствами (13) опредѣляются двѣ функціи отъ x, которыхъ значенія въ интервалѣ (11) опредѣляются формулами (9) и (12).

Но при всякомъ цѣломъ n

$$\sin(-nx) = -\sin nx, \quad \sin n(x + 2\pi) = \sin nx,$$

и, слѣдовательно, функціи $f(x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяютъ условіямъ

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= -f(x), \quad \varphi(-x) = -\varphi(x), \\
f(x+2\pi) &= f(x), \quad \varphi(x+2\pi) = \varphi(x).
\end{aligned}
$$

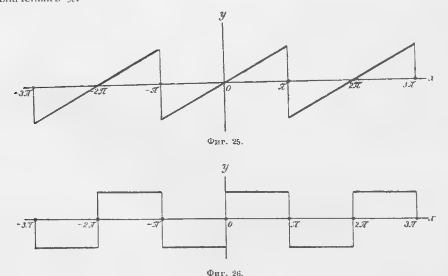
Сверхъ того

$$f(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad f(\pi) = 0, \quad \varphi(\pi) = 0$$

и

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \quad \varphi(x) = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi.$$

Такимъ образомъ функціи $f(x)$ и $\varphi(x)$ опредѣлены при всѣхъ значеніяхъ x.



Фиг. 25.

Фиг. 26.

Если станемъ наносить значенія x, какъ абсциссы, а значенія

$$y = f(x) \text{ или } y = \varphi(x)$$

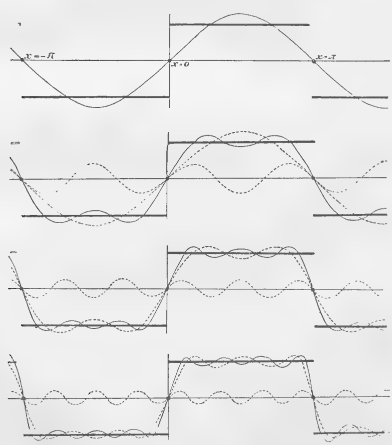
какъ соотвѣтствующія ординаты, то мы получимъ, какъ и въ § 93, графическія представленія этихъ функцій, которыя даны для функціи $f(x)$ на фиг. 25, а для функціи $\varphi(x)$ на фиг. 26.

Ясно, что $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть **разрывныя функціи**, хотя члены рядовъ, которыми онѣ опредѣлены, суть **непрерывныя функціи**.

Ясное представленіе о происхожденіи такихъ разрывовъ дается фигурой 27, въ четырехъ частяхъ которой сплошными линіями представлены кривыя, выражаемыя уравненіями

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x, \quad y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x,$$

$$y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x.$$



Фиг. 27.

Всѣ эти кривыя проходятъ черезъ точки $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; каждая изъ нихъ въ этихъ точкахъ поднимается круче, чѣмъ предшествующая, и, волнообразно изгибаясь, весьма замѣтно приближается къ образцу, представленному на фиг. 26 *).

Эти ряды суть частные случаи разложеній, извѣстныхъ подъ именемъ рядовъ Фурье и имѣющихъ частое примѣненіе въ Математической физикѣ.

---

*) Фигуры этого рода изготовлены подъ руководствомъ F. Klein'a въ большомъ масштабѣ и разнообразныхъ видахъ. Фигура 27 заимствована изъ сочиненія W. E. Byerly „An elementary treatise on Fouriers series" (Boston 1893) и находится также въ сочиненіи R. Fricke „Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen" (Leipzig 1900).

ГЛАВА XXVII.

Безконечныя произведенія.

§ 127. Сходимость безконечнаго произведенія.

1. Нѣкоторыя функціи, особенно тригонометрическія, можно представлять не только въ видѣ безконечныхъ рядовъ, но также въ формѣ безконечныхъ произведеній. Вопросъ о сходимости такихъ произведеній можно привести къ вопросу о сходимости безконечнаго ряда, ибо, взявъ логриѳмъ такого произведенія, мы получимъ безконечный рядъ, члены котораго суть логариѳмы множителей. Предпочитаютъ однако разсматривать самыя произведенія, а не безконечныя ряды логариѳмовъ. Мы предпосылаемъ вспомогательную теорему.

2. Лемма. Если $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ есть рядъ положительныхъ правильныхъ дробей и

$$Q_n = (1-q_1)(1-q_2)\ldots(1-q_n),$$

то

$$1 > Q_n > 1 - (q_1 + q_2 + \ldots + q_n). \qquad (1)$$

Что $Q_n < 1$, слѣдуетъ прямо изъ того, что всѣ множители $1-q_1$, $1-q_2, \ldots$ суть положительныя правильныя дроби. При $n=2$, произведеніе Q_2 будедъ очевично больше, чѣмъ $1-q_1-q_2$. Такимъ образомъ, при $n=2$, неравенство (1) вѣрно. Мы считаемъ его поэтому доказаннымъ для нѣкотораго n и составляемъ

$$Q_{n+1} = Q_n(1-q_{n+1}) > 1 - (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n+1})$$
$$+ q_1 q_{n+1} + q_2 q_{n+1} + \ldots + q_n q_{n+1}.$$

Но $q_1 q_{n+1} + q_2 q_{n+1} + \ldots + q_n q_{n+1}$ есть положительное число, поэтому

$$Q_{n+1} > 1 - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{n+1}),$$

чѣмъ справедливость неравенства (1) доказана вообще.

3. Когда положительныя правильныя дроби $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$ образуютъ безконечный рядъ, сумма котораго сходится, то съ безконечнымъ возрастаніемъ n сумма

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n \qquad (2)$$

имѣетъ опредѣленный предѣлъ g, и, какъ бы велико ни было n, число Q_n будетъ больше, чѣмъ $1 - g$. Съ другой стороны, значенія Q_n съ возрастаніемъ n постоянно убываютъ, такъ какъ $1 - q_{n+1}$ есть правильная дробь, и потому

$$Q_{n+1} = Q_n(1 - q_{n+1}) < Q_n.$$

Числа Q_n имѣютъ поэтому опредѣленную нижнюю границу Q и при любомъ n будетъ

$$Q_n > Q, \quad \lim_{n=\infty} Q_n = Q.$$

Въ этомъ случаѣ Q_n называется безконечнымъ сходящимся произведеніемъ, при чемъ, подобно тому, какъ это дѣлается въ рядахъ, пишутъ

$$Q = (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)\ldots. \qquad (3)$$

4. Разсматривая произведеніе

$$P_n = (1 + q_1)(1 + q_2)\ldots(1 + q_n) > 1,$$

при тѣхъ же предположеніяхъ относительно величинъ $q_1, q_2, q_3, \ldots$ мы получимъ путемъ умноженія

$$P_n Q_n = (1 - q_1^2)(1 - q_2^2)\ldots(1 - q_n^2) < 1.$$

Поэтому

$$1 < P_n < \frac{1}{Q_n} < \frac{1}{Q},$$

и числа P_n имѣютъ верхнюю границу P:

$$\lim P_n = P.$$

Согласно съ этимъ,

$$P = (1 + q_1)(1 + q_2)(1 + q_3)\ldots \qquad (4)$$

есть сходящееся безконечное произведеніе, въ предположеніи, что безконечный рядъ (2) сходится. Послѣ этого теорему п. 3 можно обобщить слѣдующимъ образомъ:

Если $q_1, q_2, q_3, \ldots$ суть произвольныя положительныя или отрицательныя величины и если рядъ (2) сходится абсолютно, то безконечное произведеніе Q сходится.

Въ самомъ дѣлѣ, соединивъ въ одну группу множители съ положительными q и въ другую пруппу множители съ отрицательными q, мы

получимъ одно произведеніе вида (3) и другое произведеніе вида (4), изъ коихъ каждое сходится въ отдѣльности.

5. Для произведенія Q легко вывести тотъ же общій признакъ сходимости, какой въ § 111, 3 былъ установленъ для безконечныхъ рядовъ, а именно:

Если означимъ черезъ $R_{n,m}$ произведеніе

$$R_{n,m} = (1 - q_{n+1})(1 - q_{n+2}) \ldots (1 - q_{n+m}),$$

то произведеніе Q будетъ сходится, когда произведеніе $R_{n,m}$ можетъ стать сколь угодно близкимъ къ единицѣ, какъ только каждое изъ двухъ чиселъ n и $n+m$ станетъ больше нѣкотораго достаточно большаго числа N.

Доказательство легко получить изъ § 111, опираясь на то, что логариѳмъ абсолютной величины произведенія Q равенъ суммъ логариѳмовъ абсолютныхъ величинъ отдѣльныхъ множителей.

§ 128. Преобразованіе синуса въ безконечное произведеніе.

Примѣняя ньютоновъ биномъ къ формулѣ Муавра

$$\cos ny + i \sin ny = (\cos y + i \sin y)^n$$

при цѣломъ и положительномъ n, находимъ

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos^n y + i B_1^{(n)} \cos^{n-1} y \sin y - B_2^{(n)} \cos^{n-2} y \sin^2 y$$
$$- i B_3^{(n)} \cos^{n-3} y \sin^3 y + \ldots,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \cos ny &= \cos^n y - B_2^{(n)} \cos^{n-2} y \sin^2 y + B_4^{(n)} \cos^{n-1} y \sin^4 y - \ldots, \\ \frac{\sin ny}{\sin y} &= B_1^{(n)} \cos^{n-1} y - B_3^{(n)} \cos^{n-3} y \sin^2 y + B_5^{(n)} \cos^{n-5} y \sin^4 y - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Если положимъ для краткости

$$z = \sin^2 y, \quad 1 - z = \cos^2 y$$

и допустимъ, что $n = 2m + 1$ есть нечетное число, то $\cos^{n-1} y$, $\cos^{n-3} y$, $\cos^{n-5} y, \ldots$ будутъ цѣлыми функціями отъ z степеней m, $m-1$, $m-2, \ldots$, и второе изъ равенствъ (1) дастъ намъ:

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = F(z),$$

гдѣ $F(z)$ означаетъ цѣлую функцію отъ z степени m.

Если же мы знаемъ корни $z_1, z_2, \ldots, z_m$ функціи $F(z)$, то, по § 61, 5, можно положить

$$\frac{\sin ny}{\sin y} = a_0 (z_1 - z)(z_2 - z) \ldots (z_m - z),$$

гдѣ a_0 не зависитъ отъ z. Для опредѣленія числа a_0, положимъ $y = 0$; тогда $z = 0$, и, по рав. (1), $\sin ny : \sin y = n$, слѣдовательно,

$$a_0 z_1 z_2 \dots z_m = n,$$

поэтому,

$$\sin ny = n \sin y \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{z_m}\right). \quad (2)$$

Но если величина y отлична отъ нуля, то $\sin ny$ обращается въ нуль въ томъ, и только въ томъ случаѣ, когда ny есть кратное числа π; слѣдовательно, всѣ корни функціи $F(z)$ имѣютъ видъ

$$z_h = \left(\sin \frac{h\pi}{n}\right)^2, \quad (3)$$

гдѣ h есть цѣлое число, но $h = 0$ не даетъ намъ корня функціи $F(z)$, ибо $F(0) = n$; сверхъ того

$$z_h = z_{-h}, \quad z_h = z_{n-h}, \quad z_h = z_{n+h},$$

и мы получимъ, поэтому, всѣ различныя значенія z_h, положивъ въ равенствѣ (3) $h = 1, 2, 3, \dots, m$.

2. Положивъ $ny = x$, мы найдемъ изъ равенства (2):

$$\sin x = n \sin \frac{x}{n} \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{z_m}\right), \quad (4)$$

гдѣ

$$z = \left(\sin \frac{x}{n}\right)^2, \quad z_h = \left(\sin \frac{h\pi}{n}\right)^2.$$

Если дадимъ x опредѣленное значеніе и станемъ увеличивать n до безконечности, то по § 118, 2 получимъ

$$\operatorname{Lim} n \sin \frac{x}{n} = x, \quad \operatorname{Lim} \frac{z}{z_h} = \frac{x^2}{h^2 \pi^2}.$$

Число множителей въ произведеніи (4) возрастаетъ при этомъ до безконечности, и мы получаемъ:

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \dots \quad (5)$$

Такимъ образомъ $\sin x$ выражается безконечнымъ произведеніемъ, которое несомнѣнно сходится. Въ самомъ дѣлѣ, если положить

$$q_h = \frac{x^2}{\pi^2 h^2},$$

то

$$\sum q_h = \frac{x^2}{\pi^2} \sum^{h} \frac{1}{h^2},$$

и рядъ $\sum^{h} \frac{1}{h^2}$ сходится по § 108, 3, а потому и произведеніе

$$\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots$$

сходится по § 127, 4.

3. Однако же правильность формулы (5) этимъ еще не доказана, ибо въ дальнѣйшихъ множителяхъ произведенія (4) число h въ выраженіи $\sin\frac{h\pi}{n}$ становится безконечнымъ вмѣстѣ съ n, а потому нельзя безъ дальнѣйшихъ оговорокъ замѣнять въ этихъ множителяхъ синусъ дугою. Чтобы пополнить доказательство, мы полагаемъ:

$$Q(x)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

$$Q_k(x)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

$$R_k(x)=\left(1-\frac{x^2}{(k+1)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(k+2)^2\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{m^2\pi^2}\right),$$

при чемъ, въ виду сходимости произведенія $Q(x)$, произведеніе $R_k(x)$ становится сколь угодно близкимъ къ единицѣ, когда числа k и m дѣлаются достаточно большими.

Пусть теперь будетъ

$$Q_k'(x)=\left(1-\frac{\xi}{\xi_1}\right)\left(1-\frac{\xi}{\xi_2}\right)\ldots\left(1-\frac{\xi}{\xi_k}\right),$$

$$R_k'(x)=\left(1-\frac{\xi}{\xi_{k+1}}\right)\left(1-\frac{\xi}{\xi_{k+1}}\right)\ldots\left(1-\frac{\xi}{\xi_m}\right).$$

Если мы дадимъ сначала k опредѣленное значеніе и станемъ увеличивать n до безконечности, а затѣмъ станемъ также увеличивать k до безконечности, то получимъ

$$\lim_{n=\infty} Q_k' = Q_k, \quad \lim_{k=\infty} Q_k = Q. \tag{6}$$

4. Но, по § 118, (1),

$$\sin\alpha < \alpha,$$

и легко можно показать, что

$$\sin\alpha > \tfrac{1}{2}\alpha,$$

когда α содержится между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Въ самомъ дѣлѣ, по § 118, (9),

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right) + \frac{\alpha^4}{5!}\left(1 - \frac{\alpha^2}{6.7}\right) + \frac{\alpha^6}{7!}\left(1 - \frac{\alpha^2}{8.9}\right) + \ldots,$$

и, при $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, будетъ

$$1 - \frac{\alpha^2}{6} > 1 - \frac{\pi^2}{24} > \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{\alpha^2}{6.7} > 0, \quad 1 - \frac{\alpha^2}{8.9} > 0, \ldots,$$

а потому, $\sin\alpha > \frac{1}{2}\alpha$. Сообразно съ этимъ, при $h < \frac{1}{2}n$, имѣемъ

$$\sin\frac{x}{n} < \frac{x}{n}, \quad \sin\frac{h\pi}{n} > \frac{h\pi}{2n},$$

слѣдовательно,

$$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\sin\frac{h\pi}{n}} < \frac{2x}{h\pi},$$

поэтому,

$$1 - \frac{z}{z_h} > 1 - \frac{4x^2}{h^2\pi^2}.$$

Такимъ образомъ,

$$R_k'(x) > \left(1 - \frac{4x^2}{(k+1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{(k+2)^2\pi^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{4x^2}{m^2\pi^2}\right).$$

такъ что,

$$1 > R_k'(x) > R_k(2x). \tag{7}$$

Отсюда вытекаетъ, что выраженіе $R_k'(x)$ будетъ сколь угодно близко къ единицѣ, если взять числа k и n достаточно большими, а изъ точнаго равенства (4):

$$\sin x = n\sin\frac{x}{n}\,Q_k'(x)\,R_k'(x),$$

а также изъ соотношеній (6) и (7) слѣдуетъ, что $Q_k(x)$ можно сдѣлать сколь угодно близкимъ къ $\sin x : x$, взявъ числа k и n достаточно большими. Но при достаточно большомъ k выраженіе $Q_k(x)$ становится сколь угодно близкимъ къ $Q(x)$, а отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{\sin x}{x} = Q(x),$$

чѣмъ равенство (5) и доказано.

5. Положивъ въ равенствѣ (5) $x = \frac{1}{2}\pi$, а, слѣдовательно, $\sin x = 1$, мы получимъ число π въ видѣ произведенія безконечнаго ряда чиселъ. Прежде всего находимъ:

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right)\ldots$$

Въ правой части всѣ множители, за исключеніемъ множителя $\frac{\pi}{2}$, имѣютъ форму

$$1 - \frac{1}{4n^2} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n},$$

и если мы обѣ части помножимъ на выраженіе, обратное произведенію всѣхъ множителей этого вида, то получимъ:

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{Lim}_{n=\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

что можно представить и такъ:

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{Lim}_{n=\infty}\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2}{3^2.5^2.7^2\ldots(2n-1)^2}\,\frac{1}{2n+1}, \qquad (8)$$

а такъ какъ дробь $2n:(2n+1)$ имѣетъ предѣлъ 1, то будетъ также:

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{Lim}_{n=\infty}\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2n-2)^2}{3^2.5^2.7^2\ldots(2n-1)^2}\,2n.$$

Это выраженіе извѣстно подъ именемъ Валлисова числа [1]).

Дѣля обѣ части равенства (8) на $\frac{1}{2}\pi$ и принимая во вниманіе, что при безконечномъ n можно замѣнить $\frac{1}{2}(2n+1)$ на n, мы получаемъ:

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty}\frac{2.4.6\ldots2n}{3.5.7\ldots(2n-1)}\,\frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 1,$$

или же, помножая числителя и знаменателя дроби на

$$2.4.6\ldots2n = 2^n.n!,$$

находимъ:

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty}\frac{(n!)^2\,2^{2n}}{(2n)!\,\sqrt{n\pi}} = 1. \qquad (9)$$

[1]) John Wallis (1616—1703). Сначала теологъ, а съ 1649 г. профессоръ математики въ Оксфордѣ. Формула

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3.3.5.5.7.7\ldots}{2.4.4.6.6.8\ldots}$$

имѣется въ „Arithmetica Infinitorum“, напечатанной въ 1665 г.

§ 129. Безконечное произведеніе для косинуса.

1. Въ формулѣ (5) функція $\sin x$ разложена ближайшимъ образомъ не на линейные, а на квадратные множители, которые, по формулѣ $1-\alpha^2=(1-\alpha)(1+\alpha)$, немедленно разлагаются на линейные множители, и тогда функція $\sin x$, подобно ц ѣ л о й р а ц і о н а л ь н о й ф у н к ц і и, разложена на линейные множители, изъ коихъ тотчасъ усматриваются ея „корни“, т. е. тѣ значенія x, для которыхъ $\sin x$ исчезаетъ. Различіе состоитъ только въ томъ, что число множителей безконечно.

Такимъ образомъ, $\sin x$ представляется, какъ предѣлъ произведенія

$$x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n\pi}\right)\times \left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{n\pi}\right) \qquad (1)$$

для безгранично возрастающаго n.

2. Пользуясь формулой

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

можно вывести подобное же разложеніе для $\cos x$.

Если въ произведеніи (1) замѣнимъ x на $\frac{1}{2}\pi-x$, то получимъ:

$$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{x}{2\pi}\right)\ldots\left(\frac{2n-1}{2n}+\frac{x}{n\pi}\right)\times \left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{5}{4}-\frac{x}{2\pi}\right)\ldots\left(\frac{2n+1}{2n}-\frac{x}{n\pi}\right),$$

или

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}\times \qquad (2)$$

$$\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\ldots\left(1+\frac{2x}{(2n-1)\pi}\right)\times \left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\ldots\left(1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}\right)$$

Множитель

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

имѣетъ предѣлъ 1 по § 128, 5. Остальные множители выраженія (2) можно соединить слѣдующимъ образомъ:

$$\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{2x}{(2n+1)\pi}\right).$$

Если мы здѣсь станемъ увеличивать n до безконечности, то послѣдній множитель $1 - \frac{2x}{(2n+1)\pi}$ будетъ приближаться къ предѣлу 1, и мы получимъ такимъ образомъ безконечное произведеніе для косинуса:

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots, \quad (3)$$

откуда опять непосредственно усматриваются корни функціи $\cos x$, а именно: $x = \frac{(2n-1)\pi}{2}$.

Можно было бы получить это произведеніе и такимъ путемъ, какимъ прямо было найдено произведеніе для $\sin x$.

§ 130. Бернулліевы числа.

1. Если мы станемъ сравнивать другъ съ другомъ оба разложенія $\sin x$ въ безконечный рядъ и въ безконечное произведеніе и доведемъ аналогію между цѣлой раціональной функціей и функціей $\sin x$ до того, что станемъ вычислять суммы степеней корней послѣдней, то получимъ весьма замѣчательные результаты.

Раскрывъ скобки въ произведеніи

$$Q_n = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

получимъ:

$$Q_n = 1 + a_1x^2 + a_2x^4 + \ldots + a_nx^{2n}, \quad (1)$$

гдѣ

$$-a_1, +a_2, -a_3, +a_4, \ldots, (-1)^n a_n$$

суть основныя симметрическія функціи отъ величинъ

$$\frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{4\pi^2}, \frac{1}{9\pi^2}, \ldots, \frac{1}{n^2\pi^2}, \quad (2)$$

т. е. суммы ихъ произведеній по два, по три и т. д.

Если же положить

$$S_h^{(n)} = \frac{1}{1^{2h}} + \frac{1}{2^{2h}} + \frac{1}{3^{2h}} + \ldots + \frac{1}{n^{2h}},$$

то

$$s_1 = \frac{1}{\pi^2}S_1^{(n)}, \quad s_2 = \frac{1}{\pi^4}S_2^{(n)}, \ldots, s_n = \frac{1}{\pi^{2n}}S_n^{(n)}$$

будутъ суммами одинаковыхъ степеней величинъ (2), при чемъ, по § 65, (6), имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\begin{aligned} &S_1^{(n)} + \pi^2 a_1 = 0, \\ &S_2^{(n)} + \pi^2 a_1 S_1^{(n)} + 2\pi^4 a_2 = 0, \\ &S_3^{(n)} + \pi^2 a_1 S_2^{(n)} + \pi^4 a_2 S_1^{(n)} + 3\pi^6 a_4 = 0. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \quad (3)$$

2. Если теперь n увеличивать до безконечности, то Q_n перейдетъ въ выраженіе $\sin x : x$, для котораго мы, согласно § 118, (9). имѣемъ слѣдующее разложеніе въ рядъ:

$$Q = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

а потому

$$\begin{aligned} \operatorname{Lim} a_1 &= -\frac{1}{3!}, \\ \operatorname{Lim} a_2 &= -\frac{1}{5!}, \\ \operatorname{Lim} a_3 &= -\frac{1}{7!}, \\ &\ldots \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Съ другой стороны, суммы S_h преобразуются въ безконечные ряды

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \\ S_2 &= \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots \\ S_3 &= \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots \\ &\ldots \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

которые, какъ мы это видѣли въ § 108, 3, всѣ сходятся и имѣютъ поэтому опредѣленныя числовыя значенія. Эти послѣднія можно опредѣлить, увеличивая также въ равенствахъ (3) n до безконечности. При этомъ, согласно соотношеніямъ (4) и (5), получаемъ:

$$\begin{aligned} S_1 - \frac{\pi^2}{3!} &= 0, \\ S_2 - \frac{\pi^2 S_1}{3!} + \frac{2\pi^4}{5!} &= 0, \\ S_3 - \frac{\pi^2 S_2}{3!} + \frac{\pi^4 S_1}{5!} - \frac{3\pi^6}{7!} &= 0. \\ &\ldots \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

откуда можно послѣдовательно опредѣлять суммы $S_1, S_2, S_3, \ldots$ Мы получимъ, напримѣръ:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\pi^2}{6}, \\ S_2 &= \frac{\pi^4}{90}, \\ S_3 &= \frac{16\pi^6}{3 \, . \, 7!} = \frac{\pi^6}{945}. \\ &\ldots \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Мы опредѣлимъ теперь систему чиселъ B_n, называемыхъ Бернуллiевыми числами, равенствомъ

$$B_n = \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} S_n.$$

такъ что въ простѣйшихъ случаяхъ получимъ:

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_2 = \frac{1}{42}.$$

Какъ видимъ. числа $B_1, B_2, B_3, \ldots$ суть рацiональныя числа; они сначала убываютъ съ возрастанiемъ индекса, но затѣмъ чрезвычайно быстро возрастаютъ до безконечности. Таблица этихъ чиселъ до числа B_{62} была вычислена Адамсомъ (Adams) (Журналъ Крелля, г. 85, 1878). Приведемъ для примѣра первыя 7 изъ этихъ чиселъ:

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{30},\ \frac{5}{62},\ \frac{691}{2730},\ \frac{7}{6}.$$

Число B_{62} имѣетъ знаменатель, равный 30, и числитель, содержащiй 110 цифръ *).

3. Съ бернуллiевыми числами приходится встрѣчаться при обратномъ разложенiи безконечныхъ произведенiй въ безконечные ряды. Мы приведемъ примѣръ такого разложенiя. Взявъ натуральные логариѳмы обѣихъ частей равенства § 129, (3) мы получаемъ:

$$\ln \cos x = \sum^{\nu} \ln \left(1 - \left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^2\right),$$

гдѣ ν принимаетъ значенiя, равныя членамъ ряда положительныхъ нечетныхъ чиселъ. При $x < \frac{1}{2}\pi$, всѣ логариѳмы въ правой части можно разложить въ степенные ряды, при чемъ, согласно § 123, (8), находимъ:

$$-\ln\left(1 - \left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^2\right) = \sum^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{\nu\pi}\right)^{2n},$$

*) Эти числа встрѣчаются впервые въ посмертномъ сочиненiи Якова Бернулли „Ars conjectandi", которое было издано племянникомъ автора Николаемъ I Бернулли въ 1713 г. (Нѣмецкiй переводъ съ примѣчанiями Haussner'a въ „Ostwald's Klassiker" Heft 107, 108, S. 99 первой части).

Архимедъ хотѣлъ вычислить число песчинокъ, помѣщающихся въ шарѣ, котораго радiусъ равенъ радiусу вселенной. Если вмѣсто песчинокъ мы возьмемъ тѣльца, каковы, напримѣръ, по новѣйшимъ воззрѣнiямъ электроны, число которыхъ въ одномъ кубическомъ миллиметрѣ равно 10^{21}, а за вселенную примемъ шаръ, радiусъ котораго равенъ удаленiю Сирiуса, т. е. 10^{15} километрамъ, то количество этихъ тѣлецъ выразится числомъ, содержащимъ всего 95 знаковъ. Мы должны были бы умножить еще это число на сто билліоновъ, чтобы получить число одного порядка съ 62-мъ Бернуллiевымъ числомъ.

гдѣ n проходитъ весь рядъ натуральныхъ чиселъ. Взявъ сумму всѣхъ этихъ выраженій и соединивъ въ одинъ всѣ тѣ члены, которые помножаются на одну и ту же степень числа x, найдемъ:

$$-\ln\cos x = \sum^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2n} \sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}}.$$

Но если мы изъ всего ряда натуральныхъ чиселъ m выдѣлимъ рядъ четныхъ чиселъ $2m$, то останется рядъ нечетныхъ чиселъ ν. Поэтому

$$\sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}} = \sum^{m} \frac{1}{m^{2n}} - \sum^{m} \frac{1}{(2m)^{2n}},$$

или, въ виду обозначеній (5) и (8),

$$\sum^{\nu} \frac{1}{\nu^{2n}} = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} S_n = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2\cdot(2n)!} B_n,$$

такъ что

$$-\ln\cos x = \sum^{n} \frac{(2x)^{2n}}{2n} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} B_n. \qquad (9)$$

Какъ уже было замѣчено, этотъ разъ сходится, пока $x < \frac{1}{2}\pi$. Можно получить еще много такихъ рядовъ и къ нимъ принадлежатъ ряды, въ которые разлагаются тригонометрическія функціи $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}\, x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}\, x$. Для вывода этихъ разложеній цѣлесообразнѣе пользоваться правилами дифференціальнаго исчисленія. Примѣромъ можетъ служить рядъ

$$\mathrm{tg}\, x = \sum^{n} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}.$$

который легко получить, взявъ въ равенствѣ (9) производныя отъ обѣихъ частей. (Ср. гл. XXIX).

4. Мы уже раньше видѣли, что съ безконечнымъ возрастаніемъ n число $n!$ возрастаетъ быстрѣе, чѣмъ n-ая степень какого угодно произвольно большого числа (§ 48, 2). Въ Валлисовомъ числѣ мы имѣемъ вспомогательное средство для болѣе точнаго опредѣленія характера этого возрастанія *).

Мы исходимъ изъ формулы (§ 128, (9)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n\pi}} = 1.$$

Положивъ

$$\varphi(n) = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi(2n) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}, \qquad (10)$$

*) Элементарный выводъ этого предѣла принадлежитъ J. A. Serret.

находимъ:

$$\frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\,\sqrt{n\pi}},$$

и слѣдовательно,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = 1. \qquad (11)$$

Съ другой стороны,

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Если же взять натуральные логариѳмы, то выйдетъ:

$$\ln \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \left(n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

но по § 123, (7)

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \frac{1}{5n^5} - \frac{1}{6n^6} + \ldots$$

и, слѣдовательно,

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{5n^4} - \frac{1}{6n^5} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{8n^4} + \frac{1}{10n^5} - \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{12n^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\frac{1}{n^3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^4} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)\frac{1}{n^5} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} - \frac{2}{4.6}\frac{1}{n^3} + \frac{3}{5.8}\frac{1}{n^4} - \frac{4}{6.10}\frac{1}{n^5} + \ldots.$$

Члены:

$$\frac{1}{3.4}\frac{1}{n^2},\ \frac{2}{4.6}\frac{1}{n^3},\ \frac{3}{4.8}\frac{1}{n^4},\ \frac{4}{6.10}\frac{1}{n^5},\ \ldots,$$

суть значенія выраженія

$$\frac{\nu-1}{2\nu(\nu+1)}\frac{1}{n^\nu} \quad (\nu = 2, 3, 4, \ldots).$$

Они имѣютъ перемѣнные знаки и убываютъ съ возрастаніемъ числа ν, ибо

$$\frac{\nu-1}{\nu(\nu+1)} - \frac{\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} = \frac{\nu-2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \geqslant 0;$$

поэтому всѣ разности

$$\left(\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}-\frac{2}{4.6}\frac{1}{n^3}\right),\quad\left(\frac{3}{5.8}\frac{1}{n^2}-\frac{4}{6.10}\frac{1}{n^3}\right),$$

а также и всѣ разности

$$\left(\frac{2}{4.6}\frac{1}{n^3}-\frac{3}{5.8}\frac{1}{n^4}\right),\quad\left(\frac{4}{6.10}\frac{1}{n^5}-\frac{5}{7.12}\frac{1}{n^6}\right),\ \ldots$$

суть положительныя числа. Такимъ образомъ, число $\left(1+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ получается изъ единицы путемъ прибавленія, а числа изъ $1+\frac{1}{12n^2}$ путемъ отниманія положительныхъ чиселъ, откуда вытекаетъ, что

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n^2},$$

и, слѣдовательно,

$$1<\ln\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}<1+\frac{1}{12n^2}.$$

Замѣщая n на $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n-1$, находимъ:

$$1<\ln\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)}<1+\frac{1}{12(n+1)^2}<1+\frac{1}{12n^2},$$

$$1<\ln\frac{\varphi(n+2)}{\varphi(n+3)}<1+\frac{1}{12(n+2)^2}<1+\frac{1}{12n^2},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad,$$

$$1<\ln\frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)}<1+\frac{1}{12(2n-1)^2}<1+\frac{1}{12n^2}$$

и, складывая всѣ эти неравенства, получаемъ:

$$n<\ln\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}<n+\frac{1}{12n},$$

откуда, переходя отъ логариѳма къ числу, имѣемъ:

$$1<e^{-n}\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}<e^{\frac{1}{12n}},$$

и, слѣдовательно,

$$\lim_{n=\infty} e^{-n}\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}=1. \qquad (12)$$

Отсюда выводимъ:

$$\lim_{n=\infty}\frac{e^n\varphi(2n)}{\varphi(n)}=\lim_{n=\infty} e^n\varphi(n)\frac{\varphi(2n)}{\varphi(n)^2}=1,$$

поэтому, согласно равенству (11),

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} e^n \varphi(n) = 1,$$

или

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{n!}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} = 1.$$

Такимъ образомъ, при большихъ значеніяхъ n, можно приблизительно считать

$$n! = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}\, e^{-n+(n+\frac{1}{2})\log n}. \qquad (13)$$

5. При неограниченномъ возрастаніи n сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots$$

приближается къ предѣлу 1, поэтому для большихъ значеній числа n изъ равенствъ (8) и (13) получается слѣдующее приближенное значеніе бернулліева числа B_n:

$$B_n = 4 e^{-2n} n^{2n+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}-2n}.$$

Взявъ бригговы логариѳмы по семизначной таблицѣ, получимъ приближенно:

$$\log B_n = 2\log 2 + \tfrac{1}{2}\log\pi + 2n(\log n - \log e - \log\pi) + \tfrac{1}{2}\log n,$$

откуда, при $n = 62$,

$$\log B_{62} = 108.50429.$$

Такимъ образомъ, въ согласіи съ таблицею Адамса, B_{62} есть 109-значное число и первыя три его цифры дѣйствительно образуютъ число 319.

§ 131. Эйлерово доказательство неограниченности комплекса простыхъ чиселъ.

1. Эйлеръ далъ формулу, при помощи которой безконечное произведеніе преобразуется въ безконечный рядъ и которая при дальнѣйшихъ преобразованіяхъ представляетъ большую важность въ Теоріи чиселъ. Эта формула можетъ быть, между прочимъ, примѣнена къ доказательству того положенія, что р я д ъ п р о с т ы х ъ ч и с е л ъ н е о г р а н и ч е н ъ. Хотя данное Эвклидомъ доказательство (§ 16, 3) по своей силѣ и строгости не оставляетъ желать ничего лучшаго, но зато это второе, эйлерово доказательство имѣетъ тѣмъ большую важность, что оно поддается обобщенію и до настоящаго времени представляетъ единственный путь открытія другихъ, болѣе глубокихъ законовъ распредѣленія простыхъ чиселъ, какова, напримѣръ, теорема, по которой въ каждой ариѳметической прогрессіи

$$b,\ a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ 4a+b,\ \ldots,$$

содержится неограниченный рядъ простыхъ чиселъ, когда a и b суть произвольныя взаимно-простыя числа *).

2. Мы исходимъ изъ формулы суммы геометрической прогрессіи

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots \qquad (1)$$

и разумѣемъ подъ p простое число, а подъ s положительный показатель, который больше 1.

Мы примѣняемъ эту формулу къ ряду простыхъ чиселъ $p, p_1, p_2, \dots$ и составляемъ произведеніе

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_2^{-s}} \cdots,$$

перемножая при этомъ ряды въ правыхъ частяхъ по правилу § 116. Положивъ

$$P = (1-p^{-s})(1-p_1^{-s})(1-p_2^{-s}) \cdots, \qquad (2)$$

находимъ:

$$\frac{1}{P} = 1 + \sum^{m} \frac{1}{m^s}, \qquad (3)$$

гдѣ сумма Σ распространяется на всѣ числа m, которыя мы можемъ получить, перемножая между собою любыя цѣлыя неотрицательныя степени простыхъ чиселъ $p, p_1, p_2, \dots,$ входящихъ въ составъ выраженія (2). По § 108, 3 эта сумма сходится абсолютно, когда $s > 1$, и всѣ ея члены содержатся среди членовъ суммы $\sum \frac{1}{n^s}$, распространяющейся на всѣ цѣлыя и положительныя числа n.

3. Если введемъ въ произведеніе P всѣ существующія простыя числа и допустимъ, что ихъ число безконечно велико, то P будетъ представлять собою безконечное произведеніе, которое сходится по § 127, когда $s > 1$.

Равенство (3) еще сохраняется въ этомъ случаѣ, и мы получаемъ:

$$\prod^{p} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \sum^{n} \frac{1}{n^s}, \qquad (4)$$

гдѣ произведеніе, обозначенное знакомъ Π, распространяется на всѣ простыя числа p, а сумма въ правой части—на всѣ положительныя цѣлыя числа n. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно привести слѣдующія простыя соображенія. Сначала распространимъ произведеніе Π только на тѣ простыя числа, которыя меньше нѣкотораго конечнаго числа k. Въ

*) Dirichlet, Abhandlungen der Berliner Akademie 1837, Werke Bd. I, Seite 313

такомъ случаѣ равенство (4) остается вѣрнымъ въ предположеніи, что n проходитъ только черезъ такія цѣлыя значенія, которыя не способны дѣлиться безъ остатка ни на какое простое число, превосходящее число k. Если затѣмъ увеличивать k до безконечности, то оба выраженія будутъ приближаться къ предѣлу, указанному въ равенствѣ (4).

4. Посмотримъ теперь, во что превращаются выраженія (4), когда показатель s приближается къ предѣлу 1.

Обозначая черезъ r положительную правильную дробь, разсмотримъ разность

$$\frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r} = \frac{1}{n^r}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}\right) = \frac{1}{(n+1)^r}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r - 1\right).$$

Развертывая второе и третье изъ этихъ выраженій по формулѣ бинома, мы получимъ неравенства:

$$\frac{r}{(n+1)^{r+1}} < \frac{1}{n^r} - \frac{1}{(n+1)^r} < \frac{r}{n^{r+1}}. \qquad (5)$$

Если теперь положимъ

$$S = 1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{3^{r+1}} + \ldots = \sum \frac{1}{n^{r+1}},$$

и если сложимъ всѣ тѣ неравенства, которыя получаются изъ неравенствъ (5) при $n = 1, 2, 3 \ldots$, то получимъ:

$$1 < rS < 1 + r. \qquad (6)$$

5. Такимъ образомъ, положивъ $r = s - 1$, найдемъ, что

$$\lim_{s=1} (s-1) \sum \frac{1}{n^s} = 1. \qquad (7)$$

Отсюда, на основаніи равенства (4), слѣдуетъ:

$$\lim_{s=1} (s-1) \prod \frac{1}{1 - p^{-s}} = 1.$$

Поэтому, когда s переходитъ въ 1, то произведеніе

$$\prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = s - 1, \qquad (8)$$

т. е. равно нулю. Это, однако, было бы невозможно, если бы число простыхъ чиселъ оказалось конечнымъ. Ибо тогда, при $s = 1$, произведеніе (8) перешло бы въ $\prod(1 - p^{-1})$, т. е. въ произведеніе конечнаго числа множителей, изъ которыхъ каждый не исчезаетъ.

ГЛАВА XXVIII.

Трансцендентность чиселъ e и π.

§ 132. Производныя цѣлой функціи.

1. Въ Ариѳметикѣ различаютъ алгебраическія и трансцендентныя числа. Число ω называется алгебраическимъ, когда оно есть корень уравненія

$$C_0 + C_1\omega + C_2\omega^2 + \ldots + C_n\omega^n = 0, \qquad (1)$$

въ которомъ коэффиціенты $C_0, C_1, \ldots, C_n$ суть раціональныя числа. Можно при этомъ допустить, что числа C_0 и C_n отличны отъ нуля и, сверхъ того, что $C_0, C_1, \ldots, C_n$ суть цѣлыя числа, не имѣющія общаго дѣлителя. Ибо, если эти числа имѣютъ знаменателей, то можно обѣ части уравненія умножить на общаго знаменателя, а если они имѣютъ общаго множителя, то можно на него раздѣлить обѣ части уравненія.

Число, не удовлетворяющее такого рода уравненію, называется трансцендентнымъ.

2. Каждое число можетъ быть разсматриваемо, какъ отношеніе двухъ прямолинейныхъ отрѣзковъ.

Если же, зная одинъ изъ этихъ отрѣзковъ, возможно геометрически построитъ другой, употребляя при построеніи только циркуль и линейку, то это число будетъ алгебраическимъ и притомъ особой природы. Въ самомъ дѣлѣ, оно должно опредѣляться цѣпью квадратныхъ уравненій, такъ какъ съ одной стороны всѣ пересѣченія круговъ съ прямыми опредѣляются квадратными уравненіями, а, съ другой стороны, всякое число которое опредѣляется цѣпью квадратныхъ уравненій, есть корень уравненія вида (1) (§ 96, 7).

Впослѣдствіи будетъ доказано, что числа e и π принадлежатъ къ трансцендентнымъ, а этимъ мы и исчерпаемъ древнюю задачу о квадратурѣ круга, доказавъ, что сторона квадрата, равновеликаго данному

кругу никоимъ образомъ не можетъ быть получена*) изъ діаметра круга путемъ геометрическихъ построеній [1]).

3. Пусть $f(x)$ будетъ произвольная цѣлая функція отъ x степени m съ коэффиціентами $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_1, c_0$, которые пока могутъ оставаться совершенно неопредѣленными:

$$f(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \ldots + c_1 x + c_0. \qquad (2)$$

Если замѣнить перемѣнную x биномомъ $x + h$ и развернуть каждую степень этого бинома, то функцію $f(x+h)$ можно будетъ расположить также по степенямъ h. Коэффиціенты этихъ степеней будутъ цѣлыми функціями отъ x. Имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} c_0 & 1 = 1. \\ c_1 & x + h = x + h, \\ c_2 & (x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2, \\ \cdot & \\ c_{m-1} & (x+h)^{m-1} = x^{m-1} + (m-1)hx^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} h^2 x^{m-3} + \ldots + h^{m-1}, \\ c_m & (x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 x^{m-2} + \ldots + h^m, \end{array} \qquad (3)$$

и, если сложить всѣ эти выраженія, помноживши ихъ предварительно на соотвѣтствующіе коэффиціенты, указанные слѣва отъ вертикальной черты, то получимъ

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x), \qquad (4)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} f(x) &= c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + c_{m-2} x^{m-2} + \ldots + c_0, \\ f'(x) &= mc_m x^{m-1} + (m-1)c_{m-1} x^{m-2} + (m-2)c_{m-2} x^{m-3} + \ldots + c_1, \\ f''(x) &= m(m-1)c_m x^{m-2} + (m-1)(m-2)c_{m-1} x^{m-3} + \ldots + 2.1\, c_2, \qquad (5) \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ f^{(m)}(x) &= m(m-1)(m-2)\ldots 1 . c_m. \end{aligned}$$

Полагая здѣсь $x = 0$, находимъ:

$$f(0) = c_0, \quad f'(0) = c_1, \quad f''(0) = 2!\, c_2, \ldots, f^{(m)}(0) = m!\, c_m. \qquad (6)$$

Функціи $f', f'', f''', \ldots$, степеней $m-1, m-2, m-3, \ldots$, называются соотвѣтственно первой, второй, третьей, и т. д. производной

*) Доказательство трансцендентности числа e было найдено Эрмитомъ (Hermite) въ 1873-мъ, а числа π Линдеманомъ (Lindemann) въ 1882-омъ году.

[1]) совершаемыхъ исключительно при помощи циркуля и линейки.

функціи $f(x)$, и равенство (3) есть частный случай **теоремы Тейлора** (см. ниже § 140).

4. Производныя мы будемъ иногда обозначать буквою D, снабженною индексомъ, такъ

$$D_1 f(x) = f'(x),\quad D_2 f(x) = f''(x),\ \ldots,\ D_\nu f(x) = f^{(\nu)}(x). \qquad (7)$$

Равенствами (4), а также способомъ полученія производныхъ непосредственно доказывается правильность равенствъ

$$D_\nu A f(x) = A D_\nu f(x),\quad D_\nu(f(x) + A) = D_\nu f(x),$$
$$D_\nu(f(x) + \varphi(x)) = D_\nu f(x) + D_\nu \varphi(x),$$

гдѣ A есть постоянная, а $f(x)$ и $\varphi(x)$ суть цѣлыя функціи. Вообще, когда $f_1(x), f_2(x), f_3(x) \ldots$ суть цѣлыя функціи, $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ суть постоянныя, то

$$D_\nu(A + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x) + \ldots) \qquad (8)$$
$$= A_1 D_\nu f_1(x) + A_2 D_\nu f_2(x) + A_3 D_\nu f_3(x) + \ldots.$$

5. Положивъ въ равенствѣ (5) всѣ коэффиціенты c, кромѣ c_m, равными нулю, мы получимъ производныя отъ степени x^m:

$$D_1 x^m = m x^{m-1},\quad D_2 x^m = m(m-1)x^{m-2},$$
$$D_3 x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3},\ \ldots,$$

что мы можемъ вообще выразить такъ:

$$D_\nu x^m = m(m-1)\ldots(m-\nu+1)x^{m-\nu}.$$

Эта формула вѣрна, пока ν не больше m. Если $\nu < m$, то можно также писать

$$D_\nu x^m = \frac{m!}{(m-\nu)!}x^{m-\nu}.$$

Если же $\nu = m$, то

$$D_m x^m = m!$$

и при $\nu > m$

$$D_\nu x^m = 0.$$

§ 133. Свойства показательной функціи.

1. Въ § 117 мы видѣли, что при каждомъ вещественномъ или комплексномъ значеніи x степень e^x можетъ быть выражена суммой:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \ldots$$

Разумѣя подъ ν цѣлое число и помножая обѣ части этого равенства на $\nu!$, мы получаемъ

$$\nu! e^x = \nu! + \frac{\nu!}{1!} x + \frac{\nu!}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\nu!}{(\nu-1)!} x^{\nu-1} + U_\nu, \qquad (1)$$

гдѣ U_n означаетъ сумму безконечнаго числа слагаемыхъ, и такъ какъ

$$\frac{\nu!}{(\nu+1)!} = \frac{1}{\nu+1}, \quad \frac{\nu!}{(\nu+2)!} = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}, \ldots$$

то

$$U_\nu = x^\nu + \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} + \frac{x^{\nu+2}}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{x^{\nu+3}}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \ldots \qquad (2)$$

Принимая во вниманіе § 132, 5, мы можемъ равенство (1) представить и въ такой формѣ:

$$\nu! e^x = D_\nu x^\nu + D_{\nu-1} x^\nu + \ldots + D_1 x^\nu + U_\nu,$$

или короче:

$$\nu! e^x = \sum_{s=1}^{\nu} D_s x^\nu + U_\nu.$$

Въ суммѣ Σ индексъ s измѣняется отъ 1 до ν. Но если m есть какое либо цѣлое число, которое больше ν, то производныя $D_{\nu+1} x^\nu$, $D_{\nu+2} x^\nu, \ldots, D_m x^\nu$ равны нулю и мы можемъ прибавить всѣ эти члены, такъ что

$$\nu! e^x = \sum_{s=1}^{m} D_s x^\nu + U_\nu. \qquad (3)$$

2. Напишемъ теперь всѣ тѣ равенства, которыя получаются изъ равенства (3) при $\nu = 1, 2, \ldots, m$, помножимъ ихъ по порядку на неопредѣленные множители $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ и сложимъ. Тогда получимъ:

$$\begin{aligned} & e^x (\gamma_1 1! + \gamma_2 2! + \gamma_3 3! + \ldots + \gamma_m m!) \\ = & \sum_{s=1}^{m} D_s (\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_m x^m) \qquad (4) \\ & + \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \ldots + \gamma_m U_m. \end{aligned}$$

Если положимъ еще

$$\varphi(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_m x^m,$$

то $\varphi(x)$ будетъ произвольная цѣлая функція, подчиненная только тому ограниченію, что $\varphi(0) = 0$.

Если затѣмъ положить

$$\varphi'(x) + \varphi''(x) + \varphi'''(x) + \ldots + \varphi^{(m)}(x) = \Phi(x), \quad (5)$$

то

$$\Phi(0) = \gamma_1 + \gamma_2 2! + \gamma_3 3! + \ldots + \gamma_m m,$$

и если, наконецъ, положимъ еще

$$U(x) = \gamma_1 U_1 + \gamma_2 U_2 + \ldots + \gamma_m U_m,$$

то равенство (4) можно будетъ представить такъ:

$$e^x \Phi(0) = \Phi(x) + U(x). \quad (6)$$

3. Въ послѣднемъ равенствѣ, составляющемъ фундаментъ всего дальнѣйшаго, $\Phi(0)$ не зависитъ отъ x, $\Phi(x)$ есть цѣлая функція отъ x степени $m-1$, а U есть функція отъ x, выраженная безконечнымъ рядомъ.

Для абсолютнаго значенія $|U|$ этой функціи мы можемъ указать верхнюю границу, основываясь на томъ положеніи, что абсолютное значеніе суммы никогда не бываетъ больше суммы абсолютныхъ значеній слагаемыхъ.

Именно, для каждаго положительнаго ν

$$\frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} < \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} < \frac{1}{3!}, \ldots,$$

и если мы означимъ черезъ r абсолютную величину x, то есть, положимъ

$$|x| = r,$$

то изъ равенства (2) будетъ слѣдовать, что

$$|U_\nu| < r^\nu \left(1 + \frac{r}{1!} + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots\right),$$

поэтому

$$|U_\nu| < r^\nu e^r.$$

Если же мы обозначимъ черезъ

$$c_1, c_2, \ldots, c_m$$

абсолютныя значенія чиселъ

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m,$$

то изъ опредѣленія функціи $U(x)$ будетъ слѣдовать, что

$$|U(x)| < (c_1 r + c_2 r_2 + \ldots + c_m r^m) e^r,$$

или, полагая

$$F(r) = c_1 r + c_2 r^2 + \ldots + c_m r^m, \quad (7)$$

имѣемъ:

$$|U(x)| < F(r) e^r. \quad (8)$$

Здѣсь $F(r)$ получается изъ $\varphi(x)$ замѣною перемѣнной x и коэффиціентовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ ихъ абсолютными значеніями $r, c_1, c_2, \ldots, c_m$.

§ 134. Трансцендентность числа e.

1. Теперь, чтобы доказать трансцендентность числа e, мы изберемъ слѣдующій косвенный путь. Допустимъ, что e есть корень алгебраическаго уравненія n-ой степени,

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \ldots + C_n e^n = 0, \tag{1}$$

въ которомъ коэффиціентсы $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ суть цѣлыя числа, изъ коихъ первое C_0 и послѣднее C_n отличны отъ нуля. Если бы мы допустили, что $C_0 = 0$, то слѣдовало бы только раздѣлить обѣ части равенства на нѣкоторую степень числа e, чтобы получить такого же вида равенство, въ которомъ членъ, независящій отъ e, былъ бы отличенъ отъ нуля.

2. Полагая въ основномъ равенствѣ (§ 133 (6)) $x = 1, 2, \ldots, n$ мы получаемъ:

$$e\Phi(0) = \Phi(1) + U(1),$$
$$e^2\Phi(0) = \Phi(2) + U(2),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$e^n\Phi(0) = \Phi(n) + U(n).$$

Помноживъ эти равенства соотвѣтственно на $C_1, C_2, \ldots, C_n$, складывая полученныя такимъ образомъ равенства и прибавляя къ обѣимъ частямъ полученнаго результата по $C_0\Phi(0)$, найдемъ, въ виду равенства (1):

$$\begin{aligned} C_0\Phi(0) + C_1\Phi(1) + C_2\Phi(2) + \ldots + C_n\Phi(n) \\ + C_1 U(1) + C_2 U(2) + \ldots + C_n U(n) \\ (C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \ldots + C_n e^n)\,\Phi(0) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

что можно написать короче такъ:

$$\sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \Phi(\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu U(\nu) = 0, \tag{3}$$

и здѣсь по § 133, (5)

$$\Phi(\nu) = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi^{(\mu)}(\nu), \tag{4}$$

при чемъ $\varphi(x)$ есть цѣлая функція, удовлетворяющая условію $\varphi(0) = 0$, но произвольная во всемъ остальномъ, а $\varphi^{(\mu)}(x)$ есть μ-ая производная отъ функціи $\varphi(x)$.

3. Если теперь мы будемъ въ состоянiи доказать, что при нѣкоторомъ выборѣ пока еще совершенно произвольныхъ коэффицiентовъ γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_m$, или, что то же, произвольной функцiи $\varphi(x)$, равенство (3) невозможно, то отсюда будетъ слѣдовать, что допущенiе равенства вида (1) непрiемлемо и, слѣдовательно, e есть трансцендентное число.

Но это будетъ доказано, если мы сможемъ распорядиться функцiей $\varphi(x)$ такимъ образомъ, чтобы

1) первая сумма $\Sigma C_\nu \Phi(\nu)$ была цѣлымъ неисчезающимъ числомъ, имѣющимъ, слѣдовательно, абсолютную величину, которая по меньшей мѣрѣ равна 1, между тѣмъ какъ

2) вторая сумма $\Sigma C_\nu U(\nu)$ по абсолютной величинѣ была бы меньше 1-цы, ибо тогда сумма этихъ двухъ суммъ не можетъ быть нулемъ.

4. По § 16, 3 существуютъ простыя числа, которыя больше произвольнаго напередъ заданнаго числа. Можно поэтому взять простое число p, превосходящее число n, и положить

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-n)^p}{(p-1)!},$$

чѣмъ условiе $\varphi(0) = 0$ будетъ удовлетворено.

Степень m этой функцiи равна $np + p - 1$. Мы будемъ себѣ представлять эту функцiю расположенною по возрастающимъ степенямъ x или по возрастающимъ степенямъ одной изъ разностей $x-1$, $x-2, \ldots$, $(x-n)$. При этомъ получаются слѣдующiя разложенiя:

$$\begin{aligned}(p-1)!\,\varphi(x) &= x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-n)^p \\ &= a_{p-1}x^{p-1} + a_p x^p + \ldots + a_m x^m \\ &= b_p(x-\nu)^p + b_{p+1}(x-\nu)^{p+1} + \ldots + b_m(x-\nu)^m, \\ &\qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n).\end{aligned} \tag{5}$$

Низшихъ степеней x или $x-\nu$ здѣсь нѣтъ, такъ какъ функiя $\varphi(x)$ дѣлится безъ остатка на x^{p-1}, а также на $(x-1)^p, \ldots, (x-n)^p$. Числа a_{p-1}, $a_p, \ldots, a_m$, b_p, $b_{p+1}, \ldots, b_m$ суть цѣлыя числа.

5. Изъ соотношенiй (5) дѣленiемъ на x^{p-1} выводится:

$$(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-n)^p = a_{p-1} + a_p x + \ldots + a_m x^{m-p+1},$$

и, полагая въ этомъ тождествѣ $x = 0$, находимъ

$$a_{p-1} = \pm 1^p . 2^p \ldots n^p = \pm (n!)^p.$$

Это есть цѣлое число, не дѣлящееся на p безъ остатка, ибо простое число p, превосходящее число n, не есть дѣлитель какого либо изъ чиселъ $1, 2, \ldots, n$.

Далѣе, такъ какъ низшій членъ функціи $\varphi(x)$ содержитъ $(p-1)$-ую степень числа x, то

$$\gamma_1 = 0, \ldots \gamma_{p-2} = 0,$$

$$\gamma_{p-1} = \frac{a_{p-1}}{(p-1)!}, \quad \gamma_p = \frac{a_p}{(p-1)!}, \ldots, \gamma_m = \frac{a_m}{(p-1)!},$$

а потому, составивъ производныя отъ функціи $\varphi(x)$ при $x = 0$, находимъ по § 132, (6):

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0, \ldots, \varphi^{(p-2)}(0) = 0.$$

$$\varphi^{(p-1)}(0) = a_{p-1},$$

$$\varphi^{(p)}(0) = \frac{p!\,a_p}{(p-1)!} = pa_p,$$

$$\varphi^{(p+1)}(0) = p(p+1)\,a_{p+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi^{(m)}(0) = p(p+1)\ldots ma_m.$$

Такимъ образомъ производныя $\varphi^{(\mu)}(0)$ суть цѣлыя числа; $\varphi^{(p-1)}(0)$ не дѣлится безъ остатка на p, а всѣ прочія числа $\varphi^{(\mu)}(0)$ либо равны нулю, либо дѣлятся на p безъ остатка, а потому и сумма $\Phi(0) = \Sigma\varphi^{(\mu)}(0)$ есть цѣлое число, которое не дѣлится безъ остатка на p.

6. Положивъ въ равенствѣ § 132, (4):

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \ldots + \frac{h^m}{m!}\varphi^{(m)}(x)$$

$x = \nu$, $h = x - \nu$, находимъ:

$$\varphi(x) = \varphi(\nu) + (x-\nu)\,\varphi'(\nu) + \frac{(x-\nu)^2}{2!}\varphi''(\nu) + \ldots + \frac{(x-\nu)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\nu);$$

изъ третьяго же способа изображенія функціи $\varphi(x)$, указываемаго соотношеніями (5), слѣдуетъ, что при $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$\varphi(\nu) = 0, \quad \varphi'(\nu) = 0, \ldots, \varphi^{(p-1)}(\nu) = 0,$$

$$\varphi^{(p)}(\nu) = pb_p,$$

$$\varphi^{(p+1)}(\nu) = p(p+1)b_{p+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi^{(m)}(\nu) = p(p+1)\ldots mb_m,$$

поэтому каждое изъ чиселъ $\varphi^{(\mu)}(\nu)$ есть цѣлое число, которое либо равно нулю, либо дѣлится на p безъ остатка.

Такимъ образомъ и каждая изъ суммъ

$$\Phi(1),\ \Phi(2),\ \ldots,\ \Phi(\nu)$$

есть цѣлое число, дѣлящееся на p безъ остатка.

7. Отсюда слѣдуетъ, что и сумма

$$\sum_{\nu=0}^{m} C_\nu \Phi(\nu) = C_0\Phi(0) + C_1\Phi(1) + C_2\Phi(2) + \ldots + C_m\Phi(m)$$

есть цѣлое число, и если мы возьмемъ число p столь большимъ, чтобы число C_0 (отличное отъ нуля) не было кратнымъ числа p, то и эта сумма не будетъ дѣлиться на p безъ остатка и будетъ поэтому отлична отъ нуля.

Это, по п. 3, составляетъ первую часть доказательства, которое мы проводимъ.

8. Вторую часть, относящуюся къ характеру функціи U, можно теперь вести весьма просто на основаніи неравенства § 133 (8). Здѣсь нужно прежде всего составить функцію $F(r)$, которая получается изъ функціи $\varphi(x)$ замѣной чиселъ $x, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ ихъ абсолютными значеніями $r, c_0, c_1, \ldots, c_m$.

Если функцію

$$x^k - \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} - \ldots$$

члены которой имѣютъ перемѣнныя знаки, умножить на $x - \beta$, то получимъ функцію

$$x^{k+1} - (\alpha_1 + \beta)x^k + (\alpha_2 + \beta)x^{k-1} - \ldots,$$

съ перемѣнными же знаками. Если же сдѣлать одинаковыми всѣ знаки въ обоихъ множителяхъ, то есть, помножить

$$x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \alpha_2 x^{k-2} + \ldots \text{ на } x + \beta$$

то полученное произведеніе

$$x^{k+1} + (\alpha_1 + \beta)x^k + (\alpha_2 + \beta)x^{k+1} + \ldots,$$

выведется изъ перваго, когда въ немъ сдѣлаемъ знаки всѣхъ членовъ одинаковыми.

9. Изъ повторнаго примѣненія этого простого положенія слѣдуетъ, что въ вычисленномъ и расположенномъ произведеніи

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-2}(x-1)^p(x-2)^p \ldots (x-n)^p}{(p-1)!}$$

члены имѣютъ перемѣнныя знаки и что это произведеніе переходитъ въ произведеніе

$$F(x) = \frac{x^{p-1}(x+1)^p(x+2)^p \ldots (x-n)^p}{(p-1)!},$$

если приписать всѣмъ коэффиціентамъ положительные знаки, другими словами, произведеніе

$$F(r) = \frac{r^{p-1}(r+1)^p(r+2)^p \ldots (r+n)^p}{(p-1)!}$$

и представляетъ собою искомую функцію, такъ что

$$|U(x)| < F(r)e^r \qquad (6)$$

10. Если положимъ для краткости

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n) = \rho_\nu,$$

то, согласно неравенству (6), будетъ

$$|U(\nu)| < \frac{\rho_\nu^p}{\nu(p-1)!}e^r.$$

Такъ какъ рядъ, въ который разлагается функція e^x, сходится при всѣхъ значеніяхъ x, то его общій членъ $x^m : m!$ при неограниченномъ возрастаніи m имѣетъ предѣлъ нуль при всякомъ x (ср. также § 48, 2). Можно поэтому взять простое число p столь большимъ, чтобы дробь

$$\frac{\rho_\nu^{p-1}}{(p-1)!}$$

стала произвольно малой, а такъ какъ $e^r\rho_\nu : \nu$ есть конечное число, то $|U(\nu)|$, а потому и абсолютная суммы $\Sigma C_\nu U(\nu)$ можетъ быть сдѣлана меньше всякаго напередъ заданнаго числа и, въ частности, меньше 1.

Въ этомъ по п. 3 состоитъ вторая часть доказательства; такимъ образомъ доказано положеніе:

Число e есть трансцендентное число.

§ 135. Трансцендентность числа π.

1. На такихъ же основаніяхъ покоится доказательство трансцендентности числа π, а именно оно опирается на соотношеніе между числами e и π, выражаемымъ равенствомъ (§ 118, (12))

$$1 + e^{i\pi} = 0. \qquad (1)$$

Если π есть алгебраическое число, то и $i\pi$ есть алгебраическое число. Дѣйствительно, если $\xi(\pi) = 0$ есть раціональное уравненіе, которому удовлетворяетъ число π, то и $\xi(\pi)\,\xi(-\pi) = 0$. Теперь, если $y = i\pi$,

то $\xi(iy)\,\xi(-iy) = \psi(y) = 0$ и коэффиціенты функціи $\psi(y)$ суть вещественныя раціональныя числа.

2. Пусть ψ будетъ функція ν-ой степени и

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_\nu \tag{2}$$

пусть будутъ ея корнями. Среди нихъ имѣется, слѣдовательно, число πi. Сообразно съ этимъ, а также въ виду равенства (1) будетъ

$$(1+e^{y_1})\,(1+e^{y_2})\,(1+e^{y_3})\ldots(1+e^{y_\nu}) = 0,$$

или, по перемноженіи:

$$1 + \Sigma e^{y_i} + \Sigma e^{y_i+y_k} + \Sigma e^{y_i+y_k+y_l} + \ldots = 0, \tag{3}$$

при чемъ первая сумма Σe^{y_i} распространяется на всѣ корни (2), вторая $\Sigma e^{y_i+y_k}$ — на всѣ сочетанія $y_i + y_k$ (безъ повтореній), третья $\Sigma e^{y_i+y_k+y_l}$ — на всѣ сочетанія по три и т. д.

3. Симметрическія функціи ν величинъ y_i по нашимъ допущеніямъ суть раціональныя числа (цѣлыя или дробныя), а ν величинъ y_ν удовлетворяютъ уравненію $\psi(x) = 0$.

Симметрическія функціи $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ величинъ $y_i + y_k$ (напримѣръ, сумма ихъ одинаковыхъ степеней), будучи также симметрическими функціями величинъ y_i, суть раціональныя числа, и суммы $y_1 + y_2$ также суть корни нѣкотораго раціональнаго уравненія $\psi_1(x) = 0$.

То же относится и къ суммамъ $y_i + y_k + y_l$, число которыхъ равно $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)(\nu-2)$ и которыя также суть корни нѣкораго уравненія $\psi_2(x) = 0$ и т. д.

Произведеніе

$$\psi(x)\,\psi_1(x)\,\psi_2(x)\ldots \tag{4}$$

будетъ поэтому цѣлой функціей, которая будетъ уничтожаться, когда положимъ въ ней x равнымъ одному изъ чиселъ

$$y_i,\quad y_i + y_k,\quad y_i + y_k + y_l,\ \ldots. \tag{5}$$

4. Между этими числами нуль можетъ содержаться одинъ или нѣсколько разъ. Если допустимъ, что нуль содержится между ними $C-1$ разъ, то C есть положительное цѣлое число, которое по меньшей мѣрѣ равно 1. Оно равно 1 только въ томъ случаѣ, когда среди величинъ (5) нѣтъ нуля.

Въ произведеніи (4) содержатся $C-1$ множителей, равныхъ x. Исключивъ эти множители и обративъ затѣмъ всѣ коэффиціенты въ цѣлыя числа помноженіемъ на наименьшее кратное N всѣхъ знаменателей, мы получимъ функцію съ цѣлыми коэффиціентами:

$$\chi(x) = N x^{1-C}\,\psi(x)\,\psi_1(x)\,\psi_2(x)\ldots,$$

степень которой означимъ черезъ n. Ея корни

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n \tag{6}$$

соотвѣтственно равны тѣмъ изъ чиселъ (5), которыя отличны отъ нуля, и, согласно равенству (3), эти корни удовлетворяютъ уравненію

$$C + e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} + \ldots + e^{x_n} = 0. \tag{7}$$

Такъ какъ между корнями (6) нѣтъ нуля, то $\chi(0)$ отлично отъ нуля.

Для насъ безразлично, встрѣчается-ли одно и то же число нѣсколько разъ между величинами (6); число πi имѣется между ними во всякомъ случаѣ.

5. Теперь мы возвращаемся къ равенству § 133, (6):

$$e^x \Phi(0) = \Phi(x) + U(x), \tag{8}$$

полагаемъ въ немъ $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ складываемъ и прибавляемъ къ обѣимъ число частямъ $C\Phi(0)$. Тогда мы, въ силу равенства (7), получаемъ

$$\begin{aligned} &C\Phi(0) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \ldots + \Phi(x_n) \\ &+ U(x_1) + U(x_2) + \ldots + U(x_n) \\ &= \Phi(0)(C + e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_n}) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

и основная идея доказательства будетъ та же самая, какъ и въ доказательствѣ трансцендентности числа e. Мы доказываемъ, что функціей $\varphi(x)$ можно такъ распорядиться, что

1) $C\Phi(0) + \sum_{r=1}^{n} \Phi(x_r)$ станетъ не исчезающимъ цѣлымъ числомъ

2) $\sum_{r=1}^{n} U(x_r)$ по абсолютной величинѣ будетъ меньше 1.

Тогда равенство (9) окажется невозможнымъ, и допущеніе, будто e есть алгебраическое число, будетъ опровергнуто.

6. Функція $\chi(x)$ имѣетъ видъ

$$\chi(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

при чемъ коэффиціенты $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть цѣлыя числа, числа a и a_n отличны отъ нуля, а коэффиціентъ a можно считать положительнымъ. Помножая на a^{n-1} и полагая

$$ax = z,\ \ a_1 = b_1,\ \ aa_2 = b_2,\ \ a^2 a_3 = b_3,\ \ldots,\ a^{n-1} a_n = b_n,$$

мы получаемъ функцію

$$a^{n-1}\chi(x) = \theta(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n+2} + \ldots + b_n, \tag{10}$$

съ цѣлыми коффиціентами, которой корни

$$z_1,\ z_2,\ z_3, \ldots, z_n \tag{11}$$

соотвѣтственно равны произведеніямъ

$$ax_1,\ ax_2,\ ax_3, \ldots, ax_n. \tag{12}$$

7. Что касается функціи $\varphi(x)$, которая служитъ для составленія функціи $\Phi(x)$, то мы опредѣлимъ ее такъ:

$$\varphi(x) = \frac{z^{p-1}(\theta(z))^p}{(p-1)!} = \frac{a^{np-1}x^{p-1}(\chi(x))^p}{(p-1)!}, \tag{13}$$

гдѣ p есть достаточно большое простое число.

Пусть, по разложеніи по степенямъ z, будетъ

$$\begin{aligned}(\theta(z))^p &= A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots \\ &= A_0 + A_1 ax + A_2 a^2 x^2 + \ldots,\end{aligned}$$

гдѣ A_0, A_1, A_2 суть цѣлыя числа. Полагая $z = 0$, находимъ

$$A_0 = b_n^p.$$

Такимъ образомъ число A_0 отлично отъ нуля. Далѣе,

$$(p-1)!\,\varphi(x) = A_0 a^{p-1} x^{p-1} + A_1 a^p x^p + A_2 a^{p+1} x^{p+1} + \ldots,$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= 0, \quad \varphi''(0), \ldots, \varphi^{(p-2)}(0) = 0, \\ \varphi^{(p-1)}(0) &= A_0 a^{p-1} = b_n^p a^{p-1}, \\ \varphi^{(p)}(0) &= pA_1 a^p, \\ \varphi^{(p+1)}(0) &= p(p+1)A_2 a^{p+1}, \\ &\ldots\ldots\end{aligned}$$

8. Если поэтому приписать p значеніе, большее наибольшаго изъ двухъ чиселъ a, b_n, то число $\varphi^{(p-1)}(0)$ не будетъ кратнымъ числа p, между тѣмъ какъ каждое изъ остальныхъ чиселъ $\varphi^{(\nu)}(0)$ либо будетъ равно нулю, либо будетъ дѣлиться на p безъ остатка. Слѣдовательно,

$$\Phi(0) = \sum_{\nu=1}^{m} \varphi^{(\nu)}(0)$$

есть цѣлое число, не дѣлящееся на p безъ остатка.

9. По § 61, 3,

$$\frac{\theta(z)}{z - z_1} = z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + q_2 z^{n-3} + \ldots,$$

при чемъ коэффиціенты

$$q_1 = z_1 + b_1,$$
$$q_2 = z_1^2 + b_1 z_1 + b_2,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

суть цѣлыя функціи отъ z_1 съ цѣлыми коэффиціентами. Взявъ теперь p-ую степень отъ $\theta(z)$, помноживъ ее на

$$z^{p-1} = (z_1 + (z - z_1))^{p-1}$$

и расположивъ произведеніе по возрастающимъ степенямъ разности $z - z_1$, находимъ:

$$(p-1)!\,\varphi(x) = (z - z_1)^p B_1(z_1) + (z - z_1)^{p+1} B_2(z_1) + \dots$$
$$= a^p (x - x_1)^p B_1(z_1) + a^{p+1}(x - x_1)^{p+1} B_2(z_1) + \dots,$$

гдѣ коэффиціенты суть цѣлыя функціи отъ z_1 съ цѣлыми коэффиціентами, напримѣръ,

$$B_1(z_1) = \beta_1^{(0)} + \beta_1^{(1)} z_1 + \beta_1^{(2)} z_1^2 + \dots,$$
$$B_2(z_1) = \beta_2^{(0)} + \beta_2^{(1)} z_1 + \beta_2^{(2)} z_1^2 + \dots.$$

Отсюда, какъ и выше, выводимъ:

$$\varphi'(x_1) = 0, \quad \varphi''(x_1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(p-1)}(x_1) = 0,$$
$$\varphi^{(p)}(x_1) = p a^p B_1(z_1),$$
$$\varphi^{(p+1)}(x_1) = p(p+1) a^{p+1} B_2(z_1),$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot,$$

и, слѣдовательно, положивъ

$$Q(z_1) = a^p B_1(z_1) + (p+1) a^{p+1} B_2(z_1) + \dots,$$

имѣемъ

$$\Phi(x_1) = \sum_{r=1}^{m} \varphi^{(r)}(x_1) = pQ(z_1), \tag{14}$$

гдѣ

$$Q(z_1) = Q_0 + Q_1 z_1 + Q_2 z_1^2 + Q_3 z_1^3 + \dots$$

есть цѣлая функція отъ z_1, коэффиціенты которой суть цѣлыя числа.

Эти равенства не нарушаются, если замѣнить въ нихъ x_1, z_1 на x_2, z_2; ...; x_n, z_n.

Сложивъ теперь всѣ тѣ равенства, которыя выводятся изъ равенства (14) путемъ такихъ замѣщеній, найдемъ, что

$$\sum_{r=1}^{n} Q(z_r) = Q_0 + Q_1 s_1 + Q_2 s_2 + Q_3 s_3 + \dots,$$

гдѣ $s_1 = \Sigma\zeta_\nu$, $s_2 = \Sigma\zeta_\nu^2$, $s_3 = \Sigma\zeta_\nu^3, \ldots$ суть суммы одинаковыхъ степеней чиселъ ζ. Но эти суммы опредѣляются по формуламъ Ньютона:

$$
\begin{aligned}
&s_1 + b_1 = 0,\\
&s_2 + s_1 b_1 + 2b_2 = 0,\\
&s_3 + s_2 b_1 + s_1 b_2 + 3b_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

и, слѣдовательно, представляютъ собою цѣлыя числа. Отсюда вытекаетъ:

10. Сумма

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi(x_\nu) = p \sum_{\nu=1}^{n} Q(\zeta_\nu)$$

есть цѣлое число, дѣлящееся на p безъ остатка.

Поэтому, если взять число p большимъ, чѣмъ (отличное отъ нуля) число C, то изъ п. 8 и п. 10 будетъ слѣдовать:

11. Сумма

$$C\Phi(0) + \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \ldots + \Phi(x_n)$$

есть цѣлое число, не дѣлящееся на p безъ остатка, и потому ея абсолютная величина по меньшей мѣрѣ равна 1.

Этимъ, по п. 5, оправдана первая часть доказательства.

12. Чтобы исчерпать и вторую часть, мы должны разсмотрѣть функцію $F(r)$, которую получимъ, когда въ функціи $\varphi(x)$, расположенной по степенямъ x, замѣнимъ перемѣнную x и коэффиціенты ея степеней ихъ абсолютными значеніями.

Полагаемъ для этой цѣли

$$\chi(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

и, на основаніи равенства (13), находимъ для $\varphi(x)$ выраженіе:

$$(p-1)!\,\varphi(x) = a^{np+p-1} x^{p-1} (x - x_1)^p (x - x_2)^p \ldots (x - x_n)^p.$$

Коэффиціенты этого выраженія получаются путемъ сложенія и перемноженія величинъ:

$$a, \ -x_1, \ -x_2, \ \ldots, \ -x_n,$$

и, согласно § 47, 5, 6, абсолютныя величины этихъ коэффиціентовъ будутъ меньше (и во всякомъ случаѣ не больше), чѣмъ тѣ числа, которыя мы получимъ, замѣщая величины $a, -x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ ихъ абсолютными значеніями

$$a, \ r_1, \ r_2, \ \ldots, \ r_n,$$

то есть, не больше чѣмъ коэффиціенты функціи

$$a^{np+p-1}x^{p-1}(x+r_1)^p(x+r_2)^p\ldots(x+r_n)^p.$$

Положивъ поэтому

$$\rho(r)=a^{n+1}r(r+r_1)(r+r_2)\ldots(r+r_n)^p,$$

найдемъ, что, при всякомъ положительномъ r, число

$$F(r)<\frac{(\rho(r))^p}{ar(p-1)!},$$

и его можно сдѣлать сколь угодно малымъ, достаточно увеличивая число p.

Такимъ образомъ, по § 142, (8), абсолютное значеніе числа $U(x_\nu)$, а вмѣстѣ съ нимъ и абсолютное значеніе суммы $\sum_{1}^{m} U(x_\nu)$ можетъ быть сдѣлано меньше всякаго напередъ заданнаго числа и, въ частности, меньше 1. Этимъ исчерпывается и второе требованіе п. 5, чѣмъ вполнѣ оправдано положеніе:

Число π есть трансцендентное число.

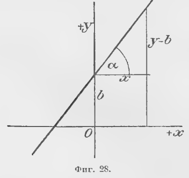
ГЛАВА XXIX.

Функціи, дифференціалы и интегралы

§ 136. Геометрическое представленіе функцій.

1. Выше (§ 93) мы пользовались уже координатами для того, чтобы сдѣлать наглядною зависимость между цѣлою функціей и ея независимой перемѣнной. Такъ какъ главная цѣль всѣхъ примѣненій математики къ явленіямъ внѣшняго міра состоитъ въ познаніи зависимости между измѣряемой величиной и другой, способной принимать различныя значенія и представляющей поэтому перемѣнную величину, то изображеніе функцій при помощи кривыхъ является незамѣнимымъ вспомогательнымъ средствомъ, при помощи котораго удается однимъ взглядомъ охватить въ извѣстной мѣрѣ ходъ явленія или вообще взаимную зависимость перемѣнныхъ величинъ.

Наблюдательныя естественныя науки, статистика и другія дисциплины уже издавна пользуются этимъ вспомогательнымъ графическимъ способомъ для того, чтобы и въ тѣхъ случаяхъ, когда законъ зависимости не вполнѣ извѣстенъ, изобразить ее при посредствѣ кривыхъ, получаемыхъ помощью измѣреній а также и прямой регистраціей, для которой фотографія является превосходнымъ вспомогательнымъ средствомъ.



Фиг. 28.

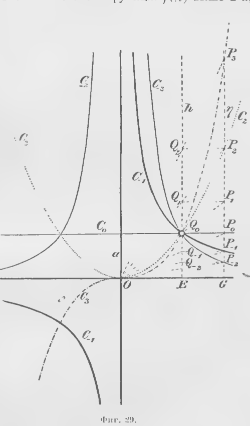
2. Здѣсь мы прежде всего займется геометрическимъ представленіемъ составленныхъ по нѣкоторымъ законамъ простыхъ функцій, съ которыми мы уже познакомились въ предыдущихъ главахъ.

Цѣлая функція первой степени или линейная функція представляется прямою линіею. Это подробнѣе разъясняется въ Аналитической геометріи, но также непосредственно усматривается на фигурѣ 28, изъ которой выводится уравненіе

$$\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \alpha .$$

обращающееся въ уравненіе (1) при помощи подстановки $a = \operatorname{tg} \alpha$. Отрѣзокъ b на оси y-въ считается отрицательнымъ, когда ось y-въ пересѣкается прямою ниже нулевой точки. Подобнымъ же образомъ, уголъ α считается отрицательнымъ, когда прямая образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси x-въ тупой или отрицательный острый уголь.

3. Цѣлая функція 2-й степени $y = f(x)$, какъ мы это уже раньше видѣли, представляется параболой. Если степень функціи $f(x)$ выше 2-й, то каждому значенію абсциссы x все еще соотвѣтствуетъ одно опредѣленное значеніе ординаты y. Эти кривые называются параболами высшихъ порядковъ. Если, напримѣръ, $y = ax^n$, то кривыя C_n (фигура 29), соотвѣтствующія $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ могутъ быть получаемы послѣдовательно одна изъ другой по слѣдующему рекуррентному способу. Отложивъ на оси x-въ отъ начала координатъ отрѣзки $OE = 1$ и $OG = x$, возставимъ къ ней въ точкахъ E и G перпендикуляры b и η, нанесемъ на b отрѣзокъ $EQ = a$, сообразуясь при этомъ со знакомъ числа a, который на фигурѣ 29 взятъ положительнымъ. Проведемъ прямую OQ_0 до встрѣчи съ прямою η въ точкѣ P_1, черезъ которую проведемъ прямую $P_1Q_1 \perp b$; проведемъ прямую OQ_1 до встрѣчи съ прямой η въ точки P_2, черезъ которую проведемъ прямую $P_2Q_2 \perp b$; проведемъ прямую OQ_2 до встрѣчи съ прямою η въ точкѣ P_3, черезъ которую проведемъ прямую $P_3Q_3 \perp b$ и т. д. Идя отъ точки P_1 въ обратную сторону, проводимъ прямую $Q_0P_0 \perp \eta$; беремъ точку пересѣченія Q_{-1} прямыхъ OP_0 и b и черезъ нее проводимъ прямую $Q_{-1}P_{-1} \perp \eta$; беремъ точку пересѣченія Q_{-2} прямыхъ OP_{-1} и b и черезъ нее проводимъ прямую $Q_{-2}P_{-2} \perp \eta$ и т. д. Тогда всѣ точки неограниченнаго съ двухъ сторонъ ряда точекъ



Фиг. 29.

$$\ldots P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$$

получаются послѣдовательно по одному и тому же закону, и мы утвер-

ждаемъ, что P_n есть точка кривой C_n, соотвѣтствующая абсциссѣ x. Ибо, если y_ν есть ордината точки P_ν, гдѣ ν можетъ быть цѣлымъ положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, а также и нулемъ, то изъ подобія треугольниковъ OGP_ν и $OEQ_{\nu-1}$ вытекаетъ, что $y_\nu : y_{\nu-1} = x : 1$, поэтому $y_\nu = xy_{\nu-1}$. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$y_\nu = xy_{\nu-1} = x^2 y_{\nu-2} = \ldots = x^n y_{\nu-n},$$

и 1) при $\nu = n$:

$$y_n = x^n y_0 = x_n a,$$

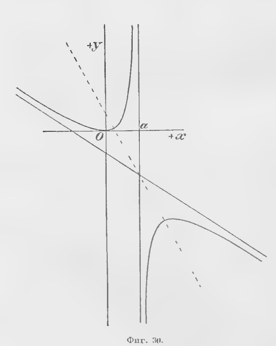
2) при $\nu = 0$

$$y_0 = x^n y_{-n}, \quad y_{-n} = y_0 x^{-n} = ax^{-n},$$

что и требовалось доказать.

4. Въ видѣ примѣровъ дробныхъ раціональныхъ функцій, разсмотримъ двѣ функціи

$$y = \frac{cx^2}{a-x}, \quad y = \frac{1}{1-x^2}.$$



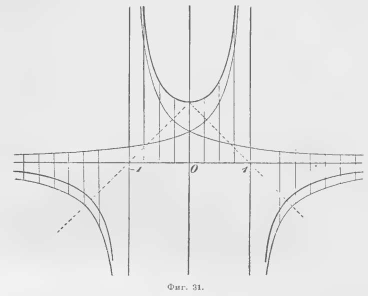
Фиг. 30.

Первая функція y остается положительною при $x < a$, отрицательною при $x > a$. При $x = 0$, будетъ также $y = 0$ и функція y здѣсь имѣетъ minimum, потому что она не переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, а возвращается отъ нуля къ положительнымъ же значеніямъ. При $x = a$ и при $x = \pm\infty$ функція y становится безконечной. (Фигура 30. Кривая есть гипербола).

Во второмъ случаѣ функція y будетъ положительной, когда величина x содержится между -1 и $+1$, и обращается въ безконечность для обоихъ этихъ предѣльныхъ значеній x. При $x > 1$ или < -1, функція y остается отрицательною и исчезаетъ при безконечномъ значеніи x. Полагая

$$y_1 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-x}, \quad y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x},$$

получаемъ: $y = y_1 + y_2$. Ординатамъ y_1, y_2 соотвѣтствуютъ двѣ равностороннія гиперболы. Ордината y, соотвѣтствующая разсматриваемой кривой будетъ получаться сложеніемъ ординатъ y_1 и y_2, какъ показываетъ фигура 31.

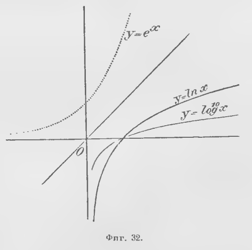


Фиг. 31.

5. Въ § 117 мы познакомились съ показательной функціей

$$y = e^x. \tag{2}$$

Функція y имѣетъ только положительныя значенія и постоянно возрастаетъ вмѣстѣ съ x; она становится безконечно малой при $x = -\infty$ и безконечно большой при $x = +\infty$; далѣе, $y = 1$ при $x = 0$ и $y = e$ при $x = 1$. Пунктирная линія фигуры 32 показываетъ ходъ кривой.



Фиг. 32.

Кривая $y = a^x = e^{x \ln a}$ имѣетъ совершенно подобный ходъ, только абсциссы x слѣдуетъ уменьшить въ отношеніи $1 : \log a$.

Когда функція графически представлена, то образъ обратной функціи получается простымъ отраженіемъ первой фигуры въ равнодѣлящей[1] перваго и третьяго квадранта. Этимъ способомъ на фигурѣ 32 изъ пунктирной

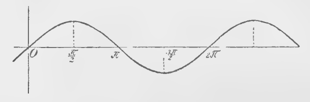
[1]) принимаемой за плоское зеркало.

кривой $y = e^x$ получена логариѳмическая кривая $y = \ln x$. Болѣе тонко начерченная линія соотвѣтствуетъ бригговому логариѳму.

6. Если въ уравненіи

$$y = \sin x \tag{3}$$

измѣрять уголь x дуговою мѣрою, то получится кривая, имѣющая разнообразныя примѣненія и извѣстная подъ именемь **синусоиды**. Ордината y постоянно остается между -1 и $+1$ и попеременно достигаетъ этихъ значеній, когда значенія x равны нечетнымъ кратнымъ числа $\frac{1}{2}\pi$, между тѣмь какь для значеній x, кратныхъ числа π, ордината равна нулю. Кривая состоитъ изъ безчисленнаго множества конгруэнтныхъ дугъ, изъ коихъ каждая, въ свою очередь, распадается на двѣ симметричныя половины ($\sin x = \sin(\pi - x)$) (фигура 33). Мы будемь называть кривую періодическою съ періодомь 2π.



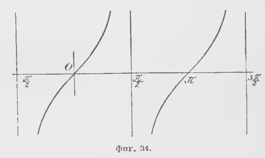
фиг. 33.

Линія **косинусовъ** имѣетъ тоть же видь. Она получается изъ синусоиды перемѣщеніемь послѣдней паралельно оси x-вь на длину $\frac{1}{2}\pi$, какъ это видно изъ равенства $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Мы разсмотримъ еще кривую

$$y = \operatorname{tg} x. \tag{4}$$

Она состоитъ изъ безконечнаго числа конгруэнтныхъ частей и также періодична съ періодомъ π. Ордината



фиг. 34.

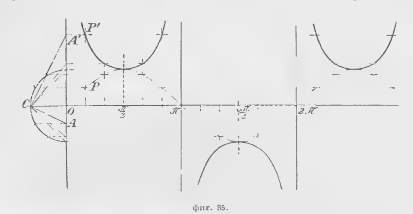
становится безконечной, когда x есть нечетное кратное числа $\frac{1}{2}\pi$ (фигура 34).

Другими примѣрами могутъ служить еще функціи

$$y = \operatorname{cosec} x = 1 / \sin x, \qquad (5)$$

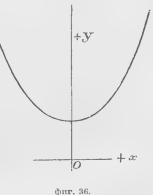
$$y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \qquad (6)$$

которыя на фигурахъ 35 и 36 представлены при помощи кривыхъ.



фиг. 35.

Кривая косекансовъ $y' = 1/\sin x$ получается изъ синусоиды положеніемъ $yy' = 1$. Отложимъ для этой цѣли на оси ординатъ отъ начала отрѣзокъ, обратный по знаку, но равный по величинѣ ординатѣ нѣкоторой точки P синусоиды. Если A есть конецъ этого отрѣзка и OC есть отрѣзокъ на оси x-въ, равный 1, то перпендикуляръ, возставленный изъ точки C къ прямой AC, встрѣчаетъ ось y-въ въ точкѣ A', ордината которой по величинѣ обратна ординатѣ точки P, ибо $OC^2 = OA \,.\, OA'$. Точкѣ A' соотвѣтствуетъ на кривой косекансовъ точка P', имѣющая ординату, равную OA', и такую же абсциссу, какую имѣетъ точка P.



фиг. 36.

Кривая, представленная уравненіемъ (6) имѣетъ ту форму, какую принимаетъ укрѣпленная на концахъ свободно висящая цѣпь; кривая называется поэтому цѣпною линіей. (Фигура 36).

§ 137. Дифференціалъ и производная.

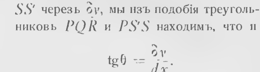
1. Отрѣзокъ PQ, соединяющій двѣ точки кривой, называется хордой кривой; продолжая хорду неопредѣленно, получаютъ сѣкущую кривой.

Если x, y суть координаты точки P на кривой, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ — координаты другой точки Q на кривой и θ есть уголъ, образуемый сѣкущей PQ съ положительной осью x-въ, то (фигура 37)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

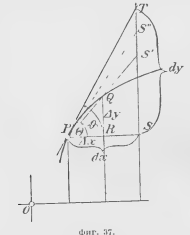
Приращенія Δx, Δy перемѣнныхъ x и y называются также разностями x и y, а отношеніе $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ отношеніемъ разностей.

Взявъ произвольную точку S на прямой, проходящей черезъ точку P параллельно оси x-въ, и обозначивъ отрѣзокъ PS черезъ dx, а отрѣзокъ[2])



SS' черезъ δy, мы изъ подобія треугольниковъ PQR и $PS'S$ находимъ, что и

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\delta y}{dx}.$$



фиг. 37.

Съ приближеніемъ точки Q къ точкѣ P величины Δx и Δy измѣняются. Если же при этомъ не измѣнять величины dx, то точка S' будетъ перемѣщаться по линіи ST и придетъ, положимъ, въ положеніе S''. Уголъ θ также измѣняется и, когда онъ переходитъ въ θ', то $\operatorname{tg}\theta'=\delta' y:dx$.

Если точка Q неограниченно приближается къ точкѣ P, то величины Δx и Δy становятся безконечно малыми. Точка S' приближается къ предѣльному положенію T и предѣльное положеніе PT сѣкущей называется касательной къ кривой. Уголъ θ приближается къ предѣльному значенію ϑ, и если мы обозначимъ черезъ dy отрѣзокъ ST, то

$$dy=\operatorname{tg}\vartheta\, dx, \quad \operatorname{tg}\vartheta=\frac{dy}{dx}. \qquad (2)$$

Отрѣзокъ dy называется дифференціаломъ функціи y. Онъ зависитъ отъ положенія точки P на кривой и отъ произвольно выбраннаго отрѣзка dx, который называется дифференціаломъ x. Частное $dy:dx$ не зависитъ однако отъ произвольно избранной величины dx и называется дифференціальнымъ коэффиціентомъ функціи y по x или относительно x. Онъ такъ же, какъ и y, есть функція отъ x и потому

[2]) Точка S' есть пересѣченіе прямой PQ съ прямой, проходящей черезъ точку S параллельно оси y-въ.

называется также производною функціей или просто производною отъ y и обозначается черезъ y'. Если $y = f(x)$ есть данная функція, то

$$y' = f'(x) \tag{3}$$

есть производная функція

Производная есть предѣлъ, который непосредственно представляется въ видѣ $\frac{0}{0}$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{4}$$

а дифференціалъ, при произвольно взятомъ dx, есть

$$dy = y'\,dx. \tag{5}$$

Мы объединяемъ всѣ эти разсужденія въ одномъ предложеніи:

Производная отъ функціи есть тригонометрическій тангенсъ угла, который касательная къ кривой, изображающей функцію y, образуетъ съ положительною осью x [3]).

2. Два угла, отличающіеся на величину π одинъ отъ другого, имѣютъ одинъ и тотъ же тригонометрическій тангенсъ. Онъ есть положительная величина для остраго угла. Въ равенствахъ (1) и (2) углы θ и ϑ должны быть измѣряемы сообразно съ поворотомъ, при помощи котораго оси x-въ можно дать направленіе сѣкущей или касательной, такъ что углы θ и ϑ должны быть взяты отрицательными, когда вращеніе направлено отъ положительной оси x-въ къ отрицательной оси y-въ.

Если въ равенствѣ (1) Δx и Δy имѣютъ положительныя знаки, то перемѣнныя y и x возрастали при переходѣ отъ точки P къ точкѣ Q; когда dx есть величина положительная, а dy—отрицательная, то функція y убывала, когда перемѣнная x возрастала. Если, слѣдовательно, производная y' отлична отъ нуля, то для достаточно малаго положительнаго значенія Δx знакъ величины Δy будетъ совпадать со знакомъ производной y', и мы заключаемъ:

Когда въ точкѣ P производная y' есть величина положительная, то y возрастаетъ вмѣстѣ съ x, а если y' есть величина отрицательная, то y убываетъ съ возрастаніемъ x.

[3]) Это опредѣленіе производной основано на понятіи о касательной, какъ о предѣльномъ положеніи сѣкущей, которое въ свою очередь ничѣмъ не опредѣлено. Если же опредѣлить производную отъ функціи въ данной точкѣ (т. е. при данномъ значеніи x), какъ предѣлъ отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то можно будетъ затѣмъ опредѣлить касательную, какъ прямую, проходящую черезъ данную точку кривой (т. е. черезъ точку кривой, имѣющую данныя координаты) и образующую съ положительнымъ направленіемъ оси x-въ уголъ, тангенсъ котораго равенъ производной въ этой точкѣ. Въ случаѣ отсутствія производной, т. е. предѣла отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, нѣтъ и касательной въ разсматриваемой точкѣ кривой.

Если y' въ точкѣ P есть нуль, то мы не можемъ судить по y' о возрастаніи или убываніи функціи y. Но если y' при прохожденіи въ точкѣ P черезъ нуль переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ, то y будетъ переходить отъ убыванія къ возрастанію; въ точкѣ P функція y имѣетъ наименьшее значеніе, minimum; y имѣетъ наибольшее значеніе, maximum, когда y' переходитъ отъ положительныхъ къ отрицательнымъ значеніямъ. Въ такихъ точкахъ касательная параллельна оси x-въ. На нашихъ фигурахъ 30, 31, 33, 35 и 36 легко узнать такія точки.

§ 138. Дифференціалы простыхъ функцій.

1. Чтобы найти производную отъ функціи $y = f(x)$, полагаютъ $\Delta x = h$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ и получаютъ:

$$y' = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Если возможно выполнить дѣленіе въ правой части, то послѣ этого можно прямо положить $h = 0$.

Такъ, напримѣръ, полагая въ равенствѣ

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1},$$

$a = x + h$, найдемъ:

$$\lim_{h=0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1},$$

слѣдовательно,

$$d(x^n) = nx^{n+1}dx \tag{2}$$

и вообще, когда $f(x)$ есть цѣлая функція, а $f'(x)$ ея производная, то

$$df(x) = f'(x)dx, \tag{3}$$

какъ это слѣдуетъ и изъ § 61.

2. Равенство (2) доказано пока только для цѣлаго значенія n. Пусть теперь μ будетъ произвольное раціональное или ирраціональное число. Ограничимся, во избѣжаніе многозначности, положительными значеніями x: тогда x^μ будетъ однозначная функція, имѣющая только положительныя значенія. Положимъ теперь

$$f(x) = x^\mu, \quad f(x+h) = (x+h)^\mu = x^\mu \left(1 + \frac{h}{x}\right)^\mu,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = x^\mu \frac{\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\mu - 1\right)}{h}.$$

При $h > x$, къ правой части этого равенства можно примѣнить теорему о биномѣ (§ 121), при чемъ находимъ:

$$\frac{x^\mu}{h}\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^\mu - 1\right) = x^\mu\left(\mu\frac{1}{x} + \frac{\mu\cdot(\mu-1)}{1\cdot 2}\frac{h}{x^2} + \cdots\right)$$

и, полагая $h = 0$, имѣемъ:

$$d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx, \tag{4}$$

какъ и въ равенствѣ (2).

3. Точно также находимъ изъ разложенія § 129, (7)

$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} + \cdots,$$

поэтому, полагая $h = 0$, имѣемъ:

$$d\ln x = \frac{dx}{x}. \tag{5}$$

4. Для показательной функціи e^x имѣемъ:

$$\frac{1}{h}(e^{x+h} - e^x) = e^x\left(\frac{e^h - 1}{h}\right),$$

и, по § 117,

$$de^x = e^x dx. \tag{6}$$

5. Изъ тригонометрическихъ формулъ (томъ II, § 29, (5))

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

$$\cos(x+h) - \cos x = -2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

при помощи предѣльнаго равенства $\frac{2}{h}\sin\frac{h}{2} = 1$ (§ 118, 2.) находимъ:

$$\begin{aligned} d\sin x &= \cos x\,dx \\ d\cos x &= -\sin x\,dx. \end{aligned} \tag{7}$$

§ 139. Дифференціалы сложныхъ функцій.

1. Если y и z суть двѣ функціи отъ x, то справедливы слѣдующія тождества:

$$\frac{\Delta(y+z)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x}, \tag{1}$$

$$\frac{\Delta(yz)}{\Delta x} = \frac{(y+\Delta y)(z+\Delta z) - yz}{\Delta x} \tag{2}$$

$$= y\frac{\Delta z}{\Delta x} + z\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x,$$

$$\frac{\Delta(y:z)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{y+\Delta y}{z+\Delta z}-\frac{y}{z}\right) \tag{3}$$

$$=\frac{z\frac{\Delta y}{\Delta x}-y\frac{\Delta y}{\Delta x}}{z(z+\Delta z)}.$$

2. Отсюда, переходя къ предѣламъ при $\Delta x=0$, получаются слѣдующіе формулы для производныхъ:

$$\frac{d(y+z)}{dx}=\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}, \tag{1}$$

$$\frac{d(yz)}{dx}=y\frac{dz}{dx}+z\frac{dy}{dx}, \tag{2}$$

и, въ частности, когда z имѣетъ постоянное значеніе c, находимъ:

$$\frac{d(cy)}{dx}=c\frac{dy}{dx}, \tag{3}$$

далѣе:

$$\frac{d(y:z)}{dx}=\frac{z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}}{z^2}. \tag{4}$$

Отсюда выводятся соотвѣтствующія формулы для дифференціаловъ

$$d(y+z)=dy+dz, \tag{5}$$

$$d(yz)=ydz+zdy, \tag{6}$$

$$d(cy)=cdy, \tag{7}$$

$$d\frac{y}{z}=\frac{zdy-ydz}{z^2}, \tag{8}$$

и содержаніе этихъ формулъ можно выразить слѣдующими словами:

3. Дифференціалъ суммы равенъ суммѣ дифференціаловъ слагаемыхъ.

4. Дифференціалъ произведенія равенъ суммѣ, составленной изъ произведенія перваго множителя на дифференціалъ второго и произведенія второго множителя на дифференціалъ перваго.

5. Дифференціалъ дроби [4]) получается по такому правилу: изъ произведенія знаменателя на дифференціалъ числителя вычесть произеденіе числителя на дифференціалъ знаменателя; разность раздѣлить на квадратъ знаменателя.

[4]) Или частнаго.

6. Примѣняя повторно эти правила, можно составить дифференціалы всѣхъ тѣхъ функцій, которыя получаются изъ функцій, дифференціалы которыхъ уже извѣстны, при помощи раціональныхъ вычисленій, т. е. при помощи операцій сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія.

Положивъ, напримѣръ, въ равенствѣ (8)

$$y = \sin x, \qquad z = \cos x,$$

$$dy = \cos x\, dx, \; dz = -\sin x\, dx,$$

получимъ:

$$d\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx,$$

такъ что

$$d\operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \tag{9}$$

и подобнымъ же образомъ найдемъ, что

$$d\operatorname{cotg} x = \frac{-dx}{\sin^2 x}. \tag{10}$$

Полагая $y = 1$, $z = \cos x$, найдемъ:

$$d\sec x = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx. \tag{11}$$

7. Когда y есть функція отъ x, а z есть функція отъ y, то можно и на z смотрѣть, какъ на функцію отъ x, и вообще на каждыя двѣ изъ трехъ величинъ x, y, z можно смотрѣть, какъ на функцію третьей. Приращенію Δx перемѣнной x будутъ соотвѣтствовать приращенія Δy, Δz перемѣнныхъ y и z. Величины Δy, Δz являются тогда функціями отъ Δx, и если одна изъ нихъ становится безконечно малой, то такими же дѣлаются и двѣ другія

Если приращеніе Δz равно нулю при всякомъ значеніи Δx, то z есть постоянная.

Изъ тожества

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

слѣдуетъ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}, \tag{12}$$

$$dz = \frac{dz}{dy}\, dy. \tag{13}$$

8. Эта формула гласитъ:

Если z есть функція отъ y, а y есть функція отъ x, то дифференціалъ отъ z получается, какъ произведеніе производной отъ z по y на дифференціалъ отъ y.

Или, другими словами:

9. Тремъ перемѣннымъ x, y, z можно приписать три дифференціала dx, dy, dz такимъ образомъ, что одинъ изъ нихъ будетъ произвольнымъ и частное какихъ либо двухъ изъ дифференціаловъ будетъ дифференціальнымъ коэффиціентомъ соотвѣтственной перемѣнной.

Если, напримѣръ,

$$z = \ln y, \quad y = \sin x, \quad dy = \cos x\, dx, \quad dz/dy = 1/y,$$

то

$$d \ln \sin x = \operatorname{cotg} x\, dx \tag{14}$$

и подобнымъ же образомъ

$$d \ln \cos x = -\operatorname{tg} x\, dx, \tag{15}$$

$$d \ln \operatorname{tg} x = \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{dx}{\sin x \cos x} = \frac{2dx}{\sin 2x}. \tag{16}$$

10. Равенство (12) даетъ также возможность составлять дифференціалы такихъ функцій, которыя получаются черезъ обращеніе функцій, дифференціалы которыхъ уже извѣстны. А именно, полагая $z = x$, имѣемъ

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = 1,$$

и, когда dx/dy извѣстно, то отсюда получаютъ dy/dx, какъ обращенную дробь.

Возьмемъ, напримѣръ, $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, такъ что $x = \operatorname{tg} y$, и согласно равенству (11) получимъ:

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y}.$$

Но по формуламъ тригонометріи (томъ II. § 26, (5))

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

и, слѣдовательно, $dy = dx/(1 + x^2)$, такъ что

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1 + x^2}. \tag{17}$$

Если же положить

$$y = \operatorname{arc} \sin x, \quad x = \sin y, \quad dx = \cos y\, dy,$$

то изъ равенствъ $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, получимъ

$$d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{18}$$

Эти краткія указанія не имѣютъ даже той цѣли, чтобы ввести читателя въ начальныя основанія дифференціальнаго исчисленія. Имѣлось только въ виду показать, какъ изъ разложеній въ ряды, полученныхъ элементарнымъ путемъ, почти сами собою выводятся основныя понятія этого исчисленія, и мы сдѣлаемъ еще только историческое указаніе на то, что Лагранжъ (Lagrange) думалъ одолѣть именно этимъ путемъ трудности, связанныя со строгимъ обоснованіемъ Исчисленія безконечно малыхъ *).

Дифферніальное исчисленіе и связанное съ нимъ интегральное исчисленіе называютъ исчисленіемъ безконечныхъ и разсматриваютъ большею частью, какъ начало „Высшей математики". При всякомъ изученіи математики и примѣненіи изученнаго необходимо освоиться съ методами и пріемами исчисленія безконечно малыхъ такъ же, какъ и съ таблицей умноженія. Этого можно достичь только при помощи многочисленныхъ упражненій на примѣрахъ, которые естественно остаются внѣ предѣловъ этой книги. Существуютъ различные сборники задачъ, употребленіе которыхъ будетъ полезнымъ для этой цѣли; таковы сборники Шлемильха (Schlömilch), Зонке (Sohnke, neu herausgegeben von Amstein), Дэльпа (Dölp, neu herausgegeben von Netto) и другіе [5]). Богатый матеріалъ для упражненій содержится также въ каждомъ болѣе обширномъ учебникѣ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія, изъ коихъ наиболѣе распространенными у насъ являются учебники Штегеманна (Stegemann, bearbeitet von Kiepert) и Серре (Serret, bearbeitet von Harnack und später von Bohlmann). Ср. докладъ Больманна „Обзоръ важнѣйшихъ учебниковъ по исчисленію безконечно малыхъ отъ Эйлера до новѣйшаго времени" въ Ежегодникѣ Нѣмецкаго союза математиковъ (Bericht von Bohlmann „Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit" im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. VI. 1897).

§ 140. Теоремы Тейлора и Маклорена.

1. Если $y = f(x)$ есть функція отъ x, то и производная $y' = f'(x)$ есть функція отъ x. Взявъ отъ нея производную, мы получимъ вторую производную отъ функціи $f(x)$ и, продолжая такимъ образомъ дальше, получимъ рядъ высшихъ производныхъ отъ $f(x)$:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots . \qquad (1)$$

Для случая, когда $f(x)$ есть цѣлая функція, мы получили всѣ эти функціи въ § 132 изъ теоремы бинома и видѣли, что эти производныя также суть цѣлыя функціи и что степень каждой слѣдующей на единицу ниже степени предшествующей. Поэтому, если функція $f(x)$ будетъ n-ой степени, то n-ая производная будетъ постоянная, а высшія равны нулю.

*) Lagrange, Théorie des Fonctions analytiques. Prairial an V (1797).

[5]) На русскомъ языкѣ можно указать сборники задачъ Вѣры Шиффъ и Хмырова.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ рядъ производныхъ функцій составляется по простому закону. Если, напримѣръ, $y = x^{\mu}$ есть степень, то n-ая производная выражается такъ:

$$y^{(n)} = \mu(\mu - 1)\ldots(\mu - n + 1)x^{\mu - n}, \qquad (2)$$

и это имѣетъ мѣсто также и для отрицательныхъ и дробныхъ показателей μ. При $y = e^x$ всѣ производныя равны той же функціи e^x, а для $\sin x$ и $\cos x$ рядъ (1) переходитъ въ ряды

$$\begin{array}{l} \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ldots \\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ \sin x,\ \cos x,\ -\sin x,\ -\cos x,\ldots \end{array} \qquad (3)$$

2. Пусть

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \qquad (4)$$

будетъ степенной рядъ, и допустимъ, что онъ сходится абсолютно, когда абсолютное значеніе x равно r или меньше r.

Въ § 115, 8 мы показали, что въ этомъ случаѣ сходится и рядъ

$$\Phi(x) = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \ldots + \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad (5)$$

если только

$$|x| < r. \qquad (6)$$

Мы докажемъ теорему:

3. Рядъ $f(x)$ есть производная функція отъ $\Phi(x)$.

Для доказательства беремъ числа x и $x + h$ столь малыми, чтобы оба удовлетворяли условію (6). Тогда по § 58, 3. при всякомъ [6]) показателѣ m

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = (x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \ldots + x^{m-1} < m r^{m-1} \qquad (7)$$

(по абсолютной величинѣ).

Если же положить:

$$R_n(x) = \frac{c_{n+1} x^{n+2}}{n+2} + \frac{c_{n+3} x^{n+3}}{n+3} + \ldots,$$

то изъ соотношеній (7) получимъ:

$$\left|\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h}\right| < |c_{n+1}| r^n + |c_{n+2}| r^{n+1} + \ldots,$$

и это выраженіе, въ силу допущенной нами абсолютной сходимости ряда (4), можетъ быть сдѣлано, независимо отъ значеній x и h [7]), меньше

[6]) цѣломъ.

[7]) удовлетворяющихъ однако соотношеніямъ $|x| < r$; $|x + h| < r$.

всякой напередъ заданной положительной величины ω, если только взять n достаточно большимъ.

Но

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=c_0+c_1\frac{(x+h)^2-x^2}{2h}+\ldots+c_n\frac{(x+h)^{n+1}-x^{n+1}}{(n+1)h}$$
$$+\frac{R_n(x+h)-R_n(x)}{h}.$$

Дѣлая здѣсь h безконечно малымъ, мы по опредѣленію производной получаемъ:

$$\Phi'(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\rho_n,$$

гдѣ ρ_n есть величина, которая при достаточно большомъ n можетъ стать произвольно малой, то есть, $\Phi'(x)$ есть сумма безконечнаго ряда $f(x)$, какъ это и нужно было доказать.

Функція $\Phi(x)$ называется **интегральною функціей** или **интеграломъ** отъ $f(x)$.

Сообразуясь съ правиломъ дифференцированія степеней. мы можемъ теорему п. 3 выразить и такъ:

4. **Чтобы дифференцировать степенной рядъ, достаточно дифференцировать каждый его отдѣльный членъ. Кругъ сходимости при этомъ не измѣняется.**

5. Теорему п. 4 можно повторно примѣнить къ функціи $f(x)$ и ея производнымъ; тогда получимъ:

$$\begin{aligned}f(x)&=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots,\\ f'(x)&=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\ldots,\\ f''(x)&=2c_2+2\cdot3c_3x+3\cdot4c_4x^2+4\cdot5c_5x^3+\ldots,\\ f'''(x)&=2\cdot3c_3+2\cdot3\cdot4c_4x+3\cdot4\cdot5c_5x^2+\ldots,\end{aligned}\qquad(8)$$

и вообще

$$f^{(n)}(x)=n!\,c_n+\frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}x+\frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}x^2\qquad(9)$$
$$+\frac{(n+3)!}{3!}c_{n+3}x^3+\ldots.$$

— формула, которую легко доказать методомъ полной индукціи.

5. Положивъ $x=0$ въ равенствахъ (8) и (9), получаемъ:

$$c_0=f(0),\quad c_1=f'(0),\quad c_2=\frac{1}{2!}f''(0),\quad c_3=\frac{1}{3!}f'''(0),\ldots,$$
$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0),$$

откуда

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots \qquad (10)$$

Эта формула называется рядомъ Маклорена.

6. Этой формулѣ мы дадимъ еще другой видъ. Пусть $f(x)$ будетъ функція отъ x и $f'(x)$ ея производная. Замѣнимъ x черезъ $x + h$ и станемъ разсматривать, какъ перемѣнную, одинъ разъ величину x, другой разъ величину h. По § 139, (12)

$$\frac{d f(x+h)}{dh} = f'(x+h) \frac{d(x+h)}{dh} = f'(x+h).$$

Выполнивъ дифференцированіе и положивъ $h = 0$, находимъ:

$$\left(\frac{d f(x+h)}{dh}\right)_{h=0} = f'(x),$$

и соотвѣтственныя равенства можно установить для высшихъ производныхъ.

Отсюда слѣдуетъ, что, разсматривая $f(x+h)$, какъ функцію отъ h, мы найдемъ, для нея, согласно формулѣ (10), слѣдующее разложеніе по степенямъ h:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots, \qquad (11)$$

и эта формула называется рядомъ Тейлора *). Изъ нея обратно выведемъ рядъ (10), полагая $x = 0$ и замѣняя потомъ h на x.

7. При выводѣ этихъ формулъ мы исходили изъ предположенія, что функція $f(x)$ съ самаго начала опредѣлена степеннымъ рядомъ. Поэтому, если допустимъ одну только возможность разложенія функціи въ рядъ вида (10) или (11), то мы получимъ самое разложеніе, составляя производныя отъ функціи.

Вопросъ объ условіяхъ возможности такого разложенія мы не относимъ уже къ элементамъ. Отвѣтъ на него принадлежитъ къ важнѣйшимъ основнымъ проблеммамъ Теоріи функцій.

Въ отдѣльныхъ рядахъ, разсмотрѣнныхъ нами въ главахъ XXIV и XXV мы легко усмотримъ подтвержденіе правильности формулъ (10) и (11). Если возьмемъ, напримѣръ, биноміальный рядъ (§ 116, 1),

$$(1 + z)^n = 1 + B_1^{(n)} z + B_2^{(n)} z^2 + B_3^{(n)} z^3 \ldots,$$

положимъ $z = h/x$ и умножимъ на x^n, то получимъ

$$(x + h)^n = x^n + B_1^{(n)} x^{n-1} h + B_2^{(n)} x^{n-2} h^2 + \ldots + B_n^{(n)} x^{n-n} h^n + \ldots,$$

---

*) Brook Taylor (1685—1731) издалъ въ 1715 г. сочиненіе „Methodus incrementorum“, въ которомъ содержится это разложеніе. Colin MacLaurin (1698—1746), Treatise of fluxions, 1742, далъ формулу (10).

откуда, при сравненіи съ равенствомъ (11), найдемъ, какъ и выше, что n-ая производная отъ x^μ равна

$$B_n^{(\mu)}\, n!\, x^{\mu-n} = \mu\,(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\,x^{\mu-n},$$

8. Отбрасывая въ степенномъ ряду (10) члены, слѣдующіе за n-ой степенью перемѣнной x, мы получаемъ цѣлую функцію n-ой степени, которая, въ предположеніи сходимости ряда, приблизительно совпадаетъ съ функціей $f(x)$. Такимъ образомъ для функціи $f(x)$ найдена цѣлая функція $\varphi(x)$, которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ что она и n ея первыхъ производныхъ совпадаютъ соотвѣтственно съ функціей $f(x)$ и ея производными при одномъ значеніи x (при $x=0$). Въ нѣкоторыхъ случаяхъ одна изъ этихъ функцій можетъ быть замѣняема другой. Существуетъ однако и другой способъ для приближеннаго изображенія любой функціи $F(x)$ въ видѣ цѣлой функціи n-ой степени, а именно разыскиваютъ цѣлую функцію $\varphi(x)$, значенія которой соотвѣтственно равны значеніямъ функціи $F(x)$ при $n+1$ значеніяхъ x:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

Эта задача уже рѣшена при помощи интерполяціонной формулы Лагранжа [8]). Полагая въ ней

$$f(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n), \qquad (12)$$

мы по указаннымъ тамъ формуламъ (7) находимъ:

$$\varphi(x) = \frac{F(a_0)\,f(x)}{(x-a_0)\,f'(a_0)} + \frac{F(a_1)\,f(x)}{(x-a_1)\,f'(a_1)} + \ldots + \frac{F(a_n)\,f(x)}{(x-a_n)\,f'(a_n)}, \quad (13)$$

вмѣсто чего можно также писать

$$\varphi(x) = \sum^{n} \frac{F(a)\,f'(x)}{(x-a)\,f'(a)}, \qquad (14)$$

и эта формула непосредственно показываетъ, что

$$\varphi(a_0) - F(a_0),\ \varphi(a_1) = F(a_1),\ \ldots,\ \varphi(a_n) = F(a_n).$$

Когда функція $F(x)$ сама есть цѣлая функція, степень которой не выше n, то функціи $\varphi(x)$ и $F(x)$ тождественны и мы получаемъ

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum^{n} \frac{\varphi(a)}{f'(a)\,(x-a)} \qquad (15)$$

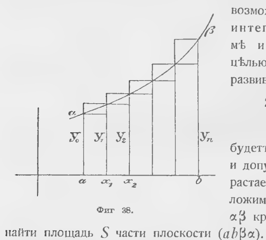
Выраженіе (15) называется разложеніемъ правильно-дробной функціи $\varphi(x)/f(x)$ на частныя дроби.

---

[8]) См. приложеніе VII въ концѣ книги: „Разложеніе цѣлыхъ функцій“.

§ 141. Понятіе объ интегралѣ.

1. Уже въ древности при опредѣленіи площади или объема прибѣгали къ слѣдующему средству: разсматриваемый образъ разлагали на части, которыя принимались столь малыми, чтобы безъ чувствительной погрѣшности можно было считать образъ ограниченнымъ прямыми линіями или плоскостями, и затѣмъ находили сумму всѣхъ этихъ частей. Этотъ способъ можно сдѣлать совершенно точнымъ по методу предѣловъ или по архимедову „методу исчерпыванія". Интегральное исчисленіе обобщаетъ этотъ методъ и приводитъ его въ систему. Опираясь на прямую очевидность, элементарная математика уже издавна прибѣгала къ такимъ пріемамъ, хотя и не пользовалась при этомъ ни именемъ, ни обозначеніями интегральнаго исчисленія. и геометрическая часть нашего сочиненія содержитъ много такихъ примѣровъ. Здѣсь мы хотимъ только установить со всевозможной краткостью понятіе объ интегралѣ въ его простѣйшей формѣ и аналитическомъ значеніи съ цѣлью показать, какъ оно натурально развивается изъ разсмотрѣнія площади.



Фиг 38.

2. Пусть

$$y = f(x) \qquad (1)$$

будетъ произвольная функція отъ x, и допустимъ что она непрерывно возрастаетъ между $x = a$ и $x = b$. Положимъ что она представлена дугою $\alpha\beta$ кривой на фигурѣ 38. Требуется найти площадь S части плоскости $(ab\beta\alpha)$.

Мы дѣлимъ интервалъ $b - a = \Delta$ на n равныхъ частей, изъ коихъ каждая равна Δ/n, и проводимъ въ точкахъ дѣленія $a, x_1, x_2, \ldots, b$ ординаты $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Фигура 38 указываетъ намъ тогда двѣ площади S_1 и S_2, составленныя изъ прямоугольниковъ, при чемъ одна S_1 цѣликомъ содержится въ площади S, а другая содержитъ въ себѣ площадь S, такъ что

$$S_1 < S < S_2, \qquad (2)$$

гдѣ

$$S_1 = \frac{\Delta}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}),$$
$$S_2 = \frac{\Delta}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \qquad (3)$$

Разность этихъ двухъ суммъ равна

$$S_2 - S_1 = \frac{\Delta}{n}[(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1})],$$

и если σ есть наибольшая изъ разностей $(y_1 - y_0), (y_2 - y_1), \ldots, (y_n - y_{n-1})$, то

$$S_2 - S_1 < \sigma\Delta. \qquad (4)$$

Такъ какъ функція y предполагается непрерывной, то величина σ становится безконечно малой, когда число n становится безконечно большимъ. Величины S_1 и S_2 произвольно приближаются одна къ другой и образуютъ дедекиндовское сѣченіе, которымъ опредѣляется—вообще ирраціональное—число S. Это же число S служитъ верхнею границею всѣхъ чиселъ S_1 и нижнею границею всѣхъ чиселъ S_2. Оно опредѣляется функціей $y = f(x)$ и границами a и b интервала Δ.

Это число S называется интеграломъ функціи $f(x)$ между предѣлами a и b. Мы обозначаемъ его черезъ

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (5)$$

при чемъ подъ $f(x)dx = ydx$ понимаютъ площадь элементарнаго прямоугольника, ставшаго безконечно малымъ, а подъ $\int$ — знакъ суммы.

Когда функція $f(x)$, при измѣненіи x отъ a до b, не возрастаетъ, а убываетъ, то заключеніе то же, только съ тѣмъ отличіемъ, что въ неравенствахъ (2) знаки $<$ слѣдуетъ замѣнить знаками $>$.

Если же функція $f(x)$ между границами a, b переходитъ отъ возрастанія къ убыванію или наоборотъ, то интервалъ дѣлятъ на двѣ или на нѣсколько частей и къ каждой изъ нихъ примѣняютъ въ отдѣльности тѣ же разсужденія. При этомъ всегда будетъ

$$\int_a^b f(x)dx = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\Delta}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}) \qquad (6)$$

$$= \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\Delta}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

3. Возьмемъ въ видѣ примѣра функцію $y = x^k$, въ которой k есть цѣлое число. Сверхъ того положимъ еще $a = 0$ и, слѣдовательно, $\Delta = b$.

Тогда

$$y_1 = \left(\frac{b}{n}\right)^k, \; y_2 = \left(\frac{2b}{n}\right)^k, \; y_3 = \left(\frac{3b}{n}\right)^k, \ldots, y_n = \left(\frac{nb}{n}\right)^k,$$

поэтому

$$S_2 = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \ldots + n^k) = \frac{b^{k+1}\sigma_n}{n^{k+1}}. \qquad (7)$$

Слагаемыя содержащейся здѣсь суммы

$$\sigma_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

образуютъ ариѳметическій рядъ k-аго порядка а суммы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ сами составляютъ ариѳметическій рядъ $(k+1)$-го порядка. Такимъ образомъ, по § 57, 2, сумма σ_n есть выраженіе вида

$$\sigma_n = \alpha_0 B_0^{(n)} + \alpha_1 B_1^{(n)} + \ldots + \alpha_{k+1} B_{k+1}^{(n)}, \qquad (8)$$

въ которомъ биноміальные коэффиценты $B_h^{(n)}$ и числа α_h не зависятъ отъ n. Здѣсь легко опредѣлить число α_{k+1}, ибо

$$\sigma_n - \sigma_{n-1} = n^k$$

$$= \alpha_1 (B_1^{(n)} - B_1^{(n-1)}) + \alpha_2 (B_2^{(n)} - B_2^{(n-1)}) + \ldots + \alpha_{k+1} (B_{k+1}^{(n)} - B_{k+1}^{(n-1)}),$$

поэтому, сообразно § 53, (7):

$$n^k = \alpha_1 B_0^{(n-1)} + \alpha_2 B_1^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{k+1} B_k^{(n-1)}. \qquad (9)$$

Это равенство должно удовлетворяться при всякомъ значеніи n и, слѣдовательно, должно быть тождествомъ, такъ какъ уравненіе k-ой степени не можетъ имѣть больше, чѣмъ k корней. Но степени биноміальныхъ коэффиціентовъ $B_0^{(n-1)}, \ldots, B_{k-1}^{(n-1)}$ относительно n ниже k и только

$$B_k^{(n-1)} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}$$

есть выраженіе степени k, поэтому изъ сравненія правой и лѣвой части равенства (9) получается

$$\alpha_{k+1} = k!. \qquad (10)$$

Такимъ образомъ, при переходѣ частнаго σ_n / n^{k+1} къ предѣлу при $n = \infty$, выраженія

$$\frac{B_0^{(n)}}{n^{k+1}}, \quad \frac{B_1^{(n)}}{n^{k+1}}, \ldots, \frac{B_k^{(n)}}{n^{k+1}},$$

исчезаютъ, потому что степени числителей относительно n ниже степеней знаменателей. Напротивъ,

$$\frac{B_{k+1}^{(n)}}{n^{k+1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^{k+1}(k+1)}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k}{n}\right),$$

и предѣлъ этого выраженія равенъ $1/(k+1)!$. Поэтому

$$\operatorname{Lim} \frac{\sigma_n}{n^{k+1}} = \frac{\alpha^{k+1}}{(1+k)!} = \frac{1}{k+1},$$

и изъ равенства (7) мы получаемъ для S_2 предѣлъ:

$$\int_0^b x^k dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}. \qquad (11)$$

4. Когда y есть сумма $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$, гдѣ c_1, c_2 суть постоянные множители, то изъ опредѣленія интеграла при помощи суммъ (6) непосредственно вытекаетъ, что

$$\int_a^b (c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x))\,dx = c_1\int_a^b \varphi_1(x)dx + c_2\int_a^b \varphi_2(x)dx, \quad (12)$$

и соотвѣтственныя равенства выводятся также для суммъ, содержащихъ больше членовъ.

Поэтому изъ равенства (11) можно прямо получить интегралъ цѣлой функціи:

Если

$$f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_m x^m,$$

есть цѣлая функція m-ой степени, то

$$\int_0^b f(x)dx = \gamma_0 b + \frac{\gamma_1 b^2}{2} + \frac{\gamma_2 b^3}{3} + \ldots + \frac{\gamma_m b^{m+1}}{m+1}. \qquad (13)$$

Если станемъ разсматривать эту сумму, какъ функцію $\Phi(b)$ отъ b, то $\Phi(b)$ будетъ интегральной функціей отъ функціи $f(b)$ въ томъ же смыслѣ, въ какомъ мы употребляли это выраженіе въ § 140, 3. Изъ разложенія суммы S выводится

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (14)$$

5. Рядъ значеній перемѣнной x отъ a до b называется промежуткомъ интегрированія. Этотъ промежутокъ можно всегда привести къ промежутку отъ -1 до $+1$ по слѣдующему способу: Положимъ

$$t = \frac{2x - b - a}{b - a}, \quad x = \tfrac{1}{2}\left(t(b-a) + (b+a)\right). \qquad (15)$$

Когда x, постоянно возрастая, проходитъ значенія отъ a до b, то t проходитъ значенія отъ -1 до $+1$, также постоянно возрастая, и функція $y = f(x)$ будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ функціей $\varphi(t)$ отъ t, если положимъ

$$y = f\left(\tfrac{1}{2}\left(t(b-a) + (b+a)\right)\right) = \varphi(t). \qquad (16)$$

Точкамъ дѣленія $a, x_1, x_2, \ldots, b$ на фигурѣ 38 соотвѣтствуютъ для t точки дѣленія $-1, -1+\frac{2}{n}, -1+\frac{4}{n}, \ldots, +1$ и ординаты

$$y_0 = \varphi(-1), \; y_1 = \varphi\left(-1+\frac{2}{n}\right), \; \ldots, \; y_n = \varphi(+1).$$

Поэтому $\int\limits_{-1}^{+1} \varphi(t)\,dt$ есть предѣлъ обѣихъ суммъ

$$\frac{2}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}), \; \frac{2}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n),$$

и, полагая вновь $\Delta = b - a$, получаемъ:

$$\frac{\Delta}{2}\int\limits_{1}^{+1} \varphi(t)dt = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} y\,dx; \tag{17}$$

для цѣлой же функціи

$$F(x) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \ldots$$

находимъ изъ равенствъ (13) и (14):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} F(t)\,dt = C_0 + \frac{C_2}{3} + \frac{C_4}{5} + \ldots,$$

гдѣ въ правой части остаются числа C_i только съ четными индексами i.

§ 142. Приближенное вычисленіе интеграловъ.

1. Такъ какъ мы легко можемъ найти интегралъ цѣлой функціи и такъ какъ всякую функцію мы можемъ замѣнить съ нѣкоторымъ приближеніемъ цѣлою функціей при помощи-ли ряда Тейлора или при помощи лагранжевой формулы, то отсюда получаются различные способы для приближеннаго опредѣленія интеграловъ. Изслѣдованія значительно упрощаются, когда промежутокъ интегрированія по § 141, 5 приведенъ къ интервалу отъ -1 до $+1$.

Итакъ, пусть перемѣнная t будетъ ограничена интерваломъ $-1, \ldots, 1$ и пусть $\varphi(t)$ будетъ какая либо функція. Опредѣлимъ цѣлую функцію $\Phi(t)$ степени n, совпадающую съ функціей $\varphi(t)$ при $n+1$ значеніяхъ

$$t = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \tag{1}$$

Положивъ

$$\varphi(\alpha_0) = y_0, \; \varphi(\alpha_1) = y_1, \ldots, \varphi(\alpha_n) = y_n, \tag{2}$$

$$f(t) = (t-\alpha_0)(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_n) \tag{3}$$

$$= t^{n+1} + c_1 t^n + c_2 t^{n+1} + \ldots + c_n t + c_{n+1},$$

мы получимъ, согласно § 140, (13), (14):

$$\Phi(t) = \frac{y_0 f(t)}{(t-\alpha_0)f'(\alpha_0)} + \frac{y_1 f(t)}{(t-\alpha_1)f'(\alpha_1)} + \dots + \frac{y_n f(t)}{(t-\alpha_n)f'(\alpha_n)} \quad (4)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i f(t)}{(t-\alpha_i)f'(\alpha_i)}.$$

Частное $f(t)/(t-\alpha_i)$ есть цѣлая функція отъ t степени n и ея интегралъ можно опредѣлить по § 141. Сначала для каждаго числа α ряда (1) мы получимъ:

$$\frac{f(t)}{t-\alpha} = q_0(\alpha)t_n + q_1(\alpha)t^{n-1} + q_2(\alpha)t^{n-2} + \dots + q_{n-1}(\alpha)t + q_n(\alpha), \quad (5)$$

гдѣ, согласно § 65, (3), коэффиціенты $q_n(\alpha)$ суть цѣлыя функціи отъ α, выражающіяся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} q_0(\alpha) &= 1, \\ q_1(\alpha) &= \alpha + c_1, \\ q_2(\alpha) &= \alpha^2 + c_1\alpha + c_2, \\ q_3(\alpha) &= \alpha^3 + c_1\alpha^2 + c_2\alpha + c_3, \\ &\dots \\ q_n(\alpha) &= \alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2} + \dots + c_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Напишемъ члены второй части равенства (5) въ обратномъ порядкѣ:

$$\frac{f(t)}{t-\alpha} = q_n(\alpha) + q_{n-1}(\alpha)t + q_{n-2}(\alpha)t^2 + \dots + q_0(\alpha)t^n$$

и положимъ

$$S(\alpha) = \frac{1}{2f'(\alpha)}\int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-\alpha}dt \quad (7)$$
$$= \frac{1}{f'(\alpha)}\left(q_n(\alpha) + \frac{q_{n-2}(\alpha)}{3} + \frac{q_{n-4}(\alpha)}{5} + \dots\right),$$

при чемъ послѣдній членъ внутри скобокъ есть $q_1(\alpha)/n$ или $1/(n+1)$, смотря по тому, будетъ-ли n число нечетное или четное.

Въ такомъ случаѣ изъ равенства (4) выводится приближенная формула:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(t)\,dt = 2\sum_{i=0}^{n} y_i S(\alpha_i) - \quad (8)$$

и потому, согласно § 141, (17):

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\sum y_i S(\alpha_i). \quad (9)$$

Когда числа α_i извѣстны, то по равенству (7) можно опредѣлить всѣ суммы $S(\alpha_i) = S_i$, и онѣ не зависятъ отъ функціи y, которую нужно интегрировать.

2. Взявъ, напримѣръ, $n = 2$; $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, получимъ:

$$f(t) = t^3 - t,$$

$$f'(t) = 3t^2 - 1,$$

$$f'(-1) = f'(+1) = 2,\ f'(0) = -1,$$

$$q_2(t) = t^2 - 1,$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}\left(q_2(\alpha) + \frac{1}{3}\right),$$

поэтому

$$S(-1) = S(+1) = \frac{1}{6},\quad S(0) = \frac{2}{3},$$

слѣдовательно, формула (9) даетъ приближенное значеніе:

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2). \tag{10}$$

Эта формула носитъ названіе правила Симпсона. Ея геометрическій смыслъ заключается въ томъ, что данная кривая замѣняется параболой, у которой крайнія и средняя ординаты совпадаютъ съ данными.

Если точность этой формулы недостаточно велика, то можно раздѣлить данный интервалъ на нѣсколько частей и примѣнять формулу (10) къ каждой изъ нихъ *).

3. Какъ бы ни были выбраны числа α_i, равенство (8) даетъ точное значеніе интеграла $\int_{-1}^{+1} \varphi(t)\,dt$, когда $\varphi(t)$ есть цѣлая функція, степень которой не выше n, потому что при этомъ допущеніи функціи $\Phi(t)$ и $\varphi(t)$ идентичны. Чтобы составить себѣ сужденіе о точности формулы (9), примѣнимъ ее къ случаю, когда $\varphi(t) = t^m$ и $m > n$. Если означимъ черезъ D_m число, на которое лѣвая часть равенства (9) больше правой, и примемъ во вниманіе, что

$$\int_{-1}^{+1} t^m\,dt = \frac{2}{m+1} \text{ или } = 0,$$

---

*) Thomas Simpson, англійскій математикъ, родился въ 1710 году, провелъ жизнь въ Лондонѣ и Вульвичѣ и умеръ въ 1761 году на своей родинѣ Market-Bosworth, Leicestershire.

смотря по тому, будетъ-ли m четнымъ или нечетнымъ, то, согласно равенству (8),

$$D_m = 2\sum \alpha_i^m S(\alpha_i) - \frac{\delta}{m+1},$$

гдѣ $\delta = 0$, или $\delta = 2$ въ зависимости отъ того, будетъ ли m нечетнымъ или четнымъ.

Внося первое изъ выраженій (7) вмѣсто $S(\alpha_i)$, находимъ:

$$D_m = \int_{-1}^{+1} f(t) \sum^{i} \frac{\alpha_i^m}{(t-\alpha_i) f'(\alpha_i)} dt - \frac{\delta}{m+1}. \quad (11)$$

4. Формула (11) даетъ для D_m значеніе, равное нулю, когда $m \leqq n$. Мы получимъ это, положивъ $\varphi(x) = x^m$ въ § 140, (15). Когда же $m > n$, то дѣлимъ t^m на $f(t)$. Мы получимъ частное Q_m и остатокъ $R_m(t)$, степень котораго не выше n:

$$t^m = Q_m f(t) + R_m(t), \quad (12)$$

а такъ какъ $f(\alpha_i) = 0$, то

$$R_m(\alpha_i) = \alpha_i^m.$$

Но $R_m(t)/f(t)$ есть правильно-дробная функція и, слѣдовательно, по § 140, (15) имѣемъ:

$$\frac{R_m(t)}{f(t)} = \sum^{i} \frac{R_m(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)(t-\alpha_i)} - \sum \frac{\alpha_i^m}{(t-\alpha_i) f'(\alpha_i)},$$

и равенство (11) даетъ:

$$D_m = \int_{-1}^{+1} R_m(t)\, dt - \frac{\delta}{m+1}. \quad (13)$$

Положивъ

$$R_m(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t + \varepsilon_2 t^2 + \ldots + \varepsilon_n t^n, \quad (14)$$

мы получаемъ отсюда:

$$D_m = 2\varepsilon_0 + \frac{2\varepsilon_2}{3} + \frac{2\varepsilon_4}{5} + \ldots - \frac{\delta}{m+1}, \quad (15)$$

и въ выраженіе для D_m величины ε_i входятъ только съ четными индексами.

Такимъ образомъ, въ случаѣ, когда y есть цѣлая функція m-ой степени или когда функція y можетъ быть съ достаточною точностью представлена цѣлою функціей m-ой степени (напримѣръ, при помощи ряда Тейлора):

$$y = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_m t^m,$$

то въ равенствѣ (8) ошибка выражается такъ:

$$D = C_{n+1} D_{n+1} + C_{n+2} D_{n+2} + \ldots + C_m D_m. \quad (16)$$

5. Чтобы вычислить величину ошибки для данной функціи $f(t)$, или, что то же, при данныхъ величинахъ α_i, нужно только выполнить дѣленія, требуемыя равенствомъ (12). Точность способа будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше будетъ число исчезающихъ величинъ D_{n+1}, $D_{n+2}, \ldots$ Такъ какъ мы располагаемъ $n+1$ величинами α_i или $n+1$ коэффиціентами функціи $f(t)$, то мы можемъ распорядиться ими такъ, чтобы было *)

$$D_{n+1} = 0, \; D_{n+2} = 0, \; \ldots, \; D_{2n+1} = 0. \qquad (17)$$

Въ этомъ случаѣ формула (9) остается точною, когда степень функціи y повышается до $2n+1$, и при помощи $n+1$ промежуточныхъ значеній мы достигаемъ тѣхъ же результатовъ, какихъ достигли-бы, выбравъ произвольно $2n+1$ промежуточныхъ значеній.

6. Если $n+1$ величинъ α_i имѣютъ попарно противоположныя значенія при нечетномъ n, или если при четномъ n одна изъ нихъ равна нулю, а остальныя n имѣютъ попарно противоположныя значенія то $f(t)$ при четномъ n есть нечетная, а при нечетномъ n четная функція:

$$f(t) = t^{n+1} + c_2 t^{n-1} + c_4 t^{n-3} + \ldots; \qquad (18)$$

поэтому, какъ это слѣдуетъ изъ равенства (12), когда замѣнимъ въ немъ t на $-t$, функція $R_m(t)$ будетъ четной при четномъ m и нечетной при нечетномъ m; а изъ опредѣленія величины δ и равенства (15) слѣдуетъ, что всѣ величины D_m съ четными индексами m исчезаютъ.

Отсюда, напримѣръ, вытекаетъ, что Симпсоново правило вполнѣ точно не только для функцій 2-й степени, но и для функцій 3-й степени.

7. Мы разсмотримъ нѣкоторые примѣры, относящиеся къ методу Гаусса, основанному на равенствахъ (17).

Когда $n = 0$, то $f(t) = t$; $\alpha_0 = 0$ и $S(\alpha_0) = 1$, такъ что

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\,y_0.$$

Такимъ образомъ здѣсь функція просто замѣщается постоянной, которая равна средней ординатѣ y_0 кривой, такъ что площадь замѣщается прямоугольникомъ, котораго основаніе равно интервалу $b-a$, а высота — средней ординатѣ y_0. Представляется геометрически очевиднымъ, что при этомъ допущеніи формула (9) еще остается вѣрной, когда y есть функція первой степени, то есть, кривая сводится къ прямой линіи.

8. Пусть будетъ $n = 1$, $f(t) = t^2 + c$; мы получимъ:

$$t^2 = f(t) - c, \quad R_2 = -c, \quad D_2 = -2\left(c + \tfrac{1}{3}\right),$$

---

*) Gauss, Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. (Göttingen 1816, Werke Bd. III, S. 165)

такъ что $D_2 = 0$ при $c = -\frac{1}{3}$, и мы находимъ:

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ q_1(t) = t,\ S(\alpha) = \frac{1}{2},$$

$$\int_a^b y\,dx = (b-a)\frac{y_0 + y_1}{2}.$$

Здѣсь y_0, y_1 суть ординаты, соотвѣтствующія значеніямъ $t = \pm 1/\sqrt{3} = \pm 0{,}18257$. Кривая замѣняется прямой, проходящей черезъ точки $t = -1/\sqrt{3}$, $y = y_0$, $t = +1/\sqrt{3}$; $y = y_1$; и формула остается точной, когда функція y достигаетъ третьяго порядка (какъ и Симпсонова формула).

9. При $n = 2$ слѣдуетъ положить $f(t) = t^3 + ct$, $q_2(t) = t^2 + c$, откуда:

$$t^4 = tf(t) - ct^2,\quad D_4 = -\frac{2c}{3} - \frac{2}{5},\quad D_5 = 0;$$

а такъ какъ $D_4 = 0$, то

$$c = -\frac{3}{5}$$

и

$$\alpha_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$S(\alpha_0) = S(\alpha_2) = \frac{5}{18},\ S(\alpha_1) = \frac{4}{9};$$

слѣдовательно,

$$\int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{18}(5y_0 + 8y_1 + 5y_2).$$

Кривая здѣсь замѣщается параболой, проходящей черезъ точки, имѣющія абциссы $t = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm 0{,}2449490$, $t = 0$, и формула остается точной до функцій 5-го порядка.

Для опредѣленія функцій $f(t)$, удовлетворяющихъ условіямъ (17) при болѣе высокихъ значеніяхъ n, Гауссъ создалъ особыя вспомогательныя средства. Они приводятъ къ такъ называемымъ шаровымъ функціямъ, находящимъ часто примѣненіе въ математической физикѣ. При помощи теоремы Штурма можно показать, что найденная такимъ образомъ функція $f(t)$, какъ это и требуется, всегда имѣетъ $n + 1$ вещественныхъ корней, содержащихся между -1 и $+1$ [1]).

---

[1] Ср. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Bd. II, Teil I. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., Bd. I § 93.

10. Гауссъ примѣняетъ свой способъ къ интегралу

$$\int_a^b \frac{dx}{\ln x}$$

при $a = 100\,000$, $b = 200\,000$. Это представляется интереснымъ, такъ какъ при большихъ значеніяхъ a и b этотъ интегралъ приближенно выражаетъ число простыхъ чиселъ, содержащихся между a и b — законъ, который, однако, установленъ до сихъ поръ только эмпирически. Кривая $1/\ln x$, подобно гиперболѣ, ассимптотически приближается къ оси x-въ.

Симпсоново правило даетъ:

$$\frac{100\,000}{6}\left(\frac{1}{5\ln 10} + \frac{4}{\ln 15 + 4\ln 10} + \frac{1}{\ln 20 + 4\ln 10}\right).$$

Съ точностью до пяти знаковъ:

$$\ln 10 = 2{,}30259,$$
$$\ln 15 = 2{,}70805,$$
$$\ln 20 = 2{,}99573,$$

и значеніе предыдущаго выраженія приблизительно равно

$$8404{,}573.$$

Гауссовъ способъ даетъ съ точностью до третьяго десятичнаго знака при $n = 0,\ 1,\ 2$:

$$8390{,}395,$$
$$8405{,}955,$$
$$8406{,}237.$$

Точное значеніе, вычисленное Бесселемъ (Bessel), равно

$$8406{,}243,$$

а число простыхъ чиселъ, содержащихся между 100 000 и 200 000, равно 8372.

ДОПОЛНЕНІЯ.

I. § 143. Изъ исторіи числа и счисленія.

Это внесено авторомъ во второмъ изданіи въ дополненіе къ § 6.

1. Въ послѣднее время исторія науки и, въ частности, исторія математики возбуждаетъ особенный интересъ. Этому новому теченію мы обязаны, помимо спеціальныхъ изслѣдованій филологовъ и математиковъ, цѣлымъ рядомъ превосходныхъ работъ, среди которыхъ наиболѣе выдаются слѣдующія:

J. E. Montucla, Histoire des mathématiques. 2me édit. Paris 1799 1802. 4 тома.

F. Nesselmann, Algebra der Griechen, nach den Quellen bearbeitet. Berlin. Reimer. 1842.

A. Arneth, Geschichte der reinen Mathematik. Stuttgart. 1852.

H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter Leipzig, Teubner. 1874. Послѣ смерти автора издано его отцомъ.

M. Chasles, Aperçu historique des méthodes en Géometrie. 2me édit Paris. 1875. Rapport sur les progrès de la Géométrie. Paris. 1870.

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Auflage. 3 Bände. Leipzig Teubner. 1894 19[illegible]

Это сочиненіе простирается до 1758 г. Продолженіе, разрабатываемое авторомъ совмѣстно съ болѣе молодымъ ученымъ, готовится къ печати.

C. J. Gerhard, Geschichte der Mathematik in Deutschland. München, Oldenburg. 1877. Aus dem von der Münchener Akademie herausgegebenen Sammelwerk „Geschicte der Wissenschaften in Deutschland".

H. G. Zeuthen, Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le moyen age. Paris, Gauthier-Villars. 1902. Французское изданіе.

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert. Leipzig, Teubner 1903 Нѣмецкое изданіе.

A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 Bände. Leipzig, Teubner. 1900—1903.

Joh. Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik. 2 Bände. Leipzig, Veit & C° 1902. 1903.

Fr. Engel und P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig, Teubner. 1895.

Ferd. Rosenberger, Die Geschichte der Physik. 3 Teile. Braunschweig. Vieweg. 1882 1890.

F. Rosenberger, Isaak Newton und seine physikalischen Prinzipien

Rud. Wolf, Geschichte der Astronomie. München 1877.

Новыя изданія греческихъ математиковъ.

Euclidis opera omnia edd. Heiberg et Menge.

Diophanti Alexandrini opera omnia ed. P. Tannery.

Apollonii Pergaei quae graece extant ed. Heiberg.

Archimedis opera omnia ed. Heiberg.

Эти изданія, выпущенныя Тейбнеромъ въ Лейпцигѣ, содержатъ греческій текстъ и латинскій переводъ.

Кромѣ того имѣются еще слѣдующіе нѣмецкіе переводы:

Diophant, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet (zugleich mit der Übersetzung der Randbemerkungen von Fermat) von G Wertheim. Leipzig, Teubner 1890

Apollonius, vollständig, mit den nur in arabischer Übersetzung erhaltenen Büchern von Balsam. Berlin 1861 [1]).

Выходящая въ настоящее время большая энциклопедія „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ удѣляетъ особенное вниманіе историческому развитію отдѣльныхъ дисциплинъ и содержитъ богатыя литературныя указанія.

2. Въ книгѣ Нессельмана „Критическая исторія Алгебры“ *) мы находимъ слѣдующее замѣчаніе:

„Понятіе о числѣ есть понятіе элементарное и непосредственно врожденное нашему духу; вслѣдствіе этого всѣ попытки научно обосновать это понятіе будутъ такъ же безплодны, какъ и старанія доказать евклидовы аксіомы“. Въ самомъ дѣлѣ, мы не знаемъ ни въ древности, ни въ средніе вѣка ни одной удачной попытки выяснить темное для насъ происхожденіе понятія о числѣ. Пиѳагоръ и пиѳагорейцы оставили послѣ себя только мистическія числовыя игры; хотя они и содержатъ уже нѣкоторыя ариѳметическія истины, но самаго понятія о числахъ, конечно, не выясняютъ. А тѣ опредѣленія, которыя даетъ Евклидъ, представляютъ собою, какъ и его геометрическія опредѣленія, не болѣе, какъ словесныя описанія, которыя предполагаютъ самое понятіе уже усвоеннымъ. (Elementorum Liber VII, стр. 185 **).

Однако, пытливый умъ не можетъ примириться съ существованіемъ предѣла нашего изслѣдованія и на всякій открытый вопросъ отвѣчаетъ стремленіемъ углубиться въ его сущность. Такимъ образомъ, современные изслѣдователи не остановились на общепринятомъ понятіи о числѣ и сдѣлали настойчивую попытку глубже проникнуть въ происхожденіе этого понятія. Кантъ удѣляетъ мало мѣста понятію о числѣ. Для него математика, занимающая вообще въ его системѣ выдающееся мѣсто, сводится, главнымъ образомъ, къ геометріи. По его мнѣнію ариѳметика, играетъ по отношенію ко времени такую же роль, какую геометрія, играетъ по

[1]) „Начала“ Евклида имѣются также въ русскомъ переводѣ, сдѣланномъ профессоромъ Ващенко-Захарченко: Кіевъ. 1880. Переводъ снабженъ многочисленными примѣчаніями.

*) Nesselmann „Kritische Geschichte der Algebra“.

**) Цитировано, какъ это будетъ и въ дальнѣйшемъ, по изданію Heiberg'a (греко-латинское). Leipzig, Teubner 1884.

отношенію къ пространству, — взглядъ, довольно распространенный и помимо Канта (напр. Гамильтонъ). Хотя такое воззрѣніе въ извѣстномъ смыслѣ справедливо, однако оно далеко не охватываетъ нашего понятія о числѣ во всемъ его объемѣ.

Въ послѣднее время эти принципіальные вопросы вновь возникли, какъ предметъ математическаго изслѣдованія. Въ письмѣ къ Бесселю Гауссъ высказываетъ мысль, что число (въ противоположность понятію о пространствѣ) представляетъ собой продуктъ творчества нашего духа. Онъ говоритъ далѣе, что ему удалось привести образованіе этого понятія къ болѣе элементарной дѣятельности нашего духа, къ сопряженію вещей между собой и образованію родовыхъ понятій, классовъ (идей въ смыслѣ Платона). Это изслѣдованіе привело къ новой вѣтви математики, къ ученію о комплексахъ, или многообразіяхъ. Эта дисциплина занимается основными вопросами ученія о величинѣ и приводитъ къ тому, что на обыкновенное число надо смотрѣть, какъ на частный случай болѣе общаго понятія. Это болѣе общее понятіе о числѣ было выяснено лишь благодаря строгому опредѣленію и математической разработкѣ идеи о безконечности; нужно сказать, что въ этомъ вопросѣ и по сей день остается еще много неяснаго.

Предшественникомъ этихъ изслѣдованій является Бернгардъ Больцано (Bernhard Bolzano) въ Прагѣ (1781—1848). Его небольшое сочиненіе, относящееся къ этому предмету, носитъ названіе „Парадоксы безконечности" и издано послѣ смерти автора Пригонскимъ *).

Дѣйствительнымъ основателемъ ученія о комплексахъ является Георгъ Канторъ (въ рядѣ статей въ журналѣ „Mathematische Annalen", начиная съ XV т., и въ другихъ сочиненіяхъ). Цѣльное изложеніе этой дисциплины далъ Шенфлисъ **). Въ тѣсной связи съ этимъ находится небольшое изслѣдованіе Дедекинда „Что такое числа, и какую они имѣютъ цѣль" ***), а также „Учебникъ ариѳметики" Шрёдера ****); послѣднее сочиненіе принадлежитъ къ числу первыхъ, которое становится на путь болѣе глубокаго изслѣдованія вопросовъ элементарной ариѳметики. Способъ умозаключенія, извѣстный подъ названіемъ совершенной индукціи, давно находилъ себѣ примѣненіе въ математикѣ; но прежніе математики мало зани-

*) Dr. Bernhard Bolzano's „Paradoxien des Unendlichen", herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Prihonsky. Переиздано въ 1889 году фирмой Mayer & Müller.

**) A. Schönflies „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. VIII, 2.

***) R Dedekind „Was sind und was sollen die Zahlen". Braunschweig, 1888. Русскій переводъ этого небольшого сочиненія, принадлежащій г. Н. Парфентьеву, приведенъ въ „Извѣстіяхъ Физико-Математическаго Общества при Имп. Казанскомъ Университетѣ". Т XV № 2. 1905.

****) E. Schröder. „Lehrbuch der elementaren Arithmetik". Leipzig 1873

мались логическимъ обоснованіемъ этого пріема. Въ упомянутомъ сочиненіи Дедекинда это сдѣлано въ первый разъ. Нѣкоторыя соображенія по этому вопросу мы находимъ также въ вышедшей недавно книгѣ Пуанкарэ „Наука и гипотеза“ *).

3. Интересныя свѣдѣнія относительно названій и обозначенія чиселъ у различныхъ народовъ мы находимъ въ посмертномъ сочиненіи Ганкеля „Къ исторіи математики въ древности и въ средніе вѣка“ **)

Въ послѣднее время мы имѣемъ два примѣра возникновенія новыхъ названій для чиселъ, вызваннаго практическими потребностями. Именно, слово „милліонъ“, которое появилось около 1500 года въ Италіи, и слово „милліардъ“, которое по крайней мѣрѣ въ Германіи вошло въ употребленіе только въ наши дни со времени франко-нѣмецкой войны 1870—71 г.г. Оба слова представляютъ собой итальянскія увеличительныя названія числа mille (тысяча).

Система цифръ, которою мы въ настоящее время пользуемся, несомнѣнно ведетъ свое происхожденіе изъ Индіи. Возникновеніе этой удивительно совершенной системы, превзойти которую представляется совершенно невозможнымъ, теряется во мракѣ доисторической древности; можно однако обнаружить, что въ VII столѣтіи нашей эры эта система примѣнялась уже въ полномъ развитіи. Что это твореніе исходитъ именно изъ Индіи, Ганкель объясняетъ тѣмъ, что религіозно возвышенное и непостижимо великое находило въ фантазіи индусовъ выраженіе въ неимовѣрно большихъ числахъ (у Будды было шестьсотъ тысячъ милліоновъ сыновей, боговъ было двадцать четыре тысячи билліоновъ и т. д.).

На западъ эта система счисленія была принесена арабами, жившими въ Испаніи и въ южной Африкѣ, сначала въ несовершенной формѣ счета при помощи счетной доски (Abacus), а позже былъ введенъ 0, употребленіе котораго имѣло рѣшающее значеніе и, можно сказать, развязало руки вычислителю.

Новый способъ счисленія былъ названъ „алгориѳмомъ“, а математики, которые имъ пользовались, „алгориѳмиками“ въ отличіе отъ абацистовъ, съ которыми они одно время вели упорную борьбу (см. примѣчаніе на страницѣ 45).

Однимъ изъ выдающихся представителей абацистовъ былъ Гербертъ (родился въ 940 г. въ Auvergne, кончилъ жизнь папой подъ именемъ Сильвестра II, умеръ въ 1003 г. въ Римѣ). Распространенію алго-

*) H. Poincaré. „La science et l'hypotèse“. Paris 1903. Нѣмецкій переводъ этой книги, сдѣланный Л. Линдеманомъ, содержитъ очень цѣнныя примѣчанія. H. Poincaré. „Wissenschaft und Hypothese“. Autorisirte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. Leipzig 1904. Имѣется русскій переводъ, сдѣланный г. Андреевымъ „Наука и гипотеза“. Москва. 1903.

**) H. Hankel. „Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter“. Leipzig, 1874.

риөма на западѣ болѣе всего содѣйствовали Леонардъ Пизанскій, названный Фибоначи (Filius Bonacii; Liber Abaci появилось въ началѣ XIII столѣтія), и Іорданъ Неморарій (Iordanus Nemorarius умеръ въ 1237 г. генераломъ Доминиканскаго ордена; Arithmetica, Algorithmus demonstratus). Въ Византіи индійская система счисленія сдѣлалась извѣстной только въ XIV столѣтіи, благодаря ариөметикѣ монаха Максима Плануда (Maximus Planudes), который употребляетъ слово „Tziphra" для обозначенія нуля. Отсюда и ведетъ свое начало наше слово „цифра", взятое изъ арабскаго языка, которымъ мы въ настоящее время называемъ каждый изъ основныхъ знаковъ письменнаго счисленія. Отсюда же и происходитъ французское слово „zero".

Прошло еще немало времени, пока обозначеніе и счетъ по алгориөму вошли въ повседневное употребленіе. Въ Германіи эта система счисленія получила всеобщее распространеніе около середины XVI столѣтія, чему не мало способствовала знаменитая ариөметика Адама Ризе (Adam Riese, 1522). Однако, и въ наше время въ нѣкоторыхъ случаяхъ пользуются еще римскими цифрами, напр. въ цѣляхъ орнаментики.

II. § 144. Работы Евклида, Діофанта и Фермата по теоріи чиселъ.

Это примѣчаніе вставлено авторомъ во второмъ изданіи послѣ § 20-го

1. О свѣдѣніяхъ, которыми располагали греки до Евклида. мы знаемъ очень мало. Отъ пиөагорейцевъ, въ ученіи которыхъ числа играли такую важную роль, сохранились нѣкоторыя довольно глубокія предложенія теоріи чиселъ, но безъ всякой систематической связи (см. Cantor, Geschichte der Mathematik, 2 Aufl. Bd. I Kap. 6, S. 137). Только въ „Началахъ" Евклида мы находимъ теорію чиселъ, содержащую, по существу, почти все то, что и въ настоящее время составляетъ основу высшей ариөметики. Свойственная Евклиду геометрическая форма изложенія обусловливается недостаткаткомъ простой системы обозначенія чиселъ, какой мы располагаемъ теперь въ видѣ индійскаго счисленія и буквеннаго знакоположенія, и при нашихъ привычкахъ затрудняетъ намъ пониманіе.

Если, напримѣръ, Евклидъ изображаетъ неопредѣленныя простыя числа (книга IX, 20) произвольно выбранными отрѣзками, то это рѣшительно ничего не вноситъ въ доказательство теоремы, о которой идетъ рѣчь, и обусловливается только потребностью имѣть передъ глазами конкретный образъ абстрактныхъ представленій.

Мы здѣсь вкратцѣ приведемъ предложенія, къ которымъ, на нашъ взглядъ, приводится сущность дѣла.

Во второй книгѣ приведены основныя предложенія объ умноженіи многочленовъ (см. выше § 9). Здѣсь геометрическій методъ имѣетъ болѣе глубокое значеніе, нежели въ теоріи чиселъ: если разсматривать

фигурирующія здѣсь величины дѣйствительно, какъ отрѣзки, и ихъ произведенія, какъ площади, то доказательство, по существу, аппеллируетъ къ геометрической интуиціи.

Въ 7-ой книгѣ даются опредѣленія (часто въ мало понятной формѣ), изъ которыхъ ясно вытекаетъ, что рѣчь идетъ только о цѣлыхъ положительныхъ (натуральныхъ) числахъ. Здѣсь даются опредѣленія четныхъ чиселъ, простыхъ чиселъ, взаимно простыхъ чиселъ, квадратныхъ чиселъ, кубическихъ чиселъ, совершенныхъ чиселъ. Изслѣдованіе начинается съ вопроса, который въ настоящее время всегда принимается за основу теоріи чиселъ, съ разысканія наибольшей общей мѣры двухъ чиселъ и распознаванія взаимно простыхъ чиселъ (VII, 1, 2. Евклидовъ алгориѳмъ; см. § 15).

Лишь значительно позже (VII, 34, 36) опредѣляется наименьшее кратное двухъ или нѣсколькихъ чиселъ и даются способы для его разысканія.

Далѣе (VII, 15, 16) приводится теорема о перемѣстимости множителей въ произведеніи, но доказывается она не при помощи площади прямоугольника, а посредствомъ мало наглядныхъ соображеній, основанныхъ на дѣленіи отрѣзковъ на единицы.

Особенно подчеркнуть нужно еще предложеніе VII, 30, заключающееся въ томъ, что произведеніе двухъ чиселъ можетъ дѣлиться на простое число только въ томъ случаѣ, если по крайней мѣрѣ одинъ изъ сомножителей дѣлится на это число. Это предложеніе, собственно говоря, содержитъ наиболѣе глубокое опредѣленіе простыхъ чиселъ и въ послѣднее время въ теоріи общихъ алгебраическихъ чиселъ и алгебраическихъ функцій привело къ доказательству существованія такъ называемыхъ идеальныхъ простыхъ множителей.

При помощи этого предложенія прежде всего доказывается, что каждое число либо представляетъ собой простое число, либо дѣлится на простое число. Отсюда непосредственно выводится, что каждое число однимъ и только однимъ способомъ разлагается на конечное число простыхъ множителей; впрочемъ, это предложеніе высказано у Евклида не достаточно опредѣленно. Только значительно ниже (IX, 14) приводится относящееся сюда же предложеніе, что произведеніе нѣсколькихъ простыхъ чиселъ не дѣлится ни на одно простое число, отличное отъ этихъ сомножителей. О степеняхъ простыхъ чиселъ здѣсь не упоминается.

Очень замѣчательно также доказательство предложенія, что число простыхъ чиселъ превышаетъ всякое число, которое можетъ быть указано, или, какъ мы теперь выражаемся, что число простыхъ чиселъ безконечно велико (IX, 20; § 16). Это доказательство отличается такой простотой и наглядностью, что врядъ ли оно можетъ быть замѣнено болѣе простымъ. Однако, это доказательство не можетъ быть распространено на болѣе глубокіе вопросы, напримѣръ, о числѣ простыхъ чиселъ въ ариѳметической

прогрессіи или о числѣ простыхъ множителей въ высшихъ числовыхъ корпусахъ. Поэтому, пріобрѣтаетъ важное значеніе другое доказательство, гораздо болѣе трудное и опирающееся на свойства безконечныхъ рядовъ. Доказательство это принадлежитъ Эйлеру и поздѣе было развито Дирихле.

Заключеніе IX книги, въ которой оканчивается изслѣдованіе цѣлыхъ чиселъ, содержитъ формулу суммы геометрической прогрессіи и основную теорему о совершенныхъ числахъ.

О жизни Евклида мы имѣемъ очень мало свѣдѣній: онъ жилъ въ царствованіе перваго Птоломея, который управлялъ Египтомъ отъ 324 до 285 г. до Р. Х., и училъ и писалъ въ Александріи. Его сочиненія, изъ которыхъ сравнительно многія дошли до насъ, во всѣ времена пользовались глубокимъ уваженіемъ, вышли въ многочисленныхъ изданіяхъ и переводахъ и вызвали очень обширную литературу. Изъ сочиненій, въ которыхъ можно найти болѣе подробныя свѣдѣнія по этому вопросу, мы приведемъ кромѣ общихъ сочиненій по исторіи математики, указанныхъ на страницахъ 567 и 568, только слѣдующія:

M. Cantor. „Euklid und sein Jahrhundert". Leipzig. 1867.

J. L. Heiberg. „Literaturgeschichtliche Studien über Euklid". Leipzig. 1882.

M. Simon. „Euklid und die sechs planimetrischen Bücher". Leipzig. 1901.

Изъ греческихъ авторовъ, писавшихъ послѣ Евклида по теоріи чиселъ, до Діофанта серьезное значеніе имѣетъ только Эратосѳенъ; изобрѣтенный имъ методъ разысканія простыхъ чиселъ былъ изложенъ выше на стр. 53 и 54.

Совершенно неожиданнымъ, безъ предшественниковъ, представляется появленіе Діофанта, личность и вся дѣятельность котораго кажутся до нѣкоторой степени загадочными. Нельзя сказать точно, назывался ли онъ Diophantus или Diophantes, хотя послѣднее начертаніе представляется болѣе вѣроятнымъ. Относительно времени его жизни можно съ увѣренностью указать только на промежутокъ отъ 180 г. до Р. Хр. до 370 г. послѣ Р. Хр., т. е. промежутокъ въ 550 лѣтъ; нѣкоторыя соображенія, болѣе или менѣе вѣроятныя, даютъ основаніе отнести расцвѣтъ его дѣятельности скорѣе къ концу этого періода. Онъ жилъ въ центрѣ современной греческой науки, въ Александріи, и писалъ по гречески. Но странность его появленія приводитъ Ганкеля даже къ предположенію, что Діофантъ не былъ грекомъ, а варваромъ, и что онъ происходилъ изъ одного изъ тѣхъ племенъ, которыя около этого времени стали проникать въ греческій міръ; предположеніе это, однако, никакихъ положительныхъ данныхъ за себя не имѣетъ.

Огромное большинство задачъ, разработкой которыхъ занимался Діофантъ, относится къ категоріи, сохранившей и по настоящее время его имя — Діофантовы задачи; это задачи о разысканіи цѣлыхъ чиселъ, удовлетворяющихъ извѣстнаго рода уравненіямъ. Если Діофантъ иногда

не ограничивается цѣлыми числами, а ищетъ раціональныя рѣшенія соотвѣтственныхъ уравненій, то въ этомъ нѣтъ принципіальной разницы, такъ какъ раціональное число представляетъ собой частное двухъ цѣлыхъ чиселъ [1]). Однако, самой простой изъ этихъ задачъ, рѣшенія неопредѣленнаго уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными, которое излагается въ настоящее время въ элементарныхъ школахъ подъ названіемъ ученія объ уравненіяхъ Діофанта и приводится къ Евклидову алгориѳму, этой именно задачи въ сочиненіяхъ Діофанта нѣтъ.

Эту задачу и ея рѣшеніе мы находимъ въ Европѣ послѣ Діофанта впервые только у Баше (въ Китаѣ и Индіи они были разрѣшены раньше) въ его сочиненіи „Занятныя и пріятныя задачи въ области чиселъ" *), а также въ его примѣчаніяхъ къ выпущенному имъ же первому печатному изданію Діофанта (1621). Я не раздѣляю той сдержанной оцѣнки, которую далъ ариѳметикѣ Діофанта Ганкель. Правда, въ задачахъ, поставленныхъ и разрѣшенныхъ Діофантомъ, нельзя найти внутренней связи, системы, или метода; но таковъ уже характеръ вопросовъ теоріи чиселъ, что они всегда кажутся произвольно поставленными и каждый изъ нихъ требуетъ своеобразнаго метода рѣшенія. „Эта вѣтвь математики представляетъ ту замѣчательную особенность, что здѣсь значительные успѣхи почти всегда были достигнуты попытками убѣдиться, что то или иное индуктивно найденное положеніе справедливо вообще; между тѣмъ во всѣхъ другихъ отрасляхъ анализа значительные результаты обыкновенно получались благодаря новымъ точкамъ зрѣнія, къ которымъ авторы рѣдко приходили путемъ попытокъ сконцентрировать отдѣльныя разрозненныя предложенія; новые горизонты чаще раскрывались благодаря сознанной необходимости, обнаружившейся при разработкѣ вопросовъ, недоступныхъ при прежнихъ методахъ изслѣдованія" **).

Къ изслѣдованію внутренней связи ариѳметическихъ вопросовъ приступлено только въ послѣднее время. Именно, эта произвольность, эта непосредственность въ методахъ изслѣдованія въ области теоріи чиселъ, которая иной разъ затрудняетъ начинающаго, составляетъ для знатока дѣла неотразимую прелесть этой дисциплины, обаяніе которой его никогда не покидаетъ. Во всякомъ случаѣ можно сказать, что теорія чиселъ построена на Діофантѣ; его книга во всѣ времена занимала наиболѣе талантливые умы.

[1]) И задача, такимъ образомъ, всегда сводится къ разысканію цѣлыхъ чиселъ.

*) Bachet de Méziriac. „Problèmes plaisants et délectables qui se font sur les nombres". 1612, 2-ое изд. 1624. Вновь переиздана въ Парижѣ въ 1884 г. Claude Gaspard Bachet, Sieur de Méziriac, іезуитъ, былъ профессоромъ риторики въ Миланѣ, а также членомъ французской Академіи въ Парижѣ 1587—1638.

**) Dirichlet. „Untersuchungen über die Theorie der quadratischen Formen"

Наиболѣе выдающійся французскій алгебраистъ XVI столѣтія Віета *) въ своемъ пятитомномъ „Zetetica“ собралъ рядъ задачъ, частью заимствованныхъ у Діофанта, часто составленныхъ по его образцамъ; такой же характеръ имѣетъ и книга Баше, о которой мы упоминали выше. Но самымъ крупнымъ изъ всѣхъ этихъ авторовъ по теоріи чиселъ, примыкающихъ къ Діофанту, является Ферматъ **). Важнѣйшія свои открытія въ области теоріи чиселъ онъ излагалъ въ письмахъ къ различнымъ ученымъ, а чаще въ видѣ примѣчаній на поляхъ сочиненій Діофанта, изданныхъ Баше. Послѣ его смерти всѣ эти сообщенія и примѣчанія были опубликованы его сыномъ въ новомъ изданіи Діофанта ***). Предложеніе, преимущественно извѣстное подъ названіемъ „теоремы Фермата“, согласно которому разность $a^n - a$ всегда дѣлится на n, если a есть произвольное цѣлое, а n простое число, и которое въ обобщеніи пріобрѣло величайшее значеніе для теоріи чиселъ, появилось въ первый разъ въ письмѣ къ Френиклю (Frénicle), относящемся къ 1640 г. Доказательство этого предложенія не представляетъ затрудненій; но съ другими теоремами, высказанными Ферматомъ, дѣло обстоитъ иначе.

Въ качествѣ примѣра можно указать предложеніе, которое Кронекеръ назвалъ „великой теоремой Фермата“, предложеніе, интересное не столько по своему содержанію, сколько по доказательству. Во второй книгѣ (задача 8, 3) Діофантъ изслѣдуетъ задачу о разложеніи полнаго квадрата на сумму двухъ другихъ квадратовъ. По этому поводу Ферматъ замѣчаетъ:

„Между тѣмъ совершенно невозможно разложить полный кубъ на сумму двухъ кубовъ, четвертую степень на сумму двухъ четвертыхъ степеней, вообще какую либо степень на сумму двухъ степеней съ тѣмъ же показателемъ. Я нашелъ истинно удивительное доказательство этого предложенія, но здѣсь (въ книгѣ, въ которую онъ записывалъ свои примѣчанія) слишкомъ мало мѣста, чтобы его помѣстить“.

Никакихъ другихъ указаній относительно доказательства этого предложенія у Фермата не найдено, а наиболѣе выдающимся изслѣдователямъ не удалось вновь его открыть. Для третьей и четвертой степеней пред-

*) François Vieta, 1560—1603 г.

**) Было бы правильнѣе называть его Ферма, но у насъ настолько установилось названіе „теорема Фермата“, что мы рѣшили сохранить эту неправильность имени.

Pierre Fermat родился въ 1601 г., умеръ въ 1665 г., былъ не математикомъ по спеціальности, а юристомъ (совѣтникомъ парламента въ Тулузѣ). Сочиненія Фермата въ послѣднее время переизданы П. Таннери и Ш. Генри (P. Tannery, Ch. Henry, Paris, 1891).

***) Эти примѣчанія приведены въ нѣмецкомъ переводѣ Діофанта, принадлежащемъ Вертгейму (Wertheim), также на нѣмецкомъ языкѣ.

ложеніе доказано Эйлеромъ, для пятой — Дирихле. Дальше идетъ доказательство Куммера, которое уже охватываетъ обширную категорію показателей; однако Куммеръ пользуется наиболѣе глубокими и трудными средствами анализа, которыми Ферматъ во всякомъ случаѣ еще не владѣлъ.

Иначе обстоитъ дѣло съ другой теоремой, которую Ферматъ считалъ правильной. именно, что увеличенная единицей степень числа 2, показателемъ которой также служитъ степень числа 2, есть простое число. Но здѣсь Ферматъ самъ заявляетъ, что ему еще не удалось дать исчерпывающее доказательство этого предложенія. Если бы это предложеніе было правильнымъ, то оно давало бы возможность находить сколь угодно большія простыя числа, для чего мы иныхъ средствъ въ настоящее время не имѣемъ. Однако, какъ показалъ Эйлеръ, предложеніе это неправильно: уже $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ разлагается на множителей, именно дѣлится на 641.

III. § 145. Историческія свѣдѣнія объ ирраціональныхъ числахъ.

Это дополненіе внесено авторомъ послѣ § 26.

Теорія ирраціональныхъ чиселъ также начинается съ Евклида. Пятая книга „Началъ" посвящена отношеніямъ. Опредѣленія 3 нельзя признать опредѣленіемъ слова „отношеніе"; но опредѣленіе 4 устанавливаетъ, въ какомъ случаѣ двѣ величины имѣютъ отношеніе, именно, если меньшая изъ нихъ, будучи повторена достаточное число разъ, превзойдетъ большую*).

Далѣе опредѣленіе 5 и 7 строго устанавливаютъ, въ какомъ случаѣ два отношенія равны и въ какомъ случаѣ одно отношеніе больше другого (§ 27,2). Опредѣленіе 3 замѣняетъ то, что мы въ настоящее время называемъ аксіомой непрерывности: послѣдняя въ книгѣ X, 1 находитъ слѣдующее выраженіе: если мы отъ нѣкоторой величины отнимемъ больше половины, отъ остатка вновь отнимемъ больше половины его и т. д., то мы такимъ образомъ всегда придемъ къ величинѣ, меньшей, нежели любая заданная величина (вмѣсто „больше половины" можно было бы брать любую дробь).

Что существуютъ соизмѣримыя и несоизмѣримыя величины, т. е. въ нашей терминологіи раціональныя и ирраціональныя отношенія, это, повидимому, ясно понималъ уже Пиѳагоръ. Евклидъ въ X книгѣ (9) показываетъ, что стороны двухъ квадратовъ, площади которыхъ не относятся

---

*) Это положеніе совпадаетъ съ V постулатомъ въ сочиненіи Архимеда „О цилиндрѣ и конусѣ" (изданіе Гейберга. Т. I стр. 11); поэтому оно извѣстно подъ названіемъ „Аксіомы Архимеда" (См. O. Stolz. „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik I. Mathematische Annalen XXXIX. Hilbert. „Grundlagen der Geometrie"). Исторически было бы правильнѣе называть это предложеніе Евклидовымъ; но это могло бы привести къ смѣшенію съ другими аксіомами Евклида.

между собой, какъ полные квадраты, несоизмѣримы. Частный случай этого предложенія разбирается особо въ книгѣ X, 117, гдѣ мы находимъ два доказательства, что діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороной. Это доказательство, намѣченное еще Аристотелемъ, обнаруживаетъ, что нѣтъ двухъ цѣлыхъ взаимно простыхъ чиселъ x и y, которыя удовлетворяютъ соотношенію $2x^2 = y^2$. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы такое равенство имѣло мѣсто, то y должно было бы быть четнымъ числомъ, а потому y^2 должно было бы дѣлиться на 4. Но въ такомъ случаѣ x^2 должно было бы дѣлиться на 2, и x было бы четнымъ числомъ. Между тѣмъ это невозможно, такъ какъ x и y не имѣютъ общихъ множителей.

Еслибы Евклидъ объединилъ всѣ равныя между собой отношенія въ одну идею (въ одно родовое понятіе), то онъ далъ бы строгое опредѣленіе общаго понятія о числѣ (раціональномъ и ирраціональномъ). Но такая мысль далека отъ тѣхъ точекъ зрѣнія, на которыхъ стоялъ Евклидъ *). Лишь въ новѣйшее время сознательно установлены такія системы понятій (категоріи), которыя можно разсматривать, какъ общее опредѣленіе числа. Всѣ эти системы равносильны, если между ними можетъ быть установлено взаимно-однозначное сопряженіе.

Соотвѣтствующіе элементы всѣхъ этихъ системъ, равно какъ и тѣхъ системъ, которыя еще, быть можетъ, будутъ построены со временемъ, могутъ быть, въ свою очередь, объединены въ одно родовое понятіе, которое представляло бы понятіе о числѣ въ еще болѣе глубокомъ смыслѣ. Изъ этихъ системъ, которыя, такимъ образомъ, могутъ быть разсматриваемы какъ представители понятія о числѣ, наиболѣе важными и наиболѣе простыми являются тѣ, которыя установлены Р. Дедекиндомъ и Г. Канторомъ. Оба автора исходятъ уже изъ понятія о раціональномъ числѣ, которое они принимаютъ, какъ извѣстное. Дедекиндъ **) построилъ понятіе о сѣченіи (въ области раціональныхъ чиселъ, см. § 22, 4). Канторъ же примѣняетъ для той же цѣли понятіе о числовыхъ рядахъ ***). Въ тѣсной связи съ числовыми рядами Кантора находятся такъ называемые „варіанты“ (variantes), къ которымъ прибѣгаетъ Мерэ для опредѣленія ирраціональнаго числа ****). Болѣе подробныя свѣдѣнія о литературѣ этого вопроса

---

*) Евклидъ опредѣляетъ понятія „раціональное и ирраціональное“ (ῥητός, ἄλογος) такимъ образомъ, что онъ нѣкоторый опредѣленный отрѣзокъ и всѣ соизмѣримые съ нимъ отрѣзки называетъ раціональными, а всѣ несоизмѣримые съ нимъ отрѣзки — ирраціональными. Впрочемъ, квадратные корни онъ при этомъ относитъ къ раціональнымъ числамъ.

**) R. Dedekind. „Stetigkeit und Irrazionale Zahlen“. Braunschweig. 1872.
Имѣется русскій переводъ, принадлежащій С. Шатуновскому:
Р. Дедекиндъ. „Непрерывность и ирраціональныя числа“. Одесса. 1906. Mathesis

***) Mathematische Annalen. V.

****) Ch. Méray, Revue des sociétées savantes: sc. math. 1869. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale. Première partie, chapitre II. Paris 1894.

можно найти въ статьѣ Прингсгейма „Ирраціональныя числа и сходимость безконечныхъ процессовъ“ въ I томѣ „Энциклопедіи Математическихъ наукъ“. Еще обстоятельнѣе вопросъ изложенъ Молькомъ въ I томѣ французскаго изданія энциклопедіи.

Нельзя не отмѣтить, что Кронекеръ вовсе отвергаетъ понятіе объ ирраціональномъ числѣ и стремится облечь всю математику въ такую форму, чтобъ она оперировала только цѣлыми числами. Возможность такой постановки вопроса, какъ замѣчаетъ Дедекиндъ, высказывалъ уже Дирихле. Но именно для того, чтобы избѣжать необычайной сложности, которая съ такой постановкой связана, наша наука и расширяла систематически понятіе о числѣ; это производилось постепенно, сообразно обнаруживавшейся потребности въ совершенно безукоризненно логической формѣ, и именно поэтому точка зрѣнія Кронекера по сіе время не нашла себѣ послѣдователей.

Нужно однако сказать, что изслѣдованія, относящіяся къ теоріи комплексовъ, не во всѣхъ пунктахъ привели къ достаточно яснымъ результатамъ. Такъ въ самое послѣднее время возникли нѣкоторыя сомнѣнія, которыя связаны съ противорѣчивымъ понятіемъ о „комплексѣ всѣхъ комплексовъ“ и которыя еще недостаточно выяснены. По этому вопросу нужно упомянуть сочиненія Фреге „Основные законы ариѳметики“ и Русселя „Основанія математики“ *). Послѣднее сочиненіе содержитъ также и другія интересныя изслѣдованія, относящіяся къ теоріи познанія. Въ „Отчетахъ Гейдельбергскаго конгресса 1904 г.“ **) Гильбертъ далъ обзоръ своихъ изслѣдованій, которыя также еще нуждаются въ дальнѣйшемъ выясненіи.

IV. § 146. Историческія свѣдѣнія о логариѳмахъ.

Это дополненіе вставлено авторомъ послѣ § 38.

Когда съ возрожденіемъ наукъ въ XV и XVI столѣтіяхъ вновь ожила астрономія, то очень скоро сказалась потребность въ новыхъ дѣйствительныхъ средствахъ, которыя дали бы возможность справиться съ большими числовыми вычисленіями. Тригонометрія развилась и дала астроному практическія средства для вычисленія, а для тригонометріи были вычислены обширныя таблицы, среди которыхъ наиболѣе значительными является „Opus Palatinum“. Этотъ обширный трудъ былъ начатъ на средства курфюрста Пфальцскаго Фридриха IV Георгомъ Ретикусомъ ***), который

*) Frege. „Grundgesetze der Arithmetik“ 2 Bd., Iena 1893. B. Russel. „The Principles of mathematics“, Cambridge. 1903.

**) Verhandlungen des dritten Kongresses der Mathematiker in Heidelberg vom 8 bis 13 August 1904.

***) Georg Joachim Rhaeticus родился въ 1514 году въ Фельдкирхѣ въ Форарельбергѣ, умеръ въ 1576 году въ Кашау въ Венгріи.

велъ эти вычисленія въ теченіе многихъ лѣтъ; послѣ его смерти таблицы были закончены Валентиномъ Отто (Valentin Otto въ 1596 году въ Нейштатѣ). Позже эти таблицы были просмотрѣны и исправлены Варѳоломеемъ Питискусомъ (Bartholomaeus Pitiscus, Thesaurus mathematicus, Frankfurt. 1613).

Особенно затруднительнымъ всегда было выполненіе умноженія, поглощающее много времени; отсюда стремленіе замѣнить его сложеніемъ. Первыя попытки въ этомъ направленіи, естественно, примыкали не къ логариѳмамъ, а къ тригонометріи; тригонометрическія функціи въ то время уже представляли собой хорошо извѣстныя, вошедшія въ практику орудія вычисленія, между тѣмъ какъ понятіе о показательной функціи, о степеняхъ съ дробными показателями было въ то время математикамъ совершенно чуждо. Къ этому присоединялось то обстоятельство, что тригонометрическія таблицы находились уже въ распоряженіи вычислителей и давали прекрасныя средства для вычисленія. Такимъ образомъ возникла метода, извѣстная подъ своеобразнымъ названіемъ „Prosthaphaeresis“ (отъ словъ πρόςθεσις и ἀφαίρεσις — прибавленіе и отниманіе), сущность которой сводилась къ примѣненію извѣстныхъ тригонометрическихъ формулъ:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Если поэтому нужно было вычислить произведеніе двухъ правильныхъ дробей, то по таблицамъ можно было разыскать два угла α и β, косинусами или синусами которыхъ были данныя числа. Тогда оставалось по таблицамъ розыскать косинусы суммы и разности этихъ угловъ, сложить ихъ (или вычесть) и полученное число раздѣлить на 2.

Этотъ пріемъ значительно сложнѣе логариѳмическаго вычисленія; онъ, напримѣръ, не можетъ быть непосредственно распространенъ на дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня. Но, по существу, онъ покоится на той же основной идеѣ; при современной же точкѣ зрѣнія на тригонометрическія функціи, какъ на показательныя функціи съ мнимыми показателями, онъ и фактически находится въ непосредственной связи съ логариѳмами.

Этотъ методъ былъ изобрѣтенъ Нюренбергскимъ священникомъ Іоанномъ Вернеромъ (Johannes Werner, 1468—1528), который принадлежалъ къ кружку знаменитаго гуманиста Пиркгеймера (Willibald Pirkheimer); но она была забыта, а затѣмъ вновь найдена, развита и доказана въ обсерваторіи Тихо-Браге въ Ураніенбургѣ (1580), а также при дворѣ кур-

фюрста Вильгельма IV въ Касселѣ (1532—1592), оказавшаго значительныя услуги астрономіи *).

Однако теорія логариѳмовъ оставила далеко за собой всѣ эти попытки. Какъ это обыкновенно бываетъ съ значительными открытіями, появленію логариѳмовъ предшествовали другія, менѣе удачныя попытки того же рода и точно установить здѣсь пріоритетъ не такъ легко. Къ тому же заслуга автора заключается здѣсь скорѣе въ осуществленіи идеи, въ рѣшимости посвятить цѣлую жизнь такимъ гигантскимъ вычисленіямъ, чѣмъ въ открытіи самой идеи, по существу, крайне простой.

Уже въ книгѣ Архимеда „ψαμμίτης" авторъ въ одномъ мѣстѣ показываетъ, что въ ряду чиселъ, которыя, начиная съ единицы, возрастаютъ въ геометрической прогрессіи, произведеніе двухъ чиселъ можетъ быть найдено такимъ образомъ, что мы отыщемъ число, отстоящее отъ перваго на столько же членовъ ряда, на сколько второе отстоитъ отъ единицы. По существу, какъ мы видимъ, это есть основное положеніе логариѳмическаго вычисленія. Но только въ эпоху возрожденія наукъ эта идея на практикѣ находитъ себѣ осуществленіе.

Однимъ изъ наиболѣе замѣчательныхъ предшественниковъ является Михаилъ Штифель (Michael Stifel, род. въ Эслингенѣ, въ Вюртембергѣ, въ 1486 или 1487 году, умеръ въ Іенѣ въ 1567 г.). Онъ былъ августинскимъ монахомъ, перешелъ въ ученіе Лютера, съ которымъ сдружился и работалъ въ качествѣ проповѣдника въ различныхъ мѣстахъ **). Въ 1544 г. Штифель напечаталъ въ Нюренбергѣ сочиненіе „Arithmetica integra", въ которой онъ ставитъ члены ариѳметической прогрессіи въ связь съ членами геометрической прогрессіи слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{cccccccccc} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \end{array}$$

Числа верхняго ряда онъ называетъ показателями; онъ знаетъ, что оба ряда могутъ быть неограничено продолжены въ обѣ стороны и что сложенію, вычитанію, умноженію и дѣленію чиселъ перваго ряда отвѣчаютъ во второмъ ряду умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корня; онъ знаетъ, такимъ образомъ, основныя свойства логариѳмовъ. Но о томъ, что промежуточнымъ числамъ перваго ряда также могутъ быть отнесены числа второго ряда, объ этомъ, т. е. о непрерывности логариѳмовъ, которая собственно и дѣлаетъ ихъ практическимъ средствомъ вычисленія, мы не находимъ у Штифеля никакого слѣда.

*) Этимъ занимались Paul Wittich, Raymarus Ursus и Iobst Bürgi. См. Braunmühl. „Vorlesungen über der geschichte der Geometrie".

**) Болѣе обстоятельныя свѣдѣнія объ этомъ замѣчательномъ человѣкѣ можно найти въ статьѣ М. Кантора въ „Allgemeine Deutsche Biographie".

Этимъ шагомъ, а также построеніемъ первой таблицы логариѳмовъ мы обязаны двумъ математикамъ, которые работали почти одновременно, но независимо другъ отъ друга.

I. Бюрги, швейцарецъ (Iobst Bürgi, 1552—1632) изъ Лихтенштейга въ Тоггенбургѣ работалъ большую часть своей жизни въ Касселѣ, на службѣ у курфюрста Вильгельма IV, который особенно цѣнилъ его за способности къ механикѣ; въ промежуткахъ онъ работалъ также въ Прагѣ, гдѣ онъ находился въ сношеніяхъ съ Кеплеромъ. Его „Arithmetische und geometrische Progress-tabulen“ были вычислены между 1603 и 1611 годами, но появились въ печати только въ 1620 году. По описанію Браунмюля (Braunmühl) устройство этихъ таблицъ заключалось въ томъ, что въ первомъ ряду помѣщены числѣ вида $x = 10^n$ (красныя числа) а во второмъ ряду соотвѣтствующія числа $y = 10^8(1{,}0001)^n$ при $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ (черныя числа). Такимъ образомъ

$$y = 10^8\left[\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{x}{10^5}},$$

а потому $x = 10^5 \log(y 10^{-8})$, если за основаніе принято число $(1+1/10^4)^{10^4}$, каковое отличается отъ основанія e нашихъ натуральныхъ логариѳмовъ только въ четвертомъ десятичномъ знакѣ. Такимъ образомъ таблица Бюрги представляетъ собой, строго говоря, таблицу антилогариѳмовъ, т. е. таблицу, въ которой мы по каждому логариѳму непосредственно находимъ соотвѣтствующее число. И здѣсь мы имѣемъ, такимъ образомъ, натуральные логариѳмы. Однако идея разсматривать числа, какъ степени одного опредѣленнаго основанія, а логариѳмы, какъ показателей, была Бюрги совершенно чужда.

Джонъ Неперъ (Neper или Napier, Baron von Merchiston) род. въ 1550 году вблизи Эдинбурга и жилъ до самой смерти (1617) въ Шотландіи. Его „Descriptio mirifici logarithmorum canonis“ появилось въ печати въ 1614 году.

Неперъ въ эпоху, когда наше понятіе о функціи еще не было выработано, очень остроумно и наглядно представляетъ послѣдовательность логариѳмовъ и чиселъ. Онъ представляетъ себѣ двѣ точки, одновременно движущіяся по прямой линіи. Первая точка проходитъ равныя разстоянія въ равные промежутки времени; если поэтому путь (x), который онъ проходитъ въ элементъ времени, есть Δ, то въ n элементовъ времени

$$x = n\Delta;$$

вторая же точка движется къ опредѣленной конечной точкѣ такимъ обзомъ, что въ каждый элементъ времени она пробѣгаетъ опредѣленную $1/m$ часть остающагося пути. Если въ первый моментъ вторая точка также пробѣгаетъ разстояніе Δ, то весь ея путь составляетъ $m\Delta$. Если

мы это разстоянiе примемъ за единицу, то путь, остающiйся послѣ перваго элемента времени есть

$$(m-1)\Delta = \left(1-\frac{1}{m}\right);$$

по истеченiи же n элементовъ времени разстоянiе второй точки отъ конца пути есть

$$y = \left(1-\frac{1}{m}\right)^n.$$

Такимъ образомъ

$$y = \left(1-\frac{1}{m}\right)^{mx}.$$

т. е. x есть логариѳмъ числа y при основанiи $\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^m$.

Неперъ принялъ $m = 10^7$, такъ что число $\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^m$ очень близко подходитъ къ e^{-1}.

Лагранжъ, который въ своихъ дидактическихъ сочиненiяхъ обыкновенно даетъ прекрасное изложенiе историческаго развитiя дисциплины, въ своихъ „Leçons élémentaires“ *) въ главѣ о логариѳмахъ указываетъ, что задача о музыкальной шкалѣ почти необходимо должна была привести къ понятiю о логариѳмахъ. Если мы обозначимъ основной тонъ черезъ единицу, то гармоническiе интервалы получаются дѣленiемъ струны монохорда въ очень простыхъ отношенiяхъ; объ этомъ знали еще пиѳагорейцы. Обратныя значенiя этихъ отношенiй, которыя мы называемъ числами колебанiй, суть:

Основной тонъ	1
Секунда	9/8
Малая терцiя	6/5
Большая терцiя	5/4
Кварта	4/3
Квинта	3/2
Секста	5/3
Септима	15/8
Октава	2.

Въ этой таблицѣ квинта секунды, напримѣръ, которой соотвѣтствуетъ число 27/16, вовсе отсутствуетъ; чтобы получать частые интервалы, нужно еще, такимъ образомъ, вставлять промежуточные тоны. Между тѣмъ, еслибы числа колебанiй можно было бы расположить въ геометрическую прогрессiю, то мы получили бы гамму, въ которой каждое число колебанiй

*) Leçons élémentaires sur les mathématiques, données à l'école normale en 1795. Oeuvres de Lagrange, Tome VII.

находится въ одномъ и томъ же отношенiи къ предыдущему; исходя отъ любого тона, можно было бы такимъ образомъ получить ту же послѣдовательность интерваловъ. Изъ практическихъ соображенiй это постоянное отношенiе не должно быть слишкомъ мало; опытъ музыкантовъ призналъ достаточнымъ 12 тоновъ на октаву. Въ этой, такъ называемой, равномѣрной модерацiи интервалы осуществляются не во всей чистотѣ, а лишь приближенно. Поэтому, если мы будемъ выражать высоту тона логариѳмомъ числа колебанiй и раздѣлимъ lg 2 на 12 равныхъ частей, то мы получимъ лучшiй способъ модерацiи.

Самыя числа колебанiй будутъ въ такомъ случаѣ:

$$1, \quad 2^{1/12}, \quad 2^{2/12}, \quad 2^{3/12}, \quad \ldots, \quad 2^{11/12}, \quad 2.$$

Для секунды, напримѣръ, мы получаемъ 1,123..., между тѣмъ какъ точное число есть 1,125. Для квинты мы получаемъ 1,4983 вмѣсто точнаго числа 1.5.

V. § 147. Опредѣлители.

Этотъ параграфъ вставленъ въ началѣ X главы.

---

1. Подраздѣленiе перестановокъ на четныя и нечетныя, приведенное въ § 51, составляетъ основу общей теорiи опредѣлителей, которая даетъ общiй методъ для рѣшенiя системы n уравненiй первой степени съ n неизвѣстными $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Такая система содержитъ n^2 коэффицiентовъ; столь же велико число соединенiй изъ n цифръ $1, 2, 3, \ldots, n$ по два съ повторенiями, если принимать во вниманiе и порядокъ цифръ. Поэтому коэффицiенты удобнѣе всего обозначать символами вида $a_{i,k}$; всѣ индексы i и k независимо одинъ отъ другого принимаютъ всевозможныя значенiя $1, 2, 3, \ldots, n$.

Такимъ образомъ, систему n линейныхъ уравненiй можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= y_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= y_n. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Мы будемъ предварительно разсматривать систему коэффицiентовъ независимо отъ уравненiй (1) и для наглядности напишемъ ее въ видѣ квадрата

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Здѣсь первый индексъ коэффиціента $a_{i,k}$ означаетъ горизонталь или строку, въ которой этотъ коэффиціентъ стоитъ, а второй индексъ, обозначаетъ соотвѣтствующую вертикаль или колонну.

Изъ этой таблицы коэффиціентовъ мы образуемъ опредѣленную численную величину или функцію коэффиціентовъ $a_{i,k}$, которую мы назовемъ опредѣлителемъ и составимъ по слѣдующему правилу. Составимъ прежде всего произведеніе α чиселъ $a_{i,k}$, занимающихъ въ квадратной таблицѣ діагональныя мѣста, иначе говоря, всѣхъ тѣхъ коэффиціентовъ $a_{i,k}$, въ которыхъ оба индекса имѣютъ одинаковыя значенія:

$$M = a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n\,n}.$$

Это произведеніе мы назовемъ главнымъ членомъ опредѣлителя. Затѣмъ въ выраженіи M произведемъ всѣ перестановки $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вторыхъ индексовъ и каждому полученному такимъ образомъ произведенію

$$M_\alpha = a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n} \qquad (3)$$

сообщаемъ знакъ $+$ или $-$, смотря по тому есть ли соотвѣтствующая перестановка четнаго или нечетнаго порядка. Мы получаемъ такимъ образомъ $n!$ членовъ, сумма которыхъ

$$A = \sum \pm M_\alpha \qquad (4)$$

и называется опредѣлителемъ системы (1); самый квадратъ (2), заключенный между двумя вертикальными чертами, служитъ также для обозначенія опредѣлителя; короче пишутъ также:

$$A = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}. \qquad (5)$$

Если, напримѣръ, положимъ $n = 3$, то согласно § 51, получимъ:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \\ + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \\ + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}. \end{array}$$

Это вполнѣ совпадаетъ съ выраженіемъ приведеннымъ въ § 40, (8), если примемъ во вниманіе нѣкоторое различіе въ обозначеніяхъ.

Каждый изъ членовъ M_α, изъ которыхъ состоитъ опредѣлитель A, представляетъ собой произведеніе n множителей; въ каждомъ членѣ какъ первый индексъ, такъ и второй получаютъ по одному разу каждое изъ значеній 1, 2, 3 . . . n. Иными словами, въ составъ каждаго члена всегда входитъ одинъ элементъ изъ каждой горизонтали и одинъ элементъ изъ каждой вертикали.

3. Если мы въ одномъ изъ произведеній M_α переставимъ множителей, то значеніе этого произведенія не измѣнится; поэтому множителей

можно также расположить такимъ образомъ, чтобы вторые индексы 1, 2, 3 ... n были расположены въ натуральной послѣдовательности. Тогда первые индексы образуютъ перестановку β, обратную перестановкѣ α [1]). Такъ какъ α и β суть перестановки одного и того-же класса [2]), то мы можемъ составить опредѣлитель и такимъ образомъ, что мы всѣми возможными способами переставимъ первые индексы, а затѣмъ при каждомъ членѣ поставимъ знакъ $+$ или $-$, руководствуясь тѣмъ же правиломъ п. 2-го въ примѣненіи къ перестановкамъ первыхъ индексовъ. Это мы можемъ выразить слѣдующимъ образомъ:

Опредѣлитель не мѣняется, если мы въ немъ замѣнимъ вертикали горизонталями и обратно.

4. Если мы въ перестановкѣ α замѣнимъ другъ другомъ какіе либо два индекса, то четныя перестановки переходятъ въ нечетныя и обратно. Поэтому каждый членъ M_α переходитъ въ другой, который фигурируетъ въ выраженіи A, но съ противоположнымъ знакомъ.

Но такой перестановкѣ двухъ индексовъ отвѣчаетъ перестановка двухъ вертикалей въ таблицѣ (2); такъ какъ, согласно п. 3, то же справедливо и относительно горизонталей, то мы получаемъ теорему:

Опредѣлитель мѣняетъ знакъ, если мы въ немъ замѣстимъ другъ другомъ двѣ вертикали или двѣ горизонтали.

5. Если соотвѣтствующіе элементы двухъ рядовъ, о перестановкѣ которыхъ идетъ рѣчь въ п. 4, имѣютъ одинаковыя численныя значенія, то отъ перестановки этихъ двухъ рядовъ, опредѣлитель вовсе не мѣняется. Между тѣмъ, согласно предыдущей теоремѣ, опредѣлитель долженъ при этомъ перемѣнить знакъ. Такимъ образомъ доказано предложеніе:

Если въ опредѣлителѣ соотвѣтствующіе члены двухъ вертикалей или двухъ горизонталей равны, то опредѣлитель равенъ нулю.

6. Повторнымъ примѣненіемъ теоремы 4, докажемъ:

Если мы въ опредѣлителѣ A какимъ либо образомъ переставимъ его вертикали или его горизонтали, то абсолютная ве-

---

[1]) См. § 50, 8. Въ произведеніи M_α вторые индексы образуютъ нѣкоторую перестановку α. Чтобы перейти отъ перестановки α къ натуральной послѣдовательности, нужно сдѣлать субституцію, обратную той, которая приводитъ отъ натуральной послѣдовательности къ перестановкѣ α. Эту именно субституцію мы произведемъ надъ первыми индексами, когда будемъ размѣщать множителей такъ, чтобы вторые индексы образовали натуральную послѣдовательность. Вотъ почему послѣ этого первые индексы составятъ перестановку β, обратную перестановкѣ α.

[2]) Если мы отъ натуральной послѣдовательности къ перестановкѣ α приходимъ четнымъ числомъ транспозицій, то мы и къ перестановкѣ β перейдемъ четнымъ числомъ транспозицій, такъ какъ для этого достаточно произвести тѣ же транспозиціи только въ обратномъ порядкѣ.

личина опредѣлителя не измѣнится; что касается знака, то онъ сохранится, если произведена четная перестановка, при нечетной же перестановкѣ знакъ мѣняется на обратный.

Формулой это можно выразить слѣдующимъ образомъ: если α_1, α_2, α_3, . . ., α_n есть перестановка индексовъ 1, 2, 3, . . ., n, то

$$\Sigma \pm a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n} = \pm A, \qquad (6)$$

гдѣ въ правой части нужно взять знакъ $+$, если α есть четная перестановка, знакъ $-$, если это перестановка нечетная

7. Отсюда легко вывести теорему умноженія опредѣлителей; эта теорема содержитъ въ себѣ правило, согласно которому произведеніе двухъ опредѣлителей одного и того-же порядка можетъ быть представлено въ видѣ опредѣлителя того же порядка.

Чтобы вывести эту формулу, мы на время воспользуемся нѣсколько болѣе точнымъ обозначеніемъ.

Положимъ, что ν пробѣгаетъ всѣ перестановки ν_1, ν_2, . . ., ν_n; пусть $(-1)^\nu$ будетъ равно $+1$ или -1, смотря по тому, будетъ ли соотвѣтствующая перестановка четной или нечетной. Тогда мы можемъ представить выраженіе A (4) или (5) въ видѣ:

$$A = \overset{\nu}{\Sigma} (-1)^\nu a_{\nu_1,1} a_{\nu_2,2} \ldots a_{\nu_n,n}. \qquad (7)$$

Если α есть произвольная перестановка вторыхъ индексовъ, то, согласно соотношенію (6),

$$(-1)^\alpha A = \overset{\nu}{\Sigma} (-1)^\nu a_{\nu_1,\alpha_1} a_{\nu_2,\alpha_2} \ldots a_{\nu_n,\alpha_n}. \qquad (8)$$

Пусть теперь $b_{i,k}$ будетъ другая система величинъ, подобная системѣ $a_{i,k}$; пусть

$$B = \overset{\alpha}{\Sigma} (-1)^\alpha b_{1,\alpha_1} b_{2,\alpha_2} \ldots b_{n,\alpha_n} \qquad (9)$$

будетъ составленный изъ нихъ опредѣлитель.

Если мы помножимъ равенство (8) на $b_{1,\alpha_1} b_{2,\alpha_2} \ldots b_{n,\alpha_n}$ и возьмемъ сумму полученныхъ выраженій, соотвѣтствующихъ всѣмъ возможнымъ перестановкамъ α, то мы получимъ:

$$AB = \overset{\alpha}{\Sigma} b_{1,\alpha_1} b_{2,\alpha_2} \ldots b_{n,\alpha_n} \overset{\nu}{\Sigma} (-1)^\nu a_{\nu_1,\alpha_1} a_{\nu_2,\alpha_2} \ldots a_{\nu_n,\alpha_n}. \qquad (10)$$

Здѣсь нужно произвести суммованіе сначала по ν, сохраняя одну и ту-же перестановку α, а затѣмъ нужно произвести суммованіе по α, распространяя его на всѣ возможныя перестановки вторыхъ индексовъ. Такъ какъ α есть перестановка вторыхъ индексовъ, то въ каждомъ членѣ ин-

дексы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ имѣютъ всѣ различныя значенія. Съ другой стороны, согласно п. 5, сумма взятая по ν была бы равна 0, еслибы два индекса α были равны между собой, напримѣръ:

$$\sum^{\nu} (-1)^{\nu} a_{\nu_1, \alpha_2} a_{\nu_2, \alpha_2} \ldots a_{\nu_n, \alpha_n} = 0.$$

Вслѣдствіе этого соотношеніе (10) останется въ силѣ, если при суммованіи по α будемъ давать двумъ или нѣсколькимъ индексамъ одно и то же значеніе. Мы можемъ поэтому сказать, что въ выраженіи (10) индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ независимо одинъ отъ другого пробѣгаютъ всѣ значенія $1, 2, \ldots, n$. Вмѣстѣ съ тѣмъ самое соотношеніе (10) мы можемъ написать въ такомъ видѣ:

$$AB = \sum^{\nu} (-1)^{\nu} \sum^{\alpha_1} b_{1, \alpha_1} a_{\nu_1, \alpha_1} \sum^{\alpha_2} b_{2, \alpha_2} a_{\nu_2, \alpha_2} \ldots \sum^{\alpha_n} b_{n, \alpha_n} a_{\nu_n, \alpha_n}. \quad (11)$$

Съ другой стороны, если мы введемъ обозначенія:

$$c_{i,k} = b_{i,1} a_{k,1} + b_{i,2} a_{k,2} + \ldots + b_{i,n} a_{k,n}, \quad (12)$$

то правая часть предыдушаго равенства приметъ видъ:

$$\sum (-1)^{\nu} c_{1,\nu_1} c_{2,\nu_2} \ldots c_{n,\nu_n};$$

въ прежнихъ обозначеніяхъ это есть не что иное, какъ опредѣлитель

$$C = \sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn},$$

и мы получаемъ такимъ образомъ формулу

$$AB = C, \quad (13)$$

или подробнѣе:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \ldots, & b_{n,n} \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$= \begin{vmatrix} \sum^{i} a_{1,i} b_{1,i}, & \sum^{i} a_{1,i} b_{2,i}, & \ldots, & \sum^{i} a_{1,i} b_{n,i} \\ \sum^{i} a_{2,i} b_{1,i}, & \sum^{i} a_{2,i} b_{2,i}, & \ldots, & \sum^{i} a_{2,i} b_{n,i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum^{i} a_{n,i} b_{1,i}, & \sum^{i} a_{n,i} a_{2,i}, & \ldots, & \sum^{i} a_{n,i} b_{n,i} \end{vmatrix}.$$

Здѣсь литера i, по которой производится суммованіе, пробѣгаетъ въ каждой суммѣ черезъ всѣ значенія отъ 1 до n.

Въ словахъ это правило можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

Чтобы составить произведеніе двухъ опредѣлителей, состоящихъ каждый изъ n строкъ, перемножаемъ элементы i-ой строки на соотвѣтствующіе элементы k-ой строки и составляемъ сумму полученныхъ произведеній. Этимъ путемъ мы получимъ элементъ $c_{i,k}$ новаго опредѣлителя.

Такъ какъ въ каждомъ опредѣлителѣ горизонтали могутъ быть сдѣланы вертикалями, то такое произведеніе можно составить четырьмя различными способами.

8. Чтобы выдѣлить тѣ члены опредѣлителя

$$A = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

которые содержатъ элементъ $a_{1,1}$, достаточно оставить на своемъ мѣстѣ второй индексъ 1 и переставить всѣми возможными способами остальные индексы 2, 3, . . ., n; совокупность всѣхъ этихъ членовъ можетъ быть, слѣдовательно, представлена въ видѣ $a_{1,1} A_{1,1}$, гдѣ $A_{1,1}$ есть опредѣлитель, составленный изъ $n-1$ горизонталей:

$$A_{1,1} = \Sigma \pm a_{2,2} a_{3,3} \ldots a_{n,n}. \tag{15}$$

Этотъ опредѣлитель можно получить изъ даннаго опредѣлителя, написаннаго въ формѣ квадрата, если зачеркнуть въ немъ горизонталь и вертикаль, скрещивающіяся на элементѣ $a_{1,1}$.

9. Съ другой стороны, при помощи $i-1$ транспозицій можно привести i-тую строку на первое мѣсто; точно также при помощи $k-1$ транспозицій можно k-ую вертикаль сдѣлать первой. При этомъ опредѣлитель пріобрѣтаетъ множителя $(-1)^{i+k}$, а элементъ $a_{i,k}$ оказывается на мѣстѣ, которое занималъ элементъ $a_{1,1}$. Теперь мы можемъ составить совокупность членовъ, содержащихъ элементъ $a_{i,k}$ по формулѣ (15). Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ:

Если мы положимъ совокупность всѣхъ членовъ, содержащихъ элементъ $a_{i,k}$, равной $a_{i,k} A_{i,k}$, то $A_{i,k}$ есть опредѣлитель, составленный изъ $n-1$ горизонталей, который можно получить изъ даннаго опредѣлителя A, вычеркивая въ немъ горизонталь и вертикаль, скрещивающіяся на элементѣ $a_{i,k}$ и умножая полученный опредѣлитель на $(-1)^{i+k}$.

Эти величины $A_{i,k}$ называются **минорами** опредѣлителя A. Въ выраженіи минора $A_{i,k}$ въ качествѣ перваго индекса не фигурируетъ i, а въ качествѣ второго индекса не фигурируетъ k.

Миноры опредѣлителя изъ 9 элементовъ приведены въ § 40, (3).

10. Если мы составляемъ опредѣлитель A изъ главнаго члена $a_{1,1}, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$, переставляя первые индексы, то мы видимъ, что въ

каждомъ членѣ его фигурируетъ одинъ и только одинъ изъ множителей

$$a_{1,1},\ a_{2,1},\ a_{3,1},\ \ldots,\ a_{n,1}.$$

Ссобразно этому, опредѣлитель A можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$A = a_{1,1} A_{1,1} + a_{2,1} A_{2,1} + \ldots + a_{n.1} A_{n,1}.$$

Это тождество называется разложеніемъ опредѣлителя по элементамъ первой вертикали. Точно также мы можемъ разложить опредѣлитель по элементамъ любой другой вертикали; вообще, полагая k равнымъ любому изъ чиселъ 1, 2, 3 . . . n, мы можемъ написать опредѣлитель A въ формѣ:

$$A = a_{1,k} A_{1,k} + a_{2,k} A_{2,k} + \ldots + a_{n.k} A_{n,k}. \qquad (16)$$

11. Въ минорахъ $A_{1,k}$, $A_{2,k}$, . . ., $A_{n,k}$ элементы k-ой вертикали не фигурируютъ. Съ другой стороны, если мы замѣнимъ элементы $a_{1,k}$, $a_{2.k}$ .. $a_{n,k}$ элементами любой другой вертикали $a_{1,i}$, $a_{2,i}$, . . ., $a_{n,i}$, то опредѣлитель, согласно п. 5, обращаетъ въ нуль. Если поэтому i и k суть два различныхъ индекса, то

$$0 = a_{1,i} A_{1,k} + a_{2,i} A_{2,k} + \ldots + a_{n,i} A_{n.k}. \qquad (17)$$

12. Если мы, согласно п. 3, замѣнимъ горизонтали вертикалями, то мы получимъ новый рядъ формулъ вида:

$$A = a_{k,1} A_{k,1} + a_{k,2} A_{k,2} + \ldots + a_{k,n} A_{k,n}, \qquad (18)$$

$$0 = a_{i,1} A_{k,1} + a_{i,2} A_{k.2} + \ldots + a_{i,n} A_{k,n}. \qquad (19)$$

Изъ этихъ тождествъ можно очень легко получить рядъ важныхъ предложеній, касающихся опредѣлителей. Такъ изъ разложеній (16) и (18) мы получаемъ непосредственно:

13. Если всѣ элементы одной горизонтали или одной вертикали имѣютъ общаго множителя, то этотъ общій множитель можетъ быть вынесенъ за знакъ опредѣлителя.

14. Если мы помножимъ равенство (17) на неопредѣленнаго множителя λ и прибавимъ къ равенству (16), то мы получимъ:

$$A = (a_{1.k} + \lambda a_{1,i}) A_{1,k} + (a_{2,k} + \lambda a_{2,i}) A_{2,k} + \ldots + (a_{n,k} + \lambda a_{n,i}) A_{n,k}. \quad (20)$$

Это тождество выражаетъ предложеніе, которое въ словахъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Опредѣлитель не измѣнится, если мы къ элементамъ какой либо вертикали придадимъ соотвѣтствующіе элементы любой

другой вертикали, умноживъ ихъ предварительно на произвольное число λ, или если къ элементамъ какой либо горизонтали придадимъ соотвѣтствующіе элементы любой другой горизонтали, умноженные на произвольнаго множителя λ.

15. Изложенныя свойства опредѣлителя даютъ очень простое средство для рѣшенія системы уравненій первой степени:

$$\begin{array}{l|l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = y_1\,, & A_{1,k} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = y_n\,, & A_{2.k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n.n}x_n = y_n\,. & A_{n,k}\,. \end{array} \qquad (21)$$

Если мы помножимъ первое уравненіе на $A_{1,k}$, второе на $A_{2,k}$, третье на $A_{3,k}$, и т. д послѣднее на $A_{n,k}$, какъ это здѣсь указано, и полученныя уравненія сложимъ, что коэффиціенты всѣхъ неизвѣстныхъ x, кромѣ x_k, обратятся въ 0. Поэтому мы получимъ

$$Ax_k = y_1 A_{1,k} + y_2 A_{2,k} + \dots + y_n A_{n,k}\,. \qquad (22)$$

Если A отлично отъ 0, то дѣленіемъ на A отсюда легко получить x_k.

16. Если количества y_1, y_2, $y_3 \dots y_n$ всѣ равны 0, то мы получаемъ систему однородныхъ линейныхъ уравненій:

$$\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1.n}x_n = 0\,, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2.n}x_n = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = 0\,. \end{array} \qquad (23)$$

Равенства (22) показываютъ, что въ томъ случаѣ, когда опредѣлитель A отличенъ отъ 0, всѣ неизвѣстныя x_1, x_2, $x_3 \dots x_n$ должны быть нулями. Система въ этомъ случаѣ собственнаго рѣшенія (§ 41, 1) не имѣеть.

Необходимое условіе того, чтобы система (23) имѣла собственныя рѣшенія, выражается равенствомъ

$$A = 0\,. \qquad (24)$$

Это равенство представляетъ собой такимъ образомъ результатъ исключенія неизвѣстныхъ x изъ уравненій (23).

Если условіе (24) выполнено и по крайней мѣрѣ одинъ изъ миноровъ $A_{k,i}$ отличенъ отъ нуля, то мы получимъ собственное рѣшеніе, если положимъ:

$$x_1 = A_{k,1}\,,\ x_2 = A_{k,2}\,,\ \dots,\ x_n = A_{k,n}\,. \qquad (25)$$

Если всѣ миноры $A_{k,i}$ равны 0, то это не даетъ собственнаго рѣшенія. Но и въ этомъ случаѣ существуютъ собственныя рѣшенія, которыя выражаются въ минорахъ этихъ миноровъ. Но мы не можемъ здѣсь входить въ разборъ этого случая.

VI. § 148. Распространіе формулы Ньютона на полиномы.

Это дополненіе внесено въ § 55.

Въ § 53 (3), биноміальные коэффиціенты представлены въ формѣ:

$$B_m^{(n)} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Если мы поэтому положимъ $m = \alpha$, $n - m = \beta$, $\alpha + \beta = n$, то мы получимъ формулу:

$$(x+y)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}\, x^\alpha y^\beta, \tag{1}$$

гдѣ суммованіе распространяется на всевозможныя разложенія числа n на два слагаемыхъ, изъ которыхъ ни одинъ не долженъ быть отрицательнымъ. При этомъ подъ символомъ 0! нужно разумѣть число 1.

Въ этой формѣ теорема Ньютона допускаетъ обобщеніе.

Пусть x, y, z . . . будутъ неопредѣленныя величины, число которыхъ равно r, а n пусть будетъ число, которое всѣми возможными способами разлагается на r цѣлыхъ слагаемыхъ, между которыми нѣтъ отрицательныхъ:

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots. \tag{2}$$

Тогда съ помощью индукціи нетрудно показать, что

$$(x + y + z + \ldots)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots, \tag{3}$$

гдѣ суммованіе распространяется на всевозможныя разложенія (2).

Доказательство этой формулы, справедливой при $r = 2$, какъ мы уже сказали, производится при помощи совершенной индукціи. Именно, примемъ, что теорема справедлива въ случаѣ $(r-1)$ слагаемыхъ и положимъ

$$u = y + z + \ldots$$

Тогда по формулѣ (1)

$$(x+u)^n = \sum \frac{n!}{\beta!\,\nu!}\, x^\alpha u^\nu, \quad (\alpha + \nu = n). \tag{4}$$

Съ другой стороны, такъ какъ формула (3) принята для $r-1$ слагаемыхъ, то

$$u^\nu = \sum \frac{\nu!}{\beta!\,\gamma!\ldots}\, y^\beta z^\gamma, \quad (\beta + \gamma + \ldots = \nu);$$

подставляя это въ формулу (4) мы получаемъ формулу (3).

VII. § 149. Разложеніе цѣлыхъ алгебраическихъ функцій на множителей.

Этотъ параграфъ былъ вставленъ во второмъ изданіи послѣ § 63.

1. Функія n-ой степени

$$\varphi(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (1)$$

имѣетъ $n+1$ коэффиціентовъ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Эти коэффиценты можно выбрать такимъ образомъ, чтобы функція при $n+1$ значеніяхъ независимаго перемѣннаго $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ принимала заданныя значенія $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Для опредѣленія коэффиціентовъ a_i мы получимъ систему линейныхъ относительно этихъ коэффиціентовъ уравненій:

$$\varphi(\alpha_0) = A_0,\ \varphi(\alpha_1) = A_1,\ \ldots,\ \varphi(\alpha_n) = A_n; \qquad (2)$$

изъ этихъ уравненій коэффиціенты a_i могутъ быть однозначно опредѣлены, если детерминантъ системы отличенъ отъ нуля. Функціи, степень которыхъ ниже n-ой, мы можемъ разсматривать, какъ частные случаи функціи n-ой степени: мы ихъ получимъ, если уравненія (2) дадутъ $a_0 = 0$. Можно безъ труда показать, что опредѣлитель этой системы уравненій представляетъ собой не что иное, какъ произведеніе всѣхъ разностей вида $\alpha_i - \alpha_k$ и потому не можетъ быть равенъ нулю, если всѣ значенія α_i какъ это, естественно, подразумѣвается, различны между собой. Мы можемъ, однако, обойти вычисленіе опредѣлителя, если намъ удастся, во первыхъ, доказать, что двухъ функцій n-ой или болѣе низкой степени, удовлетворяющихъ поставленнымъ требованіямъ, не существуетъ, а во вторыхъ, непосредственно составить одну такую функцію.

Чтобы доказать первое утвержденіе допустимъ, что существуютъ двѣ функціи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, удовлетворяющія условіямъ (2) при данныхъ значеніяхъ количествъ A_i и a_i. Въ такомъ случаѣ разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ представляетъ собою функцію не выше n-ой степени, которая имѣетъ $n+1$ различныхъ корней: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Согласно § 61, 5, функціи $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ должны быть поэтому тождественны.

2. Чтобы составить функцію $\varphi(x)$, удовлетворяющую требованіямъ, положимъ:

$$f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n); \qquad (3)$$

такимъ образомъ $f(x)$ будетъ функціей $(n+1)$-ой степени; положимъ далѣе

$$\frac{f(x)}{x - \alpha_0} = f_0(x),\ \frac{f(x)}{x - \alpha_1} = f_1(x),\ \ldots,\ \frac{f(x)}{x - \alpha_n} = f_n(x). \qquad (4)$$

Въ такомъ случаѣ

$$f_i(\alpha_k) = 0, \qquad \text{если } i \gtrless k,$$
$$f_i(\alpha_i) = f'(\alpha_i) \quad (\S\ 61,\ 3,\ 4)\ ^{1)}$$

Если поэтому положимъ:

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{f'(\alpha_i)} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad (5)$$

то

$$g_i(\alpha_k) = 0, \quad i \lessgtr k, \quad g_i(\alpha_i) = 1. \quad (6)$$

Если поэтому

$$\varphi(x) = A_0 g_0(x) + A_1 g_1(x) + \ldots + A_n g_n(x), \quad (7)$$

то функція $\varphi(x)$ удовлетворяетъ требованіямъ (2).

Эта формула извѣстна подъ названіемъ **интерполяціонной формулы Лагранжа**. Она имѣетъ цѣлью представить функцію, извѣстную намъ только по отдѣльнымъ своимъ значеніямъ, полученнымъ, напримѣръ, изъ наблюденій, въ видѣ цѣлой функціи отъ независимой перемѣнной. Съ извѣстнымъ приближеніемъ это можно сдѣлать и въ томъ случаѣ, когда законъ, которому явленія дѣйствительно слѣдуютъ, не такъ простъ *).

3. Мы воспользуемся здѣсь этой формулой для другой цѣли; именно, мы сдѣлаемъ изъ нея слѣдующій выводъ:

Если мы выберемъ произвольно $n+1$ различныхъ чиселъ α_i, а затѣмъ составимъ $(n+1)$ функцій $g_i(x)$ по формулѣ (5), то каждая цѣлая функція n-ой или болѣе низкой степени $\varphi(x)$ выразится линейно черезъ функціи $g_i(x)$ [2].

4. Если за α_i мы примемъ цѣлыя числа, то коэффиціенты функцій $g_i(x)$ будутъ раціональныя числа, которыя, однако, вообще говоря, не будутъ цѣлыми. Формулой (7) выражаются, конечно, и всѣ функціи $\varphi(x)$ съ цѣлыми коэффиціентами; для нихъ коэффиціенты A_i будутъ цѣлыми числами. Но обратнаго утверждать нельзя: не всегда формула (7) при цѣлыхъ значеніяхъ коэффиціентовъ A_i воспроизводитъ функцію $\varphi(x)$ съ цѣлыми же коэффиціентами.

5. На изображеніи цѣлыхъ функцій Кронекеръ построилъ методъ, посредствомъ котораго всегда возможно найти множителей, на которыхъ разлагается функція съ цѣлыми коэффиціентами, или установить ея непри-

---

[1]) Въ § 61, 4 показано, что значеніе $f'(\alpha)$ есть $Q(\alpha)$, гдѣ $Q(x)$ есть частное отъ дѣленія функціи $f(x)$ на $(x-\alpha)$. Въ данномъ случаѣ это частное есть не что иное, какъ $f_i(x)$.

*) См. статью объ интерполяціи въ „Энциклопедіи математическихъ наукъ", т. I, ч. II.

[2]) Это выраженіе дастъ формула (7), если за коэффиціенты A_i примемъ значенія функціи $f(\alpha_i)$.

водимость. Этотъ методъ представляетъ собой лишь обобщеніе изложеннаго въ § 63, 1 пріема для разысканія раціональныхъ корней цѣлой функціи. Если нужно изслѣдовать, разлагается ли функція съ цѣлыми коэффиціентами на множителей, то прежде всего слѣдуетъ помощью евклидова алгориѳма найти общаго наибольшаго дѣлителя всѣхъ коэффиціентовъ и удалить его. Мы можемъ поэтому принять, что общій наибольшій дѣлитель коэффиціентовъ равенъ 1. Такія функціи называются **первообразными**[3]). Если первообразная функція приводима, то она разлагается на первообразныхъ же множителей: [4])

$$F(x) = \varphi(x)\,\psi(x). \tag{8}$$

Такъ какъ сумма степеней функцій $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равна степени функціи $F(x)$, то степень одной изъ двухъ функцій φ и ψ не превышаетъ половины степени функціи $F(x)$. Если поэтому $F(x)$ есть функція степени $2n$ или $2n+1$, то одна изъ составляющихъ функцій, скажемъ $\varphi(x)$, будетъ не выше n-ой степени; мы можемъ, слѣдовательно, представить ее формулой (7). Выберемъ за α_i произвольныя **цѣлыя числа**. Въ такомъ случаѣ, въ виду соотношенія (8),

$$F(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i)\,\psi(\alpha_i) = A_i\,\psi(\alpha_i),$$

гдѣ A_i, $F(\alpha_i)$ и $\psi(\alpha_i)$ суть **цѣлыя числа**. Число A_i представляетъ собой поэтому дѣлителя числа $F(\alpha_i)$.

Однако, когда функція F задана и числа α_i выбраны, то количества $F(\alpha_i')$ суть извѣстныя цѣлыя числа, которыя имѣютъ каждое только конечное число дѣлителей. Такимъ образомъ, за $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ могутъ быть приняты только комбинаціи дѣлителей чиселъ $F(\alpha_1), F(\alpha_2), \ldots, F(\alpha_n)$; нужно только имѣть въ виду, что каждый дѣлитель можетъ быть взятъ какъ съ однимъ знакомъ, такъ и съ противоположнымъ. Мы получимъ, такимъ образомъ, по формулѣ (7) конечное число функцій $\varphi(x)$, на которыя и нужно дѣлить функцію $F(x)$. **Если ни одно изъ этихъ дѣленій не совершится нацѣло, то $F(x)$ несомнѣнно неприводимая функція** [5]).

---

[3]) Этотъ терминъ приведенъ авторомъ во второмъ изданіи въ п. 2 параграфа 63.

[4]) Въ § 63, 3 доказано предложеніе, представляющее собой лишь частный случай высказанной здѣсь теоремы, именно тотъ случай, когда старшій коэффиціентъ въ полиномѣ $F(x)$ равенъ 1. Во второмъ изданіи теорема доказана въ общемъ видѣ. Это доказательство мы воспроизводимъ ниже въ п. 6 настоящаго параграфа.

[5]) Пояснимъ это нѣсколько подробнѣе. Намъ нужно найти дѣлителя $\varphi(x)$ функціи $F(x)$. Мы выбираемъ произвольныя цѣлыя числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда, какъ выяснено въ текстѣ, $\varphi(\alpha_1) = A_1$ есть дѣлитель числа $F(\alpha_1)$, $\varphi(\alpha_2) = A_2$ есть дѣлитель числа $F(\alpha_2), \ldots, \varphi(\alpha_n) = A_n$ есть дѣлитель числа $F(\alpha_n)$. Мы тогда принимаемъ за A_1 произвольнаго дѣлителя числа $F(\alpha_1)$, за A_2 — произвольнаго дѣлителя числа $F(\alpha_2)$ и т. д. Затѣмъ по формулѣ Лагранжа мы составляемъ функцію $\varphi(x)$, соотвѣт-

Не всѣ комбинаціи дѣлителей чиселъ $F(\alpha_1)$, $F(\alpha_2)$, ..., $F(\alpha_n)$ дадутъ функцію $\varphi(x)$ съ цѣлыми коэффиціентами; поэтому нѣкоторыя комбинаціи дѣлителей могутъ быть напередъ исключены, и число испытаній можетъ быть такимъ образомъ уменьшено. Рунге (Runge) указалъ пріемъ, дающій возможность исключить этихъ непригодныхъ дѣлителей, и, такимъ образомъ, методъ Кронекера получилъ не только теоретическое, но и практическое значеніе *).

6. Если функція $f(x)$ съ цѣлыми коэффиціентами

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{9}$$

разлагается на множителей, то всегда можно выбрать два цѣлыхъ числа b и m такимъ образомъ, что

$$b\,f(x) = m\,\varphi(x)\,\psi(x), \tag{10}$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть первообразныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами. Дѣйствительно, если $f(x)$ разлагается на множителей $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ съ дробными коэффиціентами, то мы можемъ въ каждой функціи привести всѣ коэффиціенты къ одному знаменателю: тогда получимъ:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{b_1}\varphi_2(x),\ \psi_1(x) = \frac{1}{b_2}\psi_2(x),$$

гдѣ $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ суть функціи съ цѣлыми коэффиціентами. Вмѣстѣ съ тѣмъ, если положимъ $b_1b_2 = b$, то

$$b\,F(x) = \varphi_2(x)\,\psi_2(x).$$

Если $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ суть функціи не первообразныя, то

$$\varphi_2(x) = m_1\,\varphi(x),\ \psi_2(x) = m_2\,\psi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть функціи первообразныя. Вмѣстѣ съ тѣмъ, если положимъ $m_1m_2 = m$, то получимъ соотношеніе (10).

Кромѣ того мы можемъ принять, что b есть число положительное и простое относительно m; но мы докажемъ, что $b = 1$. Съ этою цѣлью положимъ:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= b_0x^\mu + b_1x^{\mu-1} + b_2x^{\mu-2} + \ldots + b_{\mu-1}x + b_\mu, \\ \psi(x) &= c_0x^\nu + c_1x^{\nu-1} + c_2x^{\nu-2} + \ldots + c_{\nu-1}x + c_\nu, \end{aligned} \tag{11}$$

ствующую этимъ значеніямъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если $F(x)$ дѣлится на $\varphi(x)$, то нами найденъ дѣлитель функціи $F(x)$. Въ противномъ случаѣ мы беремъ другую комбинацію дѣлителей чиселъ $F(\alpha_1)$, $F(\alpha_2)$ ... $F(\alpha_n)$. Если ни одна изъ этихъ комбинацій не дастъ функціи $\varphi(x)$, на которую $F(x)$ дѣлится безъ остатка, то послѣдняя неприводима.

*) Kronecker, Crelles Journal, Bd. 94, S. 347. Runge, ibidem, Bd. 99, S. 90.

гдѣ $\mu + \nu = n$. Производя умноженіе, получаемъ:

$$\begin{aligned} b\,a_0 &= m\,b_0 c_0\,, \\ b\,a_1 &= m\,(b_0 c_1 + b_1 c_0)\,, \\ b\,a_2 &= m\,(b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0)\,, \qquad (12) \\ b\,a_3 &= m\,(b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0)\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Эти равенства составляются по тому же закону, что и равенства (3) въ § 63.

Пусть теперь p будетъ простой дѣлитель числа b; въ такомъ случаѣ онъ не можетъ быть дѣлителемъ всѣхъ коэффиціентовъ b или всѣхъ коэффиціентовъ c, такъ какъ φ и ψ, по условію, суть функціи неприводимыя. Положимъ, что b_r есть первый изъ коэффиціентовъ b, а c_r первый изъ коэффиціентовъ c, которые не дѣлятся на p. Въ такомъ случаѣ

$$\left.\begin{array}{l} \text{числа } b_0,\ b_1,\ b_2 \ldots b_{r-1} \text{ дѣлятся на } p, \text{ а } b_r \text{ не дѣлится на } p, \\ \quad\ \text{„}\quad c_0,\ c_1,\ c_2 \ldots c_{s-1} \quad \text{„} \quad \text{„}\ p, \text{ „ } c_s \text{ „} \quad \text{„} \quad \text{„}\ p. \end{array}\right\} (13)$$

Выдѣлимъ теперь изъ равенствъ (12) то, которое занимаетъ $(r+s+1)$-ое мѣсто, и напишемъ:

$$b\,a_{r+s} = m(b_r c_s + b_{r-1} c_{s+1} + b_{r-2} c_{s+2} + \ldots + b_{r+1} c_{s-1} + b_{r+2} c_{s-2} + \ldots). \ (14)$$

Но, по условію, $b_r c_s$ не дѣлится на p, а всѣ остальные члены выраженія, заключеннаго въ скобки, дѣлятся на p; поэтому все число, заключенное въ скобки, не дѣлится на p. Но такъ какъ b, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вся лѣвая часть равенства (14) дѣлится на p, то m дѣлится на p, что противно предположенію, что b и m суть числа первыя между собой.

Такимъ образомъ, число b не можетъ дѣлиться ни на какое простое число, т. е. $b = 1$; вмѣстѣ съ тѣмъ изъ соотношенія (10) мы получаемъ:

$$f(x) = m\varphi(x)\psi(x).$$

Если же $b = 1$, то равенства (12) обнаруживаютъ, что всѣ коэффиціенты a дѣлятся на m. Если поэтому $f(x)$ есть первообразная цѣлая функція, то и $m = 1$. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получаемъ теорему:

Если первообразная функція съ цѣлыми коэффиціентами приводима, то она разлагается на первообразныхъ же множителей.

VIII. § 150. Сравненія высшихъ степеней.

Этотъ параграфъ вставленъ авторомъ во второмъ изданіи послѣ § 70

---

1. Изъ уравненія (1) § 70-го слѣдуетъ, что $ay - c$ дѣлится на b, или, согласно обозначенію, принятому въ § 67,

$$ay \equiv c \pmod{b}. \qquad (1)$$

Обратно, если мы удовлетворимъ этому сравненію, то мы найдемъ также значеніе x, соотвѣтствующее уравненію $ay - bx = c$. Такимъ образомъ, сравненіе (1) даетъ для y одно и только одно рѣшеніе изъ ряда чиселъ 0, 1, 2, ..., $b-1$, если a и b суть числа первыя между собой. Всѣ другія рѣшенія этого сравненія, согласно § 70, 3, сравнимы съ этими основными рѣшеніями по модулю b. Это сравненіе называется сравненіемъ первой степени, или линейнымъ. Мы видимъ, такимъ образомъ, что здѣсь имѣетъ мѣсто полная аналогія съ предложеніемъ, согласно которому линейное уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ имѣетъ только одно рѣшеніе, если подъ рѣшеніемъ сравненія мы разумѣемъ не одно число, а совокупность всѣхъ сравнимыхъ между собою чиселъ, удовлетворяющихъ сравненію.

2. Аналогія между сравненіями высшихъ степеней и алгебраическими уравненіями не сохраняется, однако, во всей полнотѣ. Пусть

$$f(x) = A_0 x_n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n \quad (2)$$

будетъ цѣлая функція n-той степени, коэффиціенты которой $A_0, A_1, \dots A_n$ суть цѣлыя числа. Если при $x = a$ функція $f(x)$ принимаетъ значеніе $f(a)$, которое дѣлится на простое число p, то говорятъ, что a есть корень сравненія n-той степени

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \qquad (3)$$

Если a удовлетворяетъ этому условію, то и каждое число, сравнимое съ a по модулю p, также удовлетворяетъ этому условію; это вытекаетъ изъ предложеній, доказанныхъ въ § 67, 3—5. Совокупность всѣхъ этихъ сравнимыхъ между собою чиселъ разсматривается, какъ одинъ корень нашего сравненія.

Что имѣются сравненія этого рода, которыя не имѣютъ ни одного корня, въ этомъ легко убѣдиться на простомъ примѣрѣ. Возьмемъ, напримѣръ, сравненіе:

$$f(x) = x^2 + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 3).$$

Это сравненіе не имѣетъ рѣшеній, потому что $x^2 + 1$ ни при какомъ цѣломъ значеніи x не можетъ дѣлиться на 3. Здѣсь, такимъ образомъ, теорема, соотвѣтствующая основному предложенію алгебры, не имѣетъ мѣста. Справедливымъ остается только слѣдующее предложеніе:

Сравненіе n-той степени при простомъ модулѣ p не можетъ имѣть болѣе, нежели n различныхъ корней.

Это предложеніе справедливо при $n = 1$. Оно будетъ, слѣдовательно, доказано во всей его общности, если мы докажемъ его для функціи n-той степени въ предположеніи, что оно уже установлено для функціи $(n-1)$-ой степени. Это доказательство можно провести слѣдующимъ образомъ.

Согласно § 61, 3, если x и a суть два неопредѣленныхъ количества, мы можемъ положить:

$$f(x) = (x-a)\,Q(x) + f(a),$$

гдѣ $Q(x)$ есть цѣлая функція $(n-1)$-ой степени съ цѣлыми коэффиціентами. Если, поэтому, $f(a)$ и $f(x)$ дѣлятся на p, то и произведеніе $(x-a)\,Q(x)$ должно дѣлиться на p; если при этомъ x не сравнимо съ a, т. е. разность $x-a$ не дѣлится на p, то $Q(x)$ должно дѣлиться на p.

Если мы, поэтому, примемъ, что доказываемое предложеніе справедливо для функціи $(n-1)$-ой степени, то имѣется не болѣе $n-1$ несравнимыхъ между собой значеній перемѣннаго x, при которыхъ $Q(x)$ дѣлится на p, а слѣдовательно, не болѣе n значеній, при которыхъ $f(x) \equiv 0$.

IX. § 151. Существованіе первообразныхъ корней по простому модулю.

Этотъ параграфъ вставленъ авторомъ послѣ предыдущаго.

1. Въ § 68 доказана теорема Фермата, согласно которой

$$a^{p-1} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

если p есть простое число и a не дѣлится на p. Если f есть наименьшее положительное число, при которомъ

$$a^{f} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

то говорятъ, что a принадлежитъ показателю f по модулю p. Если при какомъ-либо значеніи h

$$a^{h} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

то h есть число кратное f. Въ частности, f всегда представляетъ собою дѣлителя числа $p-1$. Число g, которое принадлежитъ показателю $p-1$, называется первообразнымъ корнемъ простого числа p.

Мы имѣли случай встрѣчать отдѣльные примѣры такихъ первообразныхъ корней, но мы не дали общаго доказательства предложенія, что для каждаго простого числа p существуютъ первообразные корни. Это доказательство мы теперь дадимъ.

2. Случай $p=2$ не представляетъ никакого интереса, ибо при $p=2$ число 1 есть первообразный корень. Предположимъ, поэтому, что p есть нечетное простое число, такъ что $p-1$ есть число четное. Разложимъ $p-1$ на простыхъ множителей и положимъ

$$p - 1 = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots,$$

гдѣ a, b, c суть различныя простыя числа, a^{α}, b^{β}, c^{γ} — наивысшія степени, въ которыхъ эти простыя числа входятъ въ составъ числа $p-1$. Прежде всего мы докажемъ:

1) Существуетъ цѣлое число A, которое принадлежитъ показателю a^α по модулю p.

Въ самомъ дѣлѣ, степень сравненія

$$x^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ниже, нежели $p-1$, поэтому, согласно предыдущему параграфу, между числами $1, 2 \ldots p-1$ найдется такое, которое этому сравненію не удовлетворяетъ. Пусть y будетъ такое число. Если мы положимъ

$$A \equiv y^{b^\beta c^\gamma \cdots},$$

то

$$A^{a^\alpha} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Если A принадлежитъ показателю f, то число f должно быть дѣлителемъ числа a^α. Если бы f было меньше a^α, то оно должно было бы быть дѣлителемъ числа $a^{\alpha-1}$, а потому было бы

$$A^{a^{\alpha-1}} \equiv 1,$$

т. е.

$$y^{a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma \cdots} = y^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p},$$

что противно условію. Такимъ образомъ, число A принадлежитъ показателю a^α.

Такимъ же образомъ можно найти числа $B, C \ldots$, которыя принадлежатъ соотвѣтственно показателямъ $b^\beta, c^\gamma \ldots$.

2) Произведеніе $g = ABC \ldots$ принадлежитъ показателю $p-1$ по модулю p.

Если мы примемъ, что g принадлежитъ не показателю $p-1$, а меньшему показателю h, то $(p-1):h$ есть цѣлое число, большее 1; въ составъ этого числа могутъ входить только простыя числа $a, b, c, \ldots$; такъ какъ, съ другой стороны, это число больше 1, то оно должно дѣлиться, по крайней мѣрѣ, на одно изъ простыхъ чиселъ $a, b, c, \ldots$, скажемъ, на a. Если мы, поэтому, положимъ $p-1 = hk$, то k есть цѣлое число, кратное a, а h есть дѣлитель числа $(p-1):a$. Поэтому, изъ сравненія $g^h \equiv 1 \pmod{p}$ слѣдуетъ:

$$g^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1 \pmod{p},$$

т. е.

$$A^{\frac{p-1}{a}} B^{\frac{p-1}{a}} C^{\frac{p-1}{a}} \ldots \equiv 1.$$

Такъ какъ, съ другой стороны, $(p-1):a$ дѣлится на b^β, c^γ ..., то

$$B^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \quad C^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1, \ldots,$$

а потому

$$A^{\frac{p-1}{a}} \equiv 1.$$

Показатель, которому принадлежитъ число A по модулю p, долженъ былъ бы, такимъ образомъ, быть дѣлителемъ числа $(p-1):a$. Между тѣмъ, этимъ показателемъ служитъ число a^α, которое не входитъ въ составъ числа $(p-1):a$.

3. Этимъ доказано существованіе первообразнаго корня g для каждаго простого числа p. Каждое число, сравнимое съ g по модулю p, также будетъ первообразнымъ корнемъ по тому же модулю. Совокупность всѣхъ этихъ сравнимыхъ между собою чиселъ мы будемъ разсматривать, какъ одинъ первообразный корень.

Числа

$$1, g, g^2, g^3, \ldots, g^{p-2}$$

всѣ несравнимы между собою, а такъ какъ ни одно изъ нихъ не дѣлится на p, и число ихъ равно $p-1$, то между ихъ вычетами фигурируетъ каждое изъ чиселъ

$$k = 1, 2, 3, \ldots p-1$$

одинъ и только одинъ разъ.

4. Можно безъ труда опредѣлить показателя f, которому принадлежитъ любое изъ этихъ чиселъ, скажемъ g^k. Именно, если e есть общій наибольшій дѣлитель чиселъ k и $p-1$, и $k=ek'$, $p-1=ef$, то $k'<f$ и представляетъ собой число простое относительно f. Вмѣстѣ съ тѣмъ $g^{hk}=g^{hek'}$ сравнимо съ 1 только въ томъ случаѣ, если h дѣлится на f. Сообразно этому g^k принадлежитъ показателю f, а такъ какъ число значеній, которое можетъ имѣть число k', есть $\varphi(f)$ (§ 67, 9), то имѣется $\varphi(f)$ несравнимыхъ между собою чиселъ, которыя принадлежатъ показателю f. Если мы положимъ $f=p-1$, то придемъ къ заключенію, что существуетъ $\varphi(p-1)$ несравнимыхъ между собою первообразныхъ корней простого числа p.

X. § 152. Квадратичные вычеты простыхъ чиселъ.

Этотъ параграфъ вставленъ во второмъ изданіи послѣ § 72.

1. Мы уже видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, что простому нечетному числу p всегда отвѣчаетъ $\frac{1}{2}(p-1)$ квадратичныхъ вычетовъ и столько же невычетовъ, если мы число нуль разъ навсегда выключаемъ.

Квадратичные вычеты можно получить, какъ вычеты чиселъ

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Числа, которыя въ этомъ ряду не фигурируютъ, суть невычеты. Для сокращенія рѣчи мы будемъ теперь разсматривать всѣ числа, имѣющія одинъ и тотъ же вычетъ по модулю p, какъ одинъ индивидуумъ, одинъ числовой классъ. Сообразно этому, мы будемъ вообще разумѣть подъ квадратичными вычетами всѣ числа a, при которыхъ сравненіе $x^2 \equiv a$ (mod. p) имѣетъ рѣшенія. Въ настоящемъ параграфѣ для сокращенія рѣчи мы будемъ также говорить просто вычеты вмѣсто квадратичные вычеты. Мы получимъ слѣдующія предложенія.

2. Произведеніе двухъ вычетовъ есть вычетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$x^2 \equiv a, \quad x'^2 \equiv a' \pmod{p},$$

то

$$(xx')^2 \equiv aa' \pmod{p},$$

такимъ образомъ, aa' также есть вычетъ.

3. Произведеніе вычета на невычетъ есть невычетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если a и aa' суть вычеты, то существуетъ два такихъ числа x и y, которыя удовлетворяютъ сравненіямъ:

$$x^2 \equiv a, \quad y^2 \equiv aa' \pmod{p};$$

съ другой стороны, согласно § 71, 1, существуетъ такое число x', что $xx' \equiv 1$. Въ такомъ случаѣ:

$$y^2 \equiv x^2 a', \quad (yx')^2 \equiv a',$$

а потому a' также представляетъ собою вычетъ. Отсюда вытекаетъ, что произведеніе ab есть невычетъ, если a есть вычетъ, а b невычетъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы ab было вычетомъ, то и b, какъ мы только что показали, было бы вычетомъ.

4. Произведеніе двухъ невычетовъ есть вычетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если b есть какое-либо число, которое не дѣлится на p, то произведеніе $b\rho$ пробѣгаетъ полную систему вычетовъ по модулю p, когда множитель ρ пробѣгаетъ полную систему вычетовъ. Эта полная система вычетовъ состоитъ изъ квадратичныхъ вычетовъ α и квадратичныхъ невычетовъ β. Если b есть невычетъ, то произведеніе $b\alpha$, согласно предыдущей теоремѣ, проходитъ черезъ всѣ невычеты. Слѣдовательно, произведеніе $b\beta$ должно пройти черезъ всѣ вычеты.

Полезно провѣрить эти теоремы на произвольно взятомъ примѣрѣ; напримѣръ, при $p = 13$:

$$\alpha = 1,\ 3,\ 4,\ 9,\ 10,\ 12,$$

$$\beta = 2,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ 8,\ 11.$$

5. Критерій Эйлера.

Если x означаетъ число, не дѣлящееся на p, то, по теоремѣ Фермата,

$$x^{p-1} - 1 = \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Поэтому одинъ изъ множителей

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1, \quad x^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

долженъ дѣлиться на p. Но оба множителя совмѣстно не могутъ дѣлиться на p, ибо въ такомъ случаѣ ихъ разность 2 тоже дѣлилась бы на p. Положимъ теперь, что a есть квадратичный вычетъ числа p. Въ такомъ случаѣ существуетъ число c, удовлетворяющее сравненію

$$c^2 \equiv a.$$

Примѣняя вновь теорему Фермата, получимъ:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv c^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

а потому каждый квадратичный вычетъ удовлетворяетъ сравненію

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0.$$

Этому сравненію удовлетворяютъ всѣ $\frac{1}{2}(p-1)$ квадратичныхъ вычетовъ. Согласно же теоремѣ, доказанной въ § 150, 2 ему не можетъ удовлетворять ни одинъ изъ невычетовъ. Слѣдовательно, квадратичные невычеты удовлетворяютъ сравненію

$$x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0.$$

Мы получаемъ, такимъ образомъ, теорему:

Число c представляетъ собой квадратичный вычетъ или невычетъ, смотря по тому, какое изъ двухъ сравненій имѣетъ мѣсто:

$$c^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \quad \text{или} \quad \equiv -1 \quad (\text{mod. } p) \qquad (1)$$

6. Критерій Гаусса.

Пусть c будетъ число, не дѣлящееся на p. Разсмотримъ $\frac{1}{2}(p-1)$ чиселъ, кратныхъ c:

$$c,\ 2c,\ 3c,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}c, \qquad (2)$$

а также произведеніе этихъ чиселъ

$$P = c \,.\, 2c \,.\, 3c \ldots \frac{p-1}{2} c = c^{\frac{p-1}{2}} \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \frac{p-1}{2}. \qquad (3)$$

Абсолютно наименьшіе вычеты чиселъ (2) по модулю p содержатся въ ряду чиселъ

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm \frac{p-1}{2}.$$

Съ другой стороны, между этими абсолютно наименьшими вычетами не можетъ быть двухъ, имѣющихъ одну и ту же абсолютную величину. Въ самомъ дѣлѣ, если бы $rc \equiv \pm r'c$, то $r \pm r'$ должно было бы дѣлиться на p; между тѣмъ это невозможно, если r и r' суть различныя положительныя числа, оба меньшія $\frac{1}{2} p$. Поэтому, абсолютныя величины абсолютно наименьшихъ вычетовъ чиселъ (2) совпадаютъ съ числами

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, \frac{p-1}{2}.$$ [1])

Если, поэтому, среди абсолютно наименьшихъ вычетовъ чиселъ (1) имѣется μ отрицательныхъ, то

$$P \equiv (-1)^{\mu} \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \frac{p-1}{2} \pmod{p}. \qquad (4)$$

Сопоставляя сравненія (3) и (4), получаемъ:

$$c^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \pmod{p}.$$

Въ связи съ предыдущей теоремой это приводитъ къ слѣдующему выводу.

Число c, не дѣлящееся на p, представляетъ собой квадратичный вычетъ или невычетъ по модулю p, смотря по тому, имѣется ли между абсолютно наименьшими вычетами чиселъ (2) четное или нечетное число отрицательныхъ чиселъ.

7. Если мы примѣнимъ эту теорему къ числу $c = -1$, то числа ряда (2) сами представляютъ собою свои абсолютно наименьшіе вычеты; всѣ они отрицательны. Такимъ образомъ, -1 есть квадратичный вычетъ, если $\frac{1}{2}(p-1)$ есть четное число, и невычетъ, если $\frac{1}{2}(p-1)$ есть число нечетное. Это совпадаетъ съ предложеніемъ, доказаннымъ выше инымъ путемъ:

Число -1 представляетъ собой квадратичный вычетъ всѣхъ простыхъ чиселъ вида $4m+1$ и невычетъ простыхъ чиселъ вида $4m+3$.

[1]) Абсолютныя величины вычетовъ чиселъ (2) могутъ отличаться отъ чиселъ этого ряда порядкомъ.

8. Обратимся теперь къ числу $c = -2$. Въ такомъ случаѣ рядъ (2) совпадаетъ съ рядомъ четныхъ отрицательныхъ чиселъ

$$-2,\ -4,\ -6,\ \ldots,\ -(p-1).$$

Если $2r < \frac{1}{2}p$, то $-2r$ представляетъ само свой абсолютно наименьшій положительный вычетъ, который будетъ, поэтому, отрицательнымъ. Если же $2r > \frac{1}{2}p$, то абсолютно наименьшимъ вычетомъ числа $-2r$ будетъ $p-2r$; онъ имѣетъ, слѣдовательно, положительное значеніе. Такимъ образомъ, μ есть число четныхъ положительныхъ чиселъ, которыя меньше $\frac{1}{2}p$, или, что сводится къ тому же, число всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ чиселъ, которыя меньше $\frac{1}{4}p$. Число p всегда приводится къ одному изъ четырехъ видовъ: $8m+1$, $8m+3$, $8m+5$, $8m+7$. Въ каждомъ изъ этихъ четырехъ случаевъ μ есть число положительныхъ чиселъ r, которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$r < 2m + \tfrac{1}{4},\ \mu = 2m,$$
$$r < 2m + \tfrac{3}{4},\ \mu = 2m,$$
$$r < 2m + \tfrac{5}{4},\ \mu = 2m + 1,$$
$$r < 2m + \tfrac{7}{4},\ \mu = 2m + 1.$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующее предложеніе:

Число -2 есть квадратичный вычетъ всѣхъ простыхъ чиселъ вида

$$8m+1,\quad 8m+3,$$

и невычетъ всѣхъ простыхъ чиселъ вида

$$8m+5,\quad 8m+7.$$

9. Сопоставляя это предложеніе съ предыдущимъ, мы приходимъ, согласно п. п. 2, 3, 4, къ слѣдующей теоремѣ:

Число $+2$ есть квадратичный вычетъ простыхъ чиселъ вида

$$8m+1,\quad 8m+7,$$

и невычетъ простыхъ чиселъ вида

$$8m+3,\quad 8m+5.$$

10. Историческія свѣдѣнія о квадратичныхъ вычетахъ.

Если c есть квадратичный вычетъ числа p, то существуютъ цѣлыя числа x, для которыхъ квадратичная функція

$$f(x) = x^2 - c \tag{5}$$

дѣлится на p. Поэтому, старые авторы по теоріи чиселъ Эйлеръ, Лежандръ и другіе называютъ простыя числа, для которыхъ c есть квадра-

тичный вычетъ, простыми дѣлителями функціи $f(x)$. Задача, которую мы здѣсь разобрали для случаевъ $c = -1, \pm 2$, устанавливаетъ простыхъ дѣлителей функцій $x^2 + 1$ и $x^2 \pm 2$. Фермату эти результаты были уже извѣстны. Но, повидимому, онъ пришелъ къ нимъ только путемъ индукціи. Доказательство для случая $c = -1$ было дано Эйлеромъ, а для случая $c = \pm 2$ Лагранжемъ. Общій законъ для любого c былъ высказанъ впервые Эйлеромъ (1783), но не былъ имъ доказанъ. Этотъ общій законъ, который Лежандръ называетъ **закономъ взаимности квадратичныхъ вычетовъ**, а Гауссъ „Theorema fundamentale in doctrina de residuis quadraticis", играетъ въ исторіи новой теоріи чиселъ очень важную роль. Кромѣ Эйлера и, повидимому, совершенно независимо отъ него къ этому закону индуктивнымъ путемъ пришелъ Лежандръ (1785), но доказательство было дано впервые Гауссомъ въ 1786 году.

Гауссъ много разъ возвращался къ этому предложенію и до 1818 года далъ 6 доказательствъ этого предложенія, основанныхъ на совершенно различныхъ принципахъ. Еще два доказательства были найдены въ его посмертныхъ бумагахъ.

Другія доказательства даны Коши, Якоби, Эйзенштейномъ, Куммеромъ, Кронекеромъ и другими. Особенно простое доказательство принадлежитъ пастору Целлеру *).

Содержаніе этого общаго закона можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ.

Если изъ двухъ нечетныхъ простыхъ чиселъ p и q по крайней мѣрѣ одно имѣетъ видъ $4m + 1$, то p есть квадратичный вычетъ или невычетъ по модулю q, смотря по тому, есть ли q вычетъ или невычетъ по модулю p. Если же оба числа p и q имѣютъ видъ $4m + 3$, то p есть вычетъ по модулю q, когда q есть невычетъ по модулю p, и обратно.

Случаи $c = -1$ и $c = \pm 2$, которые мы разсмотрѣли выше, не содержатся непосредственно въ общемъ законѣ и носятъ названіе **дополнительныхъ предложеній къ закону взаимности квадратичныхъ вычетовъ**. Подробныя свѣдѣнія о доказательствахъ закона взаимности можно найти въ спеціальномъ сочиненіи О. Баумгарта **).

---

*) Monatsberichte der Berliner Academie 1872.

**) Oswald Baumgart „Ueber das quadratische Reziprozitätsgesetz", Leipzig. Teubner. 1885.

Алфавитный указатель.

Числа соотвѣтствуютъ цифрамъ страницъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Книга I.

Основанія ариѳметики.

Глава I.

Натуральныя числа.

Глава II.

Ариѳметическія дѣйствія.

Глава III.

Дѣленіе и введеніе дробей.

Глава IV.

Ирраціональныя числа.

Глава V.

Отношенія

Глава VI.

Степени и логариѳмы.

Глава VII.

Уравненія первой степени.

Глава VIII.

Квадратныя уравненія и мнимыя числа.

Глава IX.

Перестановки и сочетанія.

Глава X.

Различныя приложенія.

Книга II.

Алгебра.

Глава XI.

Алгебраическія уравненія.

Глава XII.

Основныя теоремы алгебры.

Глава XIII.

Неопредѣленныя уравненія первой степени.

Глава XIV.

Неопредѣленныя уравненія второй степени.

Глава XV.

Непрерывныя дроби.

Глава XVI.

Алгебраическое рѣшенie уравненiй 3-ей и 4-ой степени.

Глава XVII.

Приближенное вычисленie корней численныхъ уравненiй.

Глава XVIII.

Дѣленie окружности на равныя части.

Глава XX.

Доказательства невозможности.

Глава XXI.

Изъ исторіи алгебры.

Книга III.

Анализъ.

Глава XXII.

Безконечные ряды.

Глава XXIII.

Безконечные ряды съ положительными и отрицательными членами.

Глава XXIV.

Безконечные сходящіеся ряды для показательной и для тригонометрическихъ функцій.

Глава XXV.

Биноміальный рядъ.

Глава XXVI.

Логариѳмическіе ряды.

Глава XXVII.

Безконечныя произведенія.

Глава XXVIII.

Трансцендентность чиселъ e и π.

Глава XXIX.

Функціи, дифференціалы и интегралы.

Дополненія.

Замѣченныя опечатки.

Стран.	*Строка.*		*Напечатано:*	*Должно быть:*
8	11	сверху	комплексомъ	комплексами
50	19	"	Каждое простое число	Каждое число
65	6	"	α^n	x^n при $\alpha < 1$
72	1	"	Глава VI	Глава IV
79	15	"	$a - a'$	$a' - a$
96	6	снизу	10_8	10^8
139	4	"	неизвѣстным	неизвѣстными
166	12	сверху	грдуснаго	градуснаго
173	1	"	Глава X	Глава IX
209	9	снизу	тетраедрическимъ	тетраэдрическимъ
251	надъ страницей		§ 69	§ 66
278, 279, 280	"	"	§ 72	§ 71
283	"	"	§ 73	§ 72

Кромѣ того при нумераціи главъ пропущенъ номеръ XIX, такъ что за XVIII главой слѣдуетъ XX.


MATHESIS

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
20	21 сверху	$x^n+a_1x^{n-}{}_1+a_2x^{n-2}+\dots$	$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots$
32	8 снизу	$\frac{\alpha_o+\alpha_1x+\dots+d_kx^k}{\beta_o+\beta_1x+\dots+\beta_lx^l}$	$\frac{\alpha_o+\alpha_1x+\dots+\alpha_kx^k}{\beta_o+\beta_1x+\dots+\beta_lx^l}$
35	20 сверху	$I_1\sim I_3$	$I_1\sim I_2$
37	8 »	области $K(\omega)$	области $K(\alpha)$
41	10 »	$J_k^p\sim J_{v-1}^p$	$J_k^p\sim J_{p-1}^p$
44	9 »	$\left\{m+\alpha^kn\right\}t= =\alpha^{2gk}\left\{m+\alpha^{-k}n\right\}t$	$\left\{m\times\alpha^kn\right\}t= =\alpha^{2g_k}\left\{m+\alpha^{-k}n\right\}t$
44	12 »	$m+\alpha^kn\equiv\alpha^{2gk}m+\alpha^{2gk-k}n$	$m+\alpha^kn\equiv\alpha^{2g_k}m+\alpha^{2g_k-k}n$
44	1 снизу	$\alpha^g\left\{m+\alpha_g{-}_1n\right\}=t$	$\alpha^g\left\{m+\alpha^{p-1}n\right\}=t$
49	12 »	заключению	заключению:
49	11 »	часта	части
49	10 »	на:	на
49	8 »	степени	степень
50	10 сверху	$J_p^h\sim J_{p-1}^h\ (k=o,1,\dots,p-2)$	$J_k^h\sim J_{p-1}^h\ (k=o,1,\dots p-2)$